

**ОБОБЩЁННАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ИНТЕНСИФИЦИРОВАННОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ
ТЕЧЕНИИ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ С ШЕРОХОВАТОЙ ВНУТРЕННЕЙ
ПОВЕРХНОСТЬЮ И ПОЛУКРУГЛЫМИ СКРУГЛЁННЫМИ
ПОВЕРХНОСТНЫМИ ТУРБУЛИЗАТОРАМИ НА БАЗЕ
ЧЕТЫРЁХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО
СЛОЯ**

Лобанов И.Е.

Московский Авиационный Институт, г.Москва, РФ

Разработана теоретическая модель для расчёта теплообмена при турбулентном течении в каналах в условиях интенсификации теплообмена, отличающаяся от известных моделей более высокой точностью, отсутствием дополнительных допущений, учётом большего числа параметров, оказывающих влияние на процесс интенсифицированного теплообмена, в т.ч. влияние шероховатости в пространстве между турбулизаторами для круглых труб с турбулизаторами на относительный теплообмен. Существующие решения могут быть охарактеризованы как частный случай этих точных решений; точные решения являются более сложными по отношению к существующим решениям. Получены точные решения задачи об интенсифицированном теплообмене для данной

постановки задачи. Полученные расчётные данные по интенсифицированному теплообмену хорошо соответствуют существующим экспериментальным данным, имея гораздо меньшую погрешность по отношению к последним, чем существующие решения.

Ключевые слова: *теплообмен, интенсификация, математическое моделирование, турбулизатор.*

**GENERALIZED ANALYTICAL THEORY OF INTENSIFIED HEAT
TRANSFER DURING TURBULENT FLOW IN ROUND PIPES WITH A
ROUGH INNER SURFACE AND SEMICIRCULAR ROUNDED SURFACE
TURBULATORS BASED ON A FOUR-LAYER MODEL OF A TURBULENT
BOUNDARY LAYER**

Lobanov I.E.

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

A theoretical model has been developed for calculating heat exchange during turbulent flow in channels under conditions of heat exchange intensification, which differs from the known models with higher accuracy, the absence of additional assumptions, taking into account a larger number of parameters that affect the process of intensified heat exchange, including the effect of roughness in the space between turbulators for round pipes with turbulators on relative heat exchange. Existing solutions can be characterized as

a special case of these exact solutions; exact solutions are more complex in relation to existing solutions. Exact solutions of the problem of intensified heat exchange for this formulation of the problem are obtained. The obtained calculated data on the intensified heat exchange correspond well to the existing experimental data, having a much smaller error in relation to the latter than the existing solutions.

Keywords: heat transfer, intensification, mathematical modeling, turbulator.

1. Интенсификация теплообмена при турбулентном течении в круглых трубах

В различных областях техники широко применяются различного рода трубчатые теплообменные аппараты и теплообменные устройства, в которых, в результате интенсификации теплообмена, может быть достигнуто снижение их массогабаритных показателей при заданных значениях теплового потока, гидравлических потерь, расходов и температур теплоносителей; в ряде случаев задачей является снижение температурного уровня поверхности теплообмена при фиксированных режимных и конструктивных характеристиках.

Расчётные методы исследования интенсификации теплообмена при турбулентном течении в трубах разработаны ещё недостаточно.

Чаще всего эти методы опираются на упрощённые модели сложных физических явлений, при этом допущения приводят к значительной разнице

между расчётными и экспериментальными данными.

Экспериментальные данные по теплообмену справедливы только для определённого вида течений и типоразмеров турбулизаторов, на которых были проведены опытные исследования.

В связи с этим необходима разработка новых, более точных, чем существующие теоретических методов исследования интенсификации теплообмена при турбулентном течении в трубах.

В рамках данного исследования под интенсификацией теплообмена понимаются применение искусственных турбулизаторов потока на поверхности, а также шероховатые поверхности [1, 2]. Модель предполагает двумерную шероховатость. Рассматриваются двумерные поверхности с турбулизаторами, которые применимы и для труб с периодическими диафрагмами.

2. Модель интенсификации теплообмена

Теплообмен при течении в каналах теплоносителей с постоянными теплофизическими свойствами в условиях интенсификации теплообмена моделируется четырёхслойной схемой турбулентного потока.

Впервые подобная схема расчёта теплообмена была использована в работах [3—5], а затем существенным образом усложнена в работах [6—8].

Применим данную модель расчёта теплообмена при турбулентном течении в каналах в условиях интенсификации теплообмена без применения

дополнительных допущений, сделанных как в работах [3—5], так и в работах [6—8].

Теперь следует перейти к непосредственному рассмотрению каждого из подслоёв.

1. Вязкий подслой.

Вязкий подслой располагается в следующей окрестности: $R \in \left[1 - \frac{\eta_1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}}; 1 \right]$, где

R — безразмерный радиус трубы (отношение расстояния от оси трубы r к радиусу трубы R_0); $\eta_1 = 5$ — постоянная, характеризующая безразмерную толщину вязкого подслоя [9], ξ — коэффициент сопротивления трению.

Влияние шероховатости поверхности между турбулизаторами для труб с поверхностными турбулизаторами потока моделируется следующим образом. Все вышеприведенные рассуждения справедливы только при условии, что термическое сопротивление пространства шероховатости настолько мало, что им можно пренебречь. В том случае, когда оно относительно велико, его следует использовать при расчёте теплообмена по четырёхслойной модели турбулентного пограничного слоя. Учёт термического сопротивления слоя шероховатости будем производить с использованием гипотезы о том, что течение теплоносителя в пространстве между элементами шероховатости считается ламинарным. Следовательно, слой шероховатости будет дополнительным ламинарным подслоем высотой, равным высоте шероховатости. В этом качестве может быть принят, например, параметр

шероховатости R_z . Величина дополнительного вязкого (ламинарного) подслоя будет следующей ($\delta_{ш}/R_0$) — относительная высота шероховатости ($\delta_{ш}$ — высота шероховатости; R_0 — внутренний радиус трубы). В последнем случае вязкий подслоя будет располагаться в следующей окрестности:

$$R \in \left[1 - \frac{\eta_1}{\text{Re} \sqrt{\frac{32}{\xi}} - \frac{\delta_{ш}}{R_0}}; 1 \right].$$

В области вязкого подслоя принимается, что:

$$\frac{\mu_T}{\mu} = \beta \frac{\eta^3}{\eta_1^2} = \frac{\beta}{\eta_1^2} \text{Re}^3 (1-R)^3 \left(\frac{\xi}{32} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad (1)$$

$$\frac{w_x}{w_x} = \frac{\xi}{16} \text{Re} (1-R), \quad (2)$$

где $\frac{\mu_T}{\mu}$ — отношение турбулентной и молекулярной динамических вязкостей;

$\frac{w_x}{w_x}$ — отношение аксиальной составляющей скорости к среднерасходной;

$\eta = (1-R) \text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}}$ — безразмерная координата; β — постоянная в законе

"третьей степени": $\frac{\mu_T}{\mu} = \frac{\beta}{\eta_1^2} \eta^3$ [9].

Перепад температур в вязком подслое при больших числах Прандтля моделируется на основании закона "четвертой степени", точнее описывающий соответствующий процесс, чем закон "третьей степени", используемый для малых числах Прандтля [3—9]:

$$\frac{\mu_T}{\mu} = \beta_1 \frac{\eta^4}{\eta_1^3} = \frac{\beta_1}{\eta_1^3} \text{Re}^4 (1-R)^4 \left(\frac{\xi}{32} \right)^2, \quad (3)$$

β_1 — постоянная в законе "четвертой степени": $\frac{\mu_T}{\mu} = \frac{\beta_1}{\eta_1^3} \eta^4$ [9].

2. Промежуточный подслой.

Промежуточный подслой располагается в следующей окрестности:

$R \in \left[1 - \frac{\eta_2}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}}; 1 - \frac{\eta_1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}} \right]$, где $\eta_2 = 30$ [9]. При учёте шероховатости поверхности

между турбулизаторами: $R \in \left[1 - \frac{\eta_2}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}}; 1 - \frac{\eta_1}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}} - \frac{\delta_{\text{III}}}{R_0} \right]$.

В области промежуточного подслоя принимается, что:

$$\frac{\mu_T}{\mu} = \frac{\eta}{5} - 1 = \frac{\text{Re}}{5} (1 - R) \sqrt{\frac{\xi}{32}} - 1; \quad (4)$$

$$\frac{w_x}{w_x} = 5 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left[1 + \ln \left(\frac{\eta}{5} \right) \right] = 5 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left\{ 1 + \ln \left(\frac{\text{Re}}{5} (1 - R) \sqrt{\frac{\xi}{32}} \right) \right\}. \quad (5)$$

3. Вихревое ядро во впадине.

Вихревое ядро во впадине располагается в следующей окрестности:

$R \in \left[1 - \frac{h}{R_0}; 1 - \frac{\eta_2}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}} \right]$, где h — высота турбулизатора.

В области вихревого ядра во впадине принимается:

$$\frac{\mu_T}{\mu} = \frac{2}{5} \text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \left(1 - \frac{h}{R_0} \right) \frac{h}{R_0}; \quad (6)$$

$$\frac{w_x}{w_x} = \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left\{ 5,5 + 2,5 \ln \left[\frac{R_0}{h} (1 - R) \right] \right\}, \quad (7)$$

4. Турбулентное ядро.

Турбулентное ядро располагается в следующей окрестности: $R \in \left[0; 1 - \frac{h}{R_0} \right]$.

В области турбулентного ядра принимается:

$$\frac{\mu_T}{\mu} = 0,4 \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}} (1-R)R, \quad (8)$$

$$\frac{w_x}{w_x} = [1,325\sqrt{\xi} + 1] (1-R)^{\sqrt{\xi}}. \quad (9)$$

При относительно больших расстояниях между отдельными турбулизаторами регулярные вихри будут занимать только небольшую часть расстояния между ними.

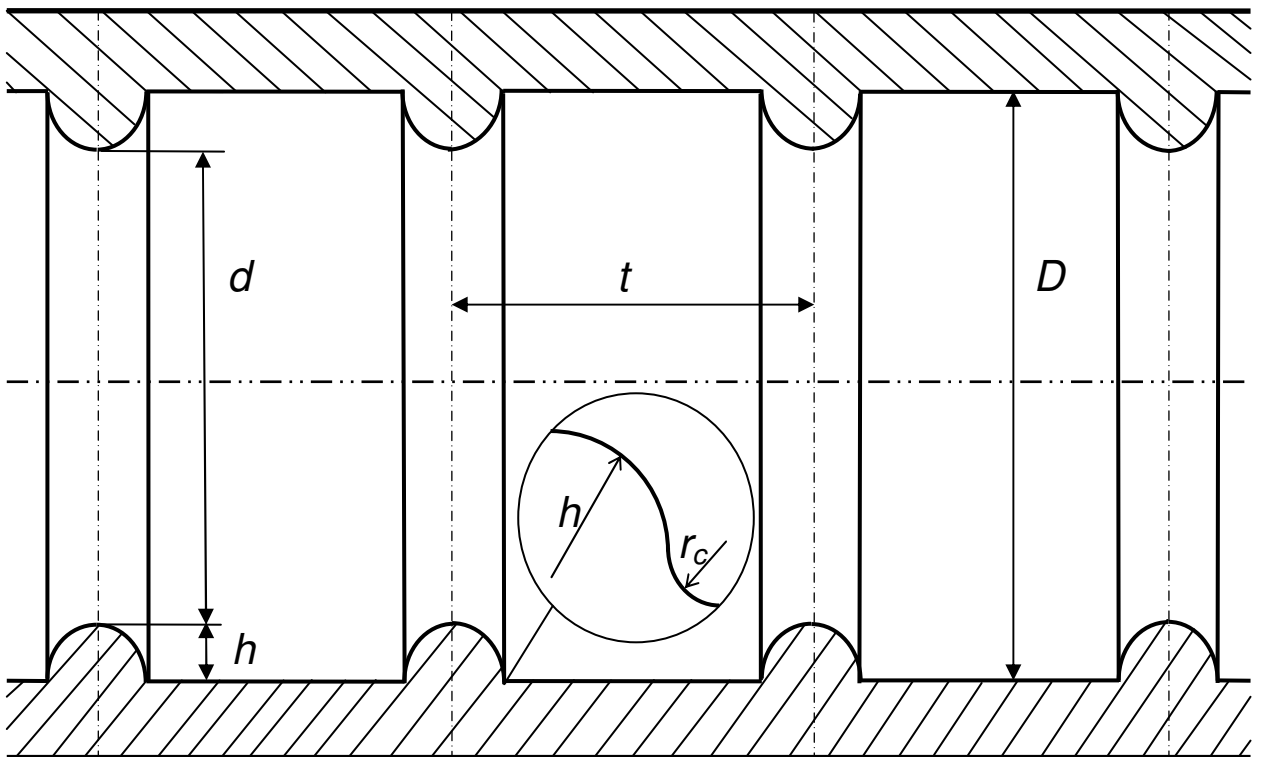


Рис. 1. Разрез прямой круглой трубы с поперечными поверхностно расположенными турбулизаторами потока квадратного (верхний рисунок) и полукруглого (нижний рисунок) поперечных сечений.

Поэтому схема с вихревым ядром в этом случае не будет справедливой: в этом случае граница вихревого ядра во впадине будет не линия $y=h$, а линия: $h/R_0 = 30/\text{Re}\sqrt{\xi/32}\sqrt{n}$ ($n=F_{\text{гл}}/F_{\text{ш}}$, $F_{\text{ш}}$ — полная площадь поверхности с турбулизаторами; $F_{\text{гл}}$ — площадь поверхности гладкой трубы того же диаметра).

Площадь трубы с турбулизаторами полукруглого поперечного сечения:

Следовательно, когда высота турбулизаторов меньше толщины промежуточной области, т.е. в случае $h/R_0 \leq 30/\text{Re}\sqrt{\xi/32}\sqrt{n}$, имеет место элиминирование вихревого ядра во впадине.

Моделирование увеличения поверхности теплосъёма будет производиться с посредством представления трубы с полукруглыми турбулизаторами (рис. 1).

Площадь кладкой поверхности трубы:

$$F_{\text{глТ}} = \pi D t \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}, \quad (10)$$

где D — внутренний диаметр трубы с турбулизаторами; t — базовая длина, соответствующая шагу между турбулизаторами.

$$F_T = \pi h \pi D + \pi D(t - 2h), \quad (11)$$

где h — высота турбулизаторов.

Моделирование увеличения поверхности теплосъёма, если в углах полукруглых турбулизаторов имеют место скругления радиусом r_c , будет производиться нижеследующим образом:

$$F_T^{r_c} = \pi Dh(\pi - 2\arcsin(r_c/h)) + \pi(r_c/h) + \pi Dh\left(\frac{t}{h} - 2(r_c/h) - 2\sqrt{1 - (r_c/h)^2}\right). \quad (12)$$

Очевидно, что:

$$F_T = \lim_{r_c \rightarrow 0} F_T^{r_c} = F_T^{(r_c=0)}. \quad (13)$$

Поделив (2) на (1), получим:

$$\frac{F_T}{F_{г\pi T}} = 1 + \frac{(1-d/D)}{(t/D)}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{(1-d/D)}{(t/D)}(\pi - 2), \quad (14)$$

где d — диаметр трубы с турбулизаторами, измеренный по турбулизаторам.

Для труб с турбулизаторами со скруглениями радиусом r_c , аналогичный результат будет следующим:

$$\begin{aligned} \frac{F_T^{r_c}}{F_{г\pi T}} &= 1 + (h/t)\left(\pi - 2\arcsin(r_c/h)\right) + (r_c/h)(\pi - 2) - 2\sqrt{1 - (r_c/h)^2} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{(1-d/D)}{(t/D)}\left(\pi - 2\arcsin(r_c/h)\right) + (r_c/h)(\pi - 2) - 2\sqrt{1 - (r_c/h)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Формально результат, полученный в (14), можно получить и для труб с поперечными кольцевыми канавками (рис. 2) полукруглого поперечного сечения:

$$\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{глк}}} = \frac{\pi d_1 \pi t + \pi d_1 (t - 2h)}{\pi d_1 t} = 1 + (h/t)(\pi - 2) = 1 + \frac{1}{(t/d_1)} (1 - d_1/D_1) \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right), \quad (16)$$

где d_1 — внутренний диаметр трубы с канавками; D_1 — диаметр, измеренный по канавкам.

Можно привести последнее выражение (16) в виду выражения (14), поскольку: $d_1 = D = d + 2h$ и $D_1 = D + 2h = d + 4h$:

$$\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{глк}}} = 1 + \frac{(2 - d/D)}{(t/D)} \left(1 - \frac{1}{(2 - d/D)} \right) \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 1 + \frac{1}{(t/D)} (1 - d/D) \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \quad (17)$$

Аналогичные результаты получаются для труб с поперечными кольцевыми канавками со скруглениями радиусом r_c .

Следовательно, относительные величины для труб с полукруглыми турбулизаторами $\frac{F_{\text{Т}}}{F_{\text{глТ}}}$ и полукруглыми кольцевыми канавками $\frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{глк}}}$ полностью идентичны.

На рис. 2 показано сравнение полученных теоретических данных по $\frac{F_T}{F_{гТ}}$ и $\frac{F_T^c}{F_{гТ}}$ при $r_c=0,15$ с опытными данными, приведёнными в [1, 2], из которого видна хорошая корреляция между ними, а учёт радиуса скругления делает результаты расчёта и эксперимента почти идентичными. Учёт радиуса скругления уточняет расчётные данные максимум на $(5\div 6)\%$.

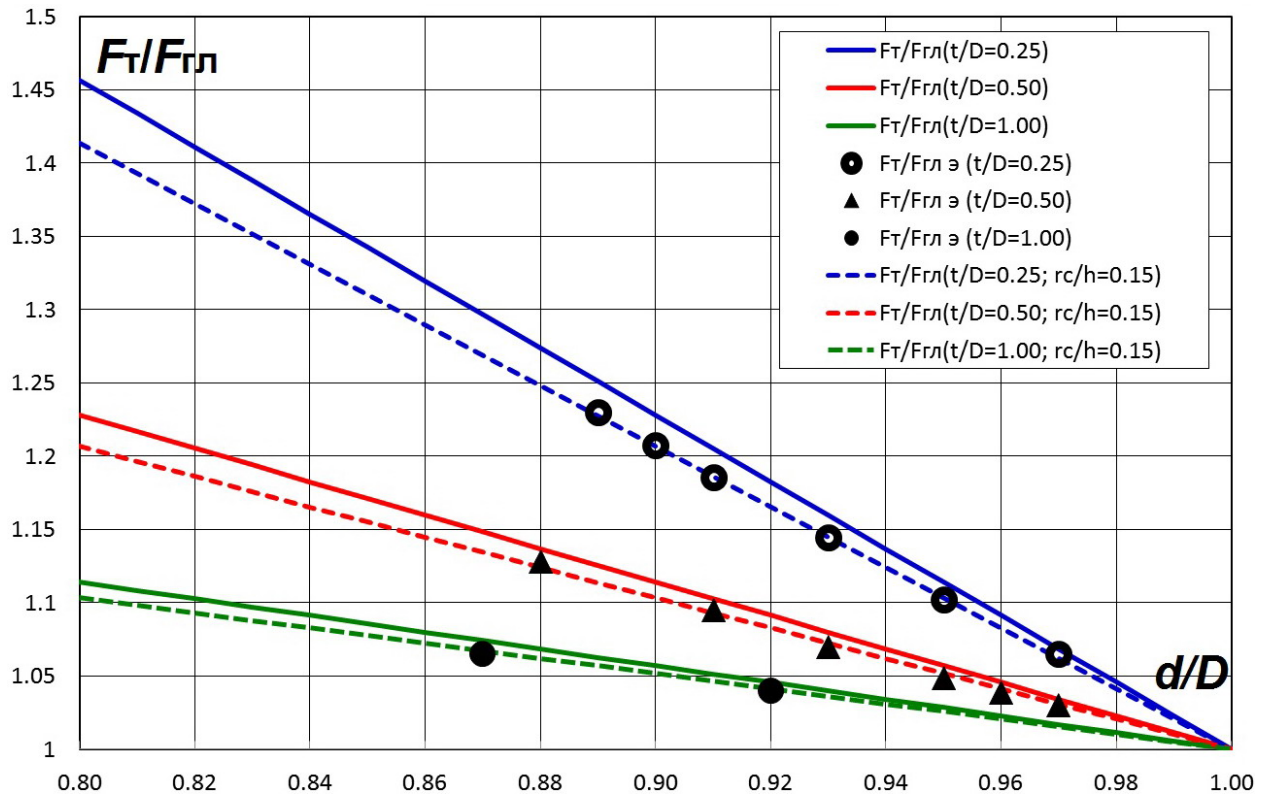


Рис. 2. Расчётные и опытные значения параметров теплопередающей поверхности в зависимости от высоты и шага диафрагм в накатанных трубах (линии — расчёт; точки — эксперимент [1, 2]).

Таким образом, имеет место теоретическое решение задачи о влиянии увеличения поверхности при применении искусственных турбулизаторов потока полукруглого поперечного сечения в трубах на эффект увеличения теплоотдачи, которое необходимо применять для сопоставления при прочих равных условиях результатов по теплоотдаче в трубах с турбулизаторами с теплоотдачей в гладких трубах.

Для последнего случая было получено своё решение задачи об интенсифицированном теплообмене в трубах с периодически расположенными поверхностными турбулизаторами потока, которое расширяет возможности сгенерированной модели.

3. Точное решение задачи об интенсифицированном теплообмене при турбулентном течении в круглых трубах с применением четырёхслойной схемы турбулентного пограничного слоя

Решение задачи об интенсифицированном теплообмене в данной работе получается с помощью интеграла Лайона:

$$\text{Nu} = 2 / \left(\int_0^1 \frac{R^3}{1 + \frac{\text{Pr} \mu_T}{\text{Pr}_T \mu}} dR \right), \quad (18)$$

где $\frac{Pr}{Pr_T}$ — отношение молекулярного и турбулентного чисел Прандтля.

В отличие от предыдущих работ ([3—5], а также [6—8]) в рамках данной работы не используется дополнительного допущения о том, что максимальный и средний температурные напоры при интенсифицированном теплообмене соотносятся так же, как и в случае гладкой трубы, т.е. соотношением

$$\frac{T_w - T_m}{T_w - \bar{T}} = 1 + \frac{1,75}{Pr+8} \quad (T_w \text{ — температура стенки; } T_m \text{ — максимальная температура}$$

потока; \bar{T} — среднемассовая температура потока).

Данное допущение является довольно приблизительным, поскольку деформация температурного поля при интенсификации теплообмена довольно значительна.

Количественные соотношения, подтверждающие вышеуказанный вывод, приведены в работе [6].

В рамках данной работы удалось избежать этого допущения, поскольку интегрирование производится по безразмерному радиусу, в то время как в работах [3—8] — по безразмерной высоте.

Точные решения задачи об интенсифицированном теплообмене выглядят следующим образом:

$$Nu = \frac{2}{\sum_{i=1}^4 I_i} \nabla \frac{h}{R_0} > \frac{30}{Re \sqrt{\frac{\xi}{32}}}; \quad (19)$$

$$I_1 = -\frac{1}{6} \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\xi}{32} \right)^{-2} \text{Re}^{-4} \times$$

$$\times \left\langle 30 \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{1}{3}} + \ln \left[\left(25 - 5 \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{2}{3}} \right) / \left(5 + \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right] \right\rangle \times \quad (20)$$

$$\times \left[3 \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{32} \text{Re}^2 + \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right) \left(\frac{\xi}{32} \right)^{\frac{3}{2}} \text{Re}^3 + 1 \right] - 6 \ln \left(1 + 5 \beta \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right) \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} +$$

$$+ \left[2\sqrt{3} \arctg \left\{ \left[10 \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \right] \left(3 \left(\frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{32} \text{Re}^2 - \frac{\text{Pr} \beta}{\text{Pr}_T 25} \left(\frac{\xi}{32} \right)^{\frac{3}{2}} \text{Re}^3 - 1 \right) \right];$$

$$I_2 = \frac{10 \text{Pr}_T (\sqrt{2\xi} \text{Pr} \text{Re} + 40 \text{Pr}_T - 40 \text{Pr})^3}{\text{Pr}^4 \xi^2 \text{Re}^4} \ln \left(1 + 5 \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right) - \frac{3125}{6} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^{-3} \times$$

$$\times \left(\frac{\xi}{32} \right)^{-2} \text{Re}^4 \left[86 \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^2 - \frac{63}{5} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^2 \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} + \frac{9}{400} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^2 \xi \text{Re}^2 - \right. \quad (21)$$

$$\left. - 21 \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} + \frac{18}{5} \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} + 6 \left(1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^2 \right];$$

$$I_3 = \frac{\left(\frac{h}{R_0} - \frac{30}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}} \right) \left(2 - \frac{h}{R_0} - \frac{30}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}} \right) \left[\left(1 - \frac{30}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\xi}} \right)^2 + \left(1 - \frac{h}{R_0} \right)^2 \right]}{4 \left[1 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \left(1 - \frac{h}{R_0} \right) \frac{h}{R_0} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right]}; \quad (22)$$

$$I_4 = \frac{-100}{\xi \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^2 \text{Re}^2} \left\{ \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \left(1 - \frac{h}{R_0} \right) \left(3 - \frac{h}{R_0} \right) + \left(1 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \ln \left[-1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \left(1 - \frac{h}{R_0} \right) \frac{h}{R_0} \right] \right\} + 5\pi \left\langle \frac{20 \text{Pr}_T^2}{\xi \text{Re}^2 \text{Pr}^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\xi} \text{Re} \text{Pr}} \right\rangle i +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \text{Arth} \left[\frac{\sqrt{\frac{2}{5} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \sqrt[4]{\frac{\xi}{32}}} \frac{1 - 2 \frac{h}{R_0}}{\sqrt{4 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}}}{\sqrt{4 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}} \right] + \text{Arth} \left[\frac{\sqrt{\frac{2}{5} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \sqrt[4]{\frac{\xi}{32}}}}{\sqrt{4 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}} \right] \right\} \times \\
& \times \frac{3 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}{\left(\frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}}; \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\text{Nu} = \frac{2}{\sum_{j=1}^3 I'_j} \nabla \frac{h}{R_0} \leq \frac{30}{\text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}}}; \tag{24}$$

$$I'_i = I_i \quad \forall i = 1, 2; \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
I'_3 &= \frac{-100}{\xi \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^2 \text{Re}^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{6}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \left(1 - \sqrt{\frac{32}{\xi} \frac{30}{\text{Re}}} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{32}{\xi} \frac{10}{\text{Re}}} \right) + \left(1 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right) \times \right. \\
& \times \left. \ln \left[-1 - 12 \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \left(1 - \sqrt{\frac{32}{\xi} \frac{30}{\text{Re}}} \right) \right] \right\} + 5\pi \left\langle \frac{20 \text{Pr}_T^2}{\xi \text{Re}^2 \text{Pr}^2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\xi} \text{Re} \text{Pr}} \right\rangle i + \\
& + \left\{ \text{Arth} \left[\frac{\sqrt{\frac{2}{5} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \sqrt[4]{\frac{\xi}{32}}} \frac{1 - \sqrt{\frac{32}{\xi} \frac{60}{\text{Re}}}}{\sqrt{4 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}} \right] + \text{Arth} \left[\frac{\sqrt{\frac{2}{5} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \sqrt[4]{\frac{\xi}{32}}}}{\sqrt{4 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}} \right] \right\} \times \\
& \times \frac{3 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}{\left(\frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \text{Re} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}}}. \tag{26}
\end{aligned}$$

Для больших числах Прандтля при моделировании на основании закона

"четвертой степени" решения будут отличаться лишь значениями интеграла I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{64000\sqrt{2}\sqrt[4]{5^3}}{\text{Re}^5 \xi \sqrt{\xi} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1}} \left\langle \frac{\sqrt{2}}{128000} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1 \text{Re}^4 \xi^2 \ln \left(\frac{\sqrt{5} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} + \sqrt[4]{5} \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} + 1}{\sqrt{5} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} - \sqrt[4]{5} \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} + 1} \right) - \right. \\
& - \frac{\sqrt[4]{5} \sqrt{2}}{20 \sqrt{\xi} \text{Re}} \ln \left(1 - 5 \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1 \right) \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} + \\
& + \frac{\sqrt{2}}{64000} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1 \text{Re}^4 \xi^2 \left[\arctg \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt[4]{125}} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} + 1 \right) + \arctg \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt[4]{125}} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} - 1 \right) \right] - \\
& - \frac{3\sqrt{2}\sqrt[4]{5^3}}{8000} \sqrt[4]{\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1 \right)^3} \text{Re}^3 \xi \sqrt{\xi} \arctg \left(\sqrt{5} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} \right) + \\
& + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{5}}{800} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} \text{Re}^2 \xi \ln \left(\frac{-\sqrt{5} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} + \sqrt[4]{5} \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} - 1}{-\sqrt{5} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} - \sqrt[4]{5} \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} - 1} \right) + \\
& + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{5}}{400} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} \text{Re}^2 \xi \left[\arctg \left(\sqrt[4]{5} \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} + 1 \right) + \arctg \left(\sqrt[4]{5} \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \beta_1} - 1 \right) \right] \left. \right\rangle. \tag{27}
\end{aligned}$$

При превышении высоты турбулизатора толщины пристенного слоя, происходит дополнительная турбулизация только области ядра потока, в которой турбулентный перенос и без того велик, а тепловой поток невелик.

Поэтому теплоотдача увеличивается незначительно, особенно с увеличением числа Прандтля, а гидравлическое сопротивление сильно возрастает.

Таким образом, моделирование теплообмена в условиях, когда высота турбулизатора h/R_0 превышает толщину пристенного слоя при помощи четырёхслойной схемы турбулентного пограничного слоя сводится к тому, что сопротивление увеличивается только в ядре потока (ξ_{h/R_0}^I интеграл I_4), а в

турбулентном ядре во впадине (интеграл I_3), промежуточном подслое (интеграл I_2) и вязком подслое (интеграл I_1) — остаётся равным сопротивлению, соответствующему высоте турбулизатора, равной пристенному слою $\xi_{(h/R_0)_{\text{ПС}}}$,

где $(h/R_0)_{\text{ПС}}$ — относительная высота пристенного слоя.

Относительная высота пристенного слоя может быть определена, исходя из данных, приведённых в [1—2]:

$$(h/R_0)_{\text{ПС}} = 1150 \cdot \text{Re}^{-0,875} \cdot \text{Pr}^{-0,5}. \quad (28)$$

4. Сравнение точного решения задачи об интенсифицированном теплообмене с существующими решениями и экспериментом

Решения Мигая, согласно [3—5], выглядят следующим образом:

$$\text{Nu}^M = \left(1 + \frac{1,75}{\text{Pr} + 8} \right) \text{Re} \text{Pr} \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left\{ \sqrt{\frac{8}{\xi}} (1,325 \sqrt{\xi} + 1) \left(1 - \frac{h}{R_0} \right)^{\sqrt{\xi}} + \right. \\ \left. + 5 \text{Pr} \left(\frac{1,285}{\text{Pr}^{0,21}} - \frac{0,265}{\text{Pr}^{1,2}} \right) + 5 \ln(5 \text{Pr} + 1) + \frac{\frac{h}{R_0} \text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}} - 30}{\frac{1}{\text{Pr}} + 0,4 \text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \left(1 - \frac{h}{R_0} \right) \frac{h}{R_0}} \right\}^{-1}, \quad (29)$$

$$\forall \frac{h}{R_0} > \frac{30}{\text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}}};$$

$$\begin{aligned} \text{Nu}^M = & \left(1 + \frac{1,75}{\text{Pr} + 8}\right) \text{Re} \text{Pr} \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left\{ \sqrt{\frac{8}{\xi}} (1,325 \sqrt{\xi} + 1) \times \right. \\ & \left. \times \left[1 - \left(\frac{30}{\left(\text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}} \right)} \right)^{\sqrt{\xi}} \right] + 5 \text{Pr} \left(\frac{1,285}{\text{Pr}^{0,21}} - \frac{0,265}{\text{Pr}^{1,2}} \right) + 5 \ln(5 \text{Pr} + 1) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\forall \frac{h}{R_0} \leq \frac{30}{\text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}}}.$$

Очевидно, что точные решения задачи об интенсифицированном теплообмене, представленные в рамках данной работы, гораздо сложнее, чем решения Мигая, что является единственным недостатком первых по отношению к последним. Сравнение результатов расчёта по точным решениям и по решениям Мигая необходимо проводить, сравнивая оба этих решения не только между собой, но и с имеющимися экспериментальными данными.

В работах [15—20] приведены отношения чисел Нуссельта, рассчитанных по точным решениям Nu , к соответствующим числам Нуссельта, рассчитанных по формулам Мигая Nu^M , в зависимости от числа Рейнольдса при различных числах Прандтля при следующих геометрических параметрах турбулизаторов: $t/D=1$; $d/D=0,90$ (t — расстояние между турбулизаторами; d — внутренний диаметр кольцевых канавок; D — внутренний диаметр трубы), где показано, что решение Мигая даёт заниженные результаты относительно точного решения для низких значений числа Прандтля и завышенные для высоких во всём диапазоне чисел Рейнольдса. Для более высоких чисел Рейнольдса это расхождение выше при высоких числах Прандтля и ниже — при низких.

Анализ результатов расчётов по точным формулам и по формулам Мигая в зависимости от числа Рейнольдса при прочих равных условиях показывает, что их расхождение может быть довольно значительным — порядка (10÷15)%. Там же ([15—20]) приводятся отношения чисел Нуссельта, рассчитанных по точным решениям Nu , к соответствующим числам Нуссельта, рассчитанных по формулам Мигая Nu^M , в зависимости от относительного диаметра трубы с турбулизаторами d/D при различных числах Прандтля при относительном шаге между турбулизаторами $t/D=1$ и числе Рейнольдса $Re=10^4$, которые доказывают, что решение Мигая даёт заниженные результаты относительно точного решения для низких значений числа Прандтля и завышенные для высоких во всём диапазоне относительных диаметров для труб с турбулизаторами. Для более высоких относительных высот турбулизаторов это расхождение выше при высоких числах Прандтля и ниже — при низких. Подробный анализ результатов расчётов по точным формулам и по формулам Мигая в зависимости от относительной высоты между турбулизаторами при прочих равных условиях показывает, что их расхождение может быть довольно значительным — порядка (10÷15)%.

После непосредственного сравнения представленных решений между собой, необходимо сравнить эти решения с существующими экспериментальными данными по теплообмену для труб с периодически расположенными поверхностными турбулизаторами [1—2]. В исследованиях [15—20] представлено сравнение точного решения для интенсифицированного

теплообмена и решения Мигая с экспериментальными данными [1—2] для труб с турбулизаторами при $t/D=1$, $Pr=0,72$, $Re=4 \cdot 10^5$ в зависимости от относительного диаметра труб с турбулизаторами d/D , где доказывається, что точное решение гораздо лучше соответствует существующим экспериментальным данным во всём диапазоне d/D . Кроме этого в [15—20] представлено аналогичное сравнение, но для при $t/D=1$, $d/D=1$, $Pr=0,72$ и в зависимости от числа Рейнольдса, из которого видно, что точное решение гораздо лучше соответствует существующим экспериментальным данным почти во всём диапазоне чисел Рейнольдса.

В работах [21, 22] приводятся расчётные данные, базирующиеся на данной модели, по относительному теплообмену $Nu_{\text{БШ}}/Nu_{\text{СШ}}$, ($Nu_{\text{БШ}}$, $Nu_{\text{СШ}}$ — числа Нуссельта для труб с турбулизаторами без шероховатости и с шероховатостью соответственно) для шероховатых труб с турбулизаторами с $d/D=0,90$ и $t/D=1$ при $Pr=0,72$ и $Pr=7$ в зависимости от числа Рейнольдса $Re=10^4 \div 10^9$. Расчёты позволили сделать вывод, что относительный теплообмен $Nu_{\text{БШ}}/Nu_{\text{СШ}}$ для шероховатых труб с турбулизаторами при увеличении числа Рейнольдса с $Re=10^4$ до $Re=10^6$ увеличивается с 1,150 до 1,313 при $Pr=0,72$ и с 1,146 до 1,24 при $Pr=7$ соответственно. В дальнейшем при увеличении $Re=10^6 \div 10^9$, численное значение относительного теплообмена $Nu_{\text{БШ}}/Nu_{\text{СШ}}$ стабилизируется. Следовательно, влияние шероховатости в пространстве между турбулизаторами для круглых труб с турбулизаторами на относительный теплообмен может быть довольно значительным: порядка (15÷30)% — для

газов и $(14\div 24)\%$ – для жидкостей.

Подробное расчётное исследование теплообмена в трубах с турбулизаторами посредством точного решения задачи о теплообмене и посредством решений Мигая в диапазоне геометрических параметров турбулизаторов и режимов течения, приведённом в экспериментальном материале [1—2], показывает, что средняя погрешность расчёта по точными решениям, приведённым в рамках данного исследования, по отношению к эксперименту составляет порядка 5%, в то время как формулы Мигая дают погрешность в среднем более 10%. Следовательно, точные решения, полученные в данной работе, гораздо качественнее описывают имеющийся экспериментальный материал, чем существующие решения. Применение точных решений можно считать оправданным, несмотря на их относительную сложность.

5. Основные выводы

Резюмируя полученные данные, можно сказать, что в рамках данной работы разработана теоретическая модель для расчёта теплообмена при турбулентном течении в каналах в условиях интенсификации теплообмена, отличающаяся от известных моделей более высокой точностью, отсутствием дополнительных допущений, учётом большего числа параметров (в т.ч., учёт шероховатости в пространстве между турбулизаторами), оказывающих влияние

на процесс интенсифицированного теплообмена.

Существующие решения могут быть охарактеризованы как частный случай этих точных решений; точные решения являются более сложными по отношению к существующим решениям.

Влияние шероховатости в пространстве между турбулизаторами для круглых труб с турбулизаторами на относительный теплообмен может быть довольно значительным: порядка $(15\div 30)\%$ — для газов и $(14\div 24)\%$ — для жидкостей.

Получены точные решения задачи об интенсифицированном теплообмене для данной постановки задачи.

Полученные расчётные данные по интенсифицированному теплообмену хорошо соответствуют существующим экспериментальным данным, имея гораздо меньшую погрешность по отношению к последним, чем существующие решения [6—8], являясь продолжением перспективного теоретического направления, сделанного в [10—14].

Список использованных источников

1. Эффективные поверхности теплообмена / Э.К.Калинин, Г.А. Дрейцер, И.З.Копп и др. М.: Энергоатомиздат, 1998. 408 с.
2. Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А. Интенсификация теплообмена в

каналах. М.: Машиностроение, 1990. 208 с.

3. Мигай В.К. Интенсификация конвективного теплообмена в трубах и каналах теплообменного оборудования: Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук. Л., 1973. Т. 1. 327 с.; Т. 2. 85 с.

4. Мигай В.К. Повышение эффективности современных теплообменников. Л.: Энергия. Ленинградское отделение, 1980. 144 с.

5. Мигай В.К. Моделирование теплообменного энергетического оборудования. Л.: Энергоатомиздат. Ленинградское отделение, 1987. 263 с.

6. Дрейцер Г.А., Лобанов И.Е. Моделирование изотермического теплообмена при турбулентном течении в каналах в условиях интенсификации теплообмена // Теплоэнергетика. 2003. № 1. С. 54—60.

7. Лобанов И.Е. Моделирование теплообмена и сопротивления при турбулентном течении в каналах теплоносителей в условиях интенсификации теплообмена // Труды Третьей Российской национальной конференции по теплообмену. В 8 томах. Т. 6. Интенсификация теплообмена. Радиационный и сложный теплообмен. М.: МЭИ, 2002. С. 140—143.

8. Лобанов И.Е. Математическое моделирование интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в каналах: Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук. М., 2005. 632 с.

9. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.

10. Лобанов И.Е. Теория интенсифицированного теплообмена при

турбулентном течении в каналах на основе четырёхслойной схемы турбулентного пограничного слоя для относительно высоких турбулизаторов потока // Актуальные проблемы современной науки. 2010. № 6. С. 248—252.

11. Лобанов И.Е. Теория интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в каналах на базе четырёхслойной схемы турбулентного пограничного слоя // Современные проблемы науки и образования. 2010. № 3. С. 81—89.

12. Лобанов И.Е. Общая теория интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в круглых трубах с высокими турбулизаторами на базе четырёхслойной модели турбулентного пограничного слоя // Московское научное обозрение. 2011. № 10. С. 10—15.

13. Лобанов И.Е., Низовитин А.А. Математическое моделирование интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в круглых трубах с турбулизаторами с применением четырёхслойной модели турбулентного пограничного слоя // Труды Пятой Российской национальной конференции по теплообмену. В 8 томах. Том 2. Вынужденная конвекция однофазной жидкости. М.: МЭИ, 2010. С. 158—161.

14. Лобанов И.Е., Штейн Л.М. Математическое моделирование интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в трубах с турбулизаторами для теплообменников современного металлургического производства с применением четырёхслойной модели турбулентного пограничного слоя // Техника и технология. 2010. № 3. С. 67—77.

15. Лобанов И.Е. Математическое моделирование интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в круглых трубах с очень высокими турбулизаторами с применением четырёхслойной модели турбулентного пограничного слоя для широкого диапазона чисел Рейнольдса и Прандтля // Актуальные проблемы российской космонавтики: Материалы XXXVIII Академических чтений по космонавтике. Москва, январь–февраль 2014 г. / Под общей редакцией А.К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2014. С. 182—183.

16. Лобанов И.Е. Теория интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в круглых трубах с очень высокими турбулизаторами с применением четырёхслойной модели турбулентного пограничного слоя для широкого диапазона чисел Рейнольдса и Прандтля // 14-я Международная конференция "Авиация и космонавтика – 2015". 16–20 ноября 2015 года. Москва. Тезисы. — М.: Типография "Люксор", 2015. С. 131—133.

17. Лобанов И.Е. Общая теория интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в круглых трубах с турбулизаторами с применением четырёхслойной модели турбулентного пограничного слоя // Авиакосмическое приборостроение. 2011. № 5. С. 25—32.

18. Лобанов И.Е. Модифицированная четырёхслойная модель турбулентного пограничного слоя как основа моделирования интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в прямых круглых трубах с турбулизаторами // Веб-портал профессионального сетевого педагогического

сообщества "Ped-library.ru". 2019. Режим доступа: <https://ped-library.ru/1569776943>.

19. Лобанов И.Е. Обобщённая четырёхслойная модель турбулентной теплоотдачи в трубах с диафрагмами // Сетевое издание "Международный педагогический портал «Солнечный свет»". 2022. Режим доступа: <https://solncesvet.ru/opublikovannyye-materialyi/obobshchennaya-chetyreh-sloynnaya-model-tu.789653>.

20. Лобанов И.Е. Аналитическая теория теплообмена в прямых круглых трубах с турбулизаторами при турбулентном течении на базе модифицированной 4-х-слойной модели турбулентного пограничного слоя // Электронный периодический рецензируемый научный журнал "SCI-ARTICLE.RU". 2019. № 76 (декабрь). С. 56—71.

21. Лобанов И.Е. Математическое моделирование влияния шероховатости для труб с турбулизаторами на интенсификацию теплообмена при турбулентном течении при высоких числах Рейнольдса // Восьмая международная конференция "Авиация и космонавтика — 2009". Тезисы докладов. М.: Изд. МАИ—ПРИНТ, 2009. С. 121—122.

22. Лобанов И.Е. Математическое моделирование интенсифицированного теплообмена в трубах с турбулизаторами при турбулентном течении при высоких числах Рейнольдса // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. — 2017. Т. 21. № 4 (78). С. 69—77.