ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ — БАКАЛАВРИАТ
серия основана в 1996 г.

А.В. МИЩЕНКО

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ЛОГИСТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

3-е издание, исправленное и дополненное

*Рекомендовано
Межрегиональным учебно-методическим советом
профессионального образования в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент»
(квалификация (степень) «бакалавр») (протокол № 8 от 20.10.2021)*

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Москва
ИНФРА-М
2022

УДК 330+658.7(075.8)
ББК 65.2/4-56я73
М57

Рецензенты:

Сергеев В.И., доктор экономических наук, профессор, профессор Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Омельченко И.Н., доктор экономических наук, профессор, профессор Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана

Мищенко А.В.

М57 Оптимизационные модели управления инвестициями в логистике : учебное пособие / А.В. Мищенко. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 388 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс]. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1839692.

ISBN 978-5-16-017277-4 (print)
ISBN 978-5-16-109817-2 (online)

Учебное пособие посвящено планированию и моделированию инвестиционных проектов развития логистической инфраструктуры и управления цепями поставок. Представлены как теоретические модели управления инвестициями в логистике, так и практические примеры использования предлагаемой методологии при выборе оптимальных производственных программ предприятия, управлении оптовыми закупками торговых фирм, анализе эффективности проектов создания складской инфраструктуры, управлении оборотным капиталом при проведении закупок материальных ресурсов в промышленной логистике.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области логистики и управления цепями поставок.

УДК 330+658.7(075.8)
ББК 65.2/4-56я73

ISBN 978-5-16-017277-4 (print)
ISBN 978-5-16-109817-2 (online)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современной экономике понятие «логистика» часто воспринимается как наука об управлении материальными, информационными, финансовыми и сервисными потоками.

Предметом исследования логистики, по мнению многих авторов, является оптимизация управления ограниченными ресурсами в определенной экономической системе, связанной с выпуском, распределением и реализацией конечной продукции. Логистика — сравнительно молодая наука, ее возникновение насчитывает всего несколько десятилетий. В связи с этим ее понятийный аппарат и терминология в ходе становления рыночных отношений постоянно развиваются и уточняются. Развиваются и постоянно совершенствуются также количественные методы анализа логистических систем.

Количественные методы применяются для повышения эффективности логистических систем и цепей поставок, что обусловлено следующими причинами:

- использование логистической концепции практически всеми фирмами, занимающимися производством или распределением готовой продукции;
- бурный рост в области информационных технологий, позволяющий оперативно обрабатывать большие объемы данных в системе планирования и управления предприятием;
- осознание того факта, что необходимо более полно использовать информационные ресурсы и технологии в ходе выработки управленческих решений при производстве и реализации выпускаемой предприятием продукции.

В настоящее время существует определенный дефицит публикаций, посвященных оптимизации решений в области управления финансовыми и инвестиционными ресурсами в логистике. Появление данной книги связано с попыткой преодолеть этот недостаток и предложить руководителям-практикам, студентам и аспирантам, специализирующимся по направлению «Логистика и управление цепями поставок», инструментарий для анализа эффективности управления инвестициями в области логистики и управления цепями поставок.

Материал подготовлен на основе читаемых автором курсов «Управление инвестициями в логистике» и «Управление проектами в логистике» в НИУ ВШЭ и МЦЛ НИУ ВШЭ, а также курса «Инвестиционный менеджмент», читаемого в МГТУ им. Н.Э. Баумана. Книга состоит из трех разделов и заключения.

В **первом разделе** приведены модели управления инвестиционными ресурсами в промышленной логистике, рассмотрены принципы управления основным и оборотным капиталом предприятия в условиях рыночной среды на основе баланса интересов предприятия и потребителей выпускаемой продукции. Сформулированы оптимизационные модели управления оборотным капиталом промышленного предприятия. Представлены как детерминированные оптимизационные модели, так и модели управления финансовыми ресурсами в условиях неопределенности и риска, предложены расчеты по определению оптимальных решений на примере реальных данных производственного предприятия. Рассмотрены методы оптимизации управления финансовыми ресурсами при реализации проектов расширения и перепрофилирования предприятий, а также динамические модели оптимизации структуры активной части основных фондов в логистике производства. Автором предложены методы и модели оптимизации управления инвестиционными ресурсами при создании нового промышленного предприятия.

Необходимо отметить, что для оценки эффективности долгосрочных капиталовложений существует несколько традиционных критериев: прежде всего чистая приведенная стоимость проекта (NPV), внутренняя ставка доходности (IRR), индекс рентабельности (PI), срок окупаемости (PP) и др. При расчете каждого из этих показателей используются дисконтированные притоки и оттоки денежных средств в течение нескольких временны́х периодов. Эти денежные потоки *однозначно* определяются, когда речь идет о капиталовложениях в предприятие, выпускающее о д и н вид продукции. Если же предприятие выпускает н е с к о л ь к о видов продукции, используя для каждого из них одни и те же виды материально-сырьевых ресурсов и одни и те же машины и оборудование, то определение количества единиц приобретаемого оборудования, производственной программы предприятия, а следовательно, и соответствующих притоков и оттоков денежных средств является во многих случаях задачей, имеющей *неединственное решение*. В условиях ограничений на производственные мощности предприятия, объемы материально-сырьевых ресурсов и рыночного спроса на продукцию необходимо для каждого временно́го периода выбрать такую производственную программу, чтобы при расчете, например, NPV проекта получить наибольшую его величину. Методы решения подобной задачи приведены в настоящей работе.

Во **втором разделе** предложены модели оптимизации эффективности проекта строительства и эксплуатации склада в условиях, когда критерием оптимального выбора параметров склада будут либо его доходность за один период (дисконтирование финансовых потоков склада не учитывается), либо обеспечение наибольшего значения чистой приведенной стоимости проекта (с учетом дисконтирования финансовых потоков). В ситуации, когда решение о выборе параметров проекта принимается в условиях неопределенности и риска, предложено следующее:

- методика оценки устойчивости выбранного проектного решения при локальном изменении параметров проекта;
- методы, обеспечивающие выбор наилучшего проектного решения с точки зрения минимизации риска при ограничении на доходность проекта;
- методы, обеспечивающие выбор проектного решения с максимально ожидаемой доходностью при ограничении на количественную оценку риска проекта.

Особое внимание в этом разделе уделяется методам, позволяющим оптимизировать инвестиционную фазу проекта, используя методы календарного и сетевого планирования. Приведена также методика оценки алгоритмической сложности оптимизационных моделей управления финансовыми ресурсами в системах логистики. Автором предложено определение устойчивости расписания работ рассматриваемого проекта, а также методы определения областей устойчивости для оптимальных планов выполняемых работ.

Третий раздел посвящен анализу эффективности инвестиций при формировании либо финансового портфеля, либо портфеля закупок материальных ресурсов производства, либо портфеля инвестиционных проектов.

Автором рассмотрены как однокритериальные задачи оптимизации дохода портфеля активов, так и двухкритериальные, в которых оценивается наряду с доходностью портфеля его риск.

Изучение материала, изложенного в книге, позволит читателю:

- получить целостное представление о теоретических и методологических основах количественного анализа эффективности управления финансовыми рисками в логистике;
- овладеть навыками проектирования логистических систем в условиях неопределенности внешней среды;

- изучить методы и модели оптимизации логистических функций и операций, выполняемых торговыми и промышленными предприятиями;
- планировать стратегии инвестиционного развития торговых и промышленных предприятий с учетом привлечения различных источников финансирования инвестиционных проектов.

Автор отдает себе отчет, что определенная новизна материала предполагает его дальнейшую доработку и развитие, поэтому с благодарностью отнесется к критике и предложениям по совершенствованию содержания и структуры данного учебного пособия. Книга адресована студентам, аспирантам, а также менеджерам и научным работникам в области стратегического управления логистикой.

Книга подготовлена при финансовой поддержке фонда РФФИ, проект № 16-06-0043а.

Раздел 1
УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ЛОГИСТИКЕ

ГЛАВА 1
ПРОБЛЕМЫ ИНВЕСТИРОВАНИЯ РЕАЛЬНОГО СЕКТОРА ЭКОНОМИКИ

1.1. ИНВЕСТИЦИОННАЯ ПОЛИТИКА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Привлечение инвестиций в реальный сектор экономики России — одна из самых важных задач. От успешности ее решения зависит возможность дальнейшего экономического развития страны. Таким образом, от того, насколько серьезно государство отнесется к данной проблеме, зависит будущее России, так как промышленный сектор — это фундамент всей российской экономики.

В связи с этим **важнейшими направлениями повышения инвестиционной активности** являются следующие:

- вовлечение средств, имеющихся у населения, в инвестиционные проекты;
- создание механизма прямого использования на финансирование инвестиционных проектов части эмиссионных средств ЦБ РФ;
- использование фондового рынка как института инвестиционной активности;
- создание условий для переключения денежных потоков с вывоза средств за рубеж на финансирование инвестиционных программ и проектов внутри страны, а также разработка соответствующих методов;
- формирование благоприятного климата для хозяйствующих субъектов, обеспечивающих большую часть амортизационных отчислений и прибыли;
- увеличение числа и обеспечение нормальной работы крупных многоуровневых и кооперативных объединений (холдингов, финансово-промышленных групп);

- создание благоприятных условий в стране для иностранных инвесторов;
- страхование рисков при осуществлении инвестиционных операций.

Рассмотрим более подробно каждое направление.

1. В последнее время наблюдаются положительные тенденции в части концентрации средств в Сбербанке России за счет *частных вкладов населения*. Этот процесс может стать более интенсивным в результате укрепления курса рубля (до недавнего времени можно было наблюдать значительное укрепление нашей национальной валюты, свидетельство тому — золотовалютные резервы ЦБ РФ, которые на декабрь 2007 г. составляли более 400 млрд долл.) и благодаря надежности работы Сбербанка. Вопрос трансформации огромных средств Сбербанка в инвестирование основного капитала пока не решен. Одним из главных препятствий по-прежнему остаются высокие кредитные ставки. Вопрос может быть решен автоматически, после того как возрастет эффективность экономики страны в целом и будут снижены ставки рефинансирования.

2. Определенная доля *эмиссионных средств* в большинстве стран, в том числе и в России, направляется на финансирование инвестиционных программ и проектов, но существующий механизм этого процесса еще недостаточно эффективен. Особенность финансовой системы нашей страны заключается в том, что деньги постоянно где-то «зависают». Опыт показывает, что эмиссионные средства, переданные в коммерческие банки для целевого использования, не всегда или не в полном объеме находили своего адресата. В связи с этим в России принято правильное решение создавать специализированные банки, которые могло бы контролировать государство: Россельхозбанк, Российский банк развития, Банк Москвы. Это новые институты развития.

3. В Российской Федерации создан и успешно развивается *фондовый рынок*. В странах с развитой экономикой с помощью механизма фондовой торговли в инвестиционные процессы привлекаются огромные средства. Попытки осуществить такую же деятельность в России пока не дали существенных результатов. Из-за действия ряда нежелательных факторов в ближайшее время маловероятно повышение инвестиционной активности в стране в связи с отрицательной динамикой котировок на фондовом рынке.

4. Над *снижением уровня вывоза капитала за рубеж* постоянно работали соответствующие службы в государственном аппарате

управления, но зримых результатов пока нет. Поставлен также вопрос о *возврате уже вывезенного капитала*. Данную проблему можно решить, но нужна, как часто говорят политики, «политическая воля», а также соответствующие действия, однако ни того, ни другого пока не наблюдается.

5. Около 70% от всего объема инвестиций в основной капитал формируется за счет *амортизационных отчислений и прибыли хозяйствующих субъектов*. Имеющиеся у них значительные резервы можно использовать, если создать для хозяйствующих субъектов более приемлемые условия. Речь идет прежде всего о снижении налогов и решении ряда вопросов, обеспечивающих, с одной стороны, доведение объемов оборотных средств до нормативного уровня, а с другой — повышение рентабельности деятельности. В целях снижения налогового бремени принимаются все новые поправки в Налоговый кодекс. Сложнее обстоит дело в части создания благоприятного климата в хозяйствующих субъектах для повышения их рентабельности. По мнению большинства опрошенных руководителей хозяйствующих субъектов, самой весомой причиной низкой рентабельности организаций являются неплатежи, которые приводят к росту как дебиторской, так и кредиторской задолженности. Не следует говорить, что в этом направлении ничего не делается. Принимаются некоторые меры на государственном и муниципальном уровне по предоставлению льгот, которые могут обеспечивать повышение эффективности работы хозяйствующих субъектов. Например, приняты федеральные законы «О государственной поддержке малого предпринимательства в Российской Федерации», «О лизинге», «Об ипотеке». В этих и других законодательных актах устанавливаются льготные условия для различных видов предпринимательской деятельности.

6. Для более эффективной и качественной работы субъектов хозяйствования, а также для финансирования инвестиционных проектов создаются *финансово-промышленные группы с высокой концентрацией финансовых ресурсов*. Разработаны и введены в действие отдельные правовые акты, положения которых направлены на форсирование работы в данной сфере деятельности. Положительным примером может служить создание по межправительственным соглашениям (со странами СНГ) международных финансово-промышленных групп.

7. Для *увеличения объемов иностранных инвестиций* многое делалось в прошлом, но желаемые результаты так и не были достигнуты, несмотря на то что рейтинг России поднялся до инвестицион-

ного уровня. Главная причина неудач — низкая прозрачность бизнеса в России в целом и в отдельных ее субъектах.

8. В рыночных условиях организация, нацеленная на получение наибольшей прибыли, подвержена рискам, хотя в некоторых случаях рисковые ситуации могут возникать не только из-за стремления максимизировать прибыль. Хозяйствующие субъекты вынуждены *страховать рисковые операции*, тем самым сводя их к минимуму. В нашей стране рынок страхования очень перспективен. Он интенсивно развивается, представлен многими страховыми компаниями, которые предоставляют услуги по страхованию грузов, страхованию основных фондов и т.п. Следовательно, страховые компании, получая прибыль, являются также источниками инвестирования.

В заключение необходимо указать еще одну проблему. Это снижение ставки рефинансирования, которая в нашей стране сейчас составляет около 12%. К этой ставке, устанавливаемой ЦБ РФ, привязаны ставки кредитов, выдаваемых коммерческими банками субъектам хозяйствования. Так как ставки кредитов существенно превышают рентабельность хозяйствующих субъектов, нет ничего удивительного в том, что кредитование реального сектора экономики коммерческими банками находится на уровне 13%. Причем в основном это краткосрочные кредиты из-за опасений банков, связанных с нарушением сроков возврата кредитов заемщиками. По этой же причине медленно развиваются ипотечное кредитование и лизинговые формы обновления основных средств.

1.2. ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ ОСНОВНОГО КАПИТАЛА

Структура источников инвестиций в основной капитал за время экономических реформ в России существенно изменилась. Сократилась доля бюджетных ассигнований и увеличилась доля собственных средств организаций. Кроме того, ощутимо возросли доли населения и заемных средств в реализации конкретных инвестиционных проектов.

Рассмотрим **классификацию источников финансирования инвестиционных проектов** по следующим признакам:

1) *по отношению собственности*:

- собственные;
- привлеченные;
- заемные;

2) *по видам собственности*:
- государственные инвестиционные ресурсы;
- инвестиционные ресурсы хозяйствующих субъектов, общественных организаций, физических лиц;
- инвестиционные ресурсы иностранных инвесторов;

3) *по уровням собственников*:

а) *на уровне государства и субъектов Федерации*:
- собственные средства бюджетов и внебюджетных фондов;
- привлеченные средства государственной кредитно-банковской и страховой систем;
- заемные средства в виде государственных международных заимствований, государственных облигационных, долговых, товарных и прочих займов (внутренний долг государства);

б) *на уровне организации* (рис. 1.1):
- собственные средства (прибыль, амортизационные отчисления, страховые суммы возмещения убытков, иммобилизованные излишки основных и оборотных средств, нематериальных активов и пр.);

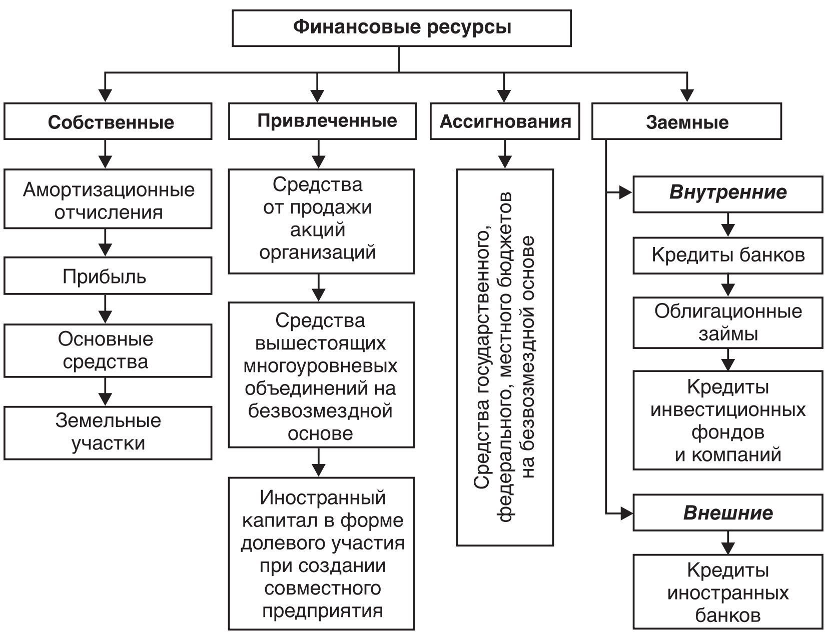

Рис. 1.1. Возможные источники финансирования инвестиционного проекта на уровне организации

- привлеченные средства, в том числе взносы и пожертвования, средства, полученные от продажи акций, и пр.;
- заемные средства в виде бюджетных, банковских и коммерческих кредитов (на процентной и беспроцентной, возмездной и безвозмездной основе);
- ассигнования;

в) *на уровне инвестиционного проекта*:

- средства бюджетов Российской Федерации и субъектов Федерации, внебюджетных фондов;
- средства субъектов хозяйствования — отечественных организаций, коллективных институциональных инвесторов;
- иностранные инвестиции в различных формах.

1.3. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ИНВЕСТИЦИЙ

Амортизация. Амортизационные отчисления представляют собой самую значительную долю в общей сумме инвестиций, направляемых на поддержание и развитие основных фондов. Поэтому выбор рациональных способов учета основных средств, оценки их величины и особенно рационализация методов расчета амортизационных отчислений для организации имеют большое значение. С 1 января 1998 г. в России применялось положение по бухгалтерскому учету «Учет основных средств». Это положение, с одной стороны, устанавливало методы формирования информации об основных средствах, находящихся в организации на праве собственности, хозяйственного ведения, оперативного управления и договора аренды, а с другой — позволяло по-новому подойти к расчету амортизационных отчислений.

В этом документе впервые введено новое понятие — *«срок полезного использования»* основных средств. Этот срок определяется или доходностью организации от использования конкретного объекта основных средств, или сроком, в течение которого данный объект основных средств отвечает целям деятельности. Стоит отметить, что хозяйствующий субъект с учетом ряда обстоятельств сам может обосновывать срок полезного использования объекта основных средств.

Вполне естественно, что ориентиром для установления срока полезного использования служат данные технической документации на объект основных средств. На учет основные средства ставятся по *первоначальной стоимости*, но она по-разному определяется. Чаще всего первоначальная стоимость складывается из суммы фактических затрат на приобретение, сооружение и изготовление объекта, но при этом исключаются НДС и другие возмещаемые налоги.

Перечень фактических затрат довольно обширный. В него рекомендуется включать:

- суммы, уплаченные поставщику;
- суммы, уплачиваемые организациям за осуществление работ по договору строительного подряда и иным договорам;
- суммы, уплачиваемые организациям за информационные и консультационные услуги, связанные с приобретением основных средств;
- вознаграждения, уплачиваемые посредникам, обеспечивающим приобретение основных средств;
- регистрационные сборы, государственные пошлины и другие платежи, связанные с приобретением (получением) прав на объект основных средств;
- таможенные пошлины;
- иные затраты, непосредственно связанные с приобретением, сооружением и изготовлением объекта основных средств.

Первоначальной стоимостью основных средств, внесенных в счет вклада в уставный капитал организации, признается их денежная оценка, согласованная с учредителями организации.

В основе расчета амортизационных отчислений лежит принцип возмещения организацией первоначальной стоимости объектов основных средств в целях накопления средств, необходимых для замещения выбывающих из эксплуатации основных средств.

Прибыль. Важнейшими источниками инвестирования на уровне хозяйствующего субъекта являются не только амортизационные отчисления, но и часть средств из прибыли. Амортизационные отчисления, будучи самым мощным источником инвестирования на уровне первичной организации, тем не менее предназначены только для инвестирования выбывающих основных средств. Из прибыли, которая остается в распоряжении организации, формируются *целевые фонды*, в том числе и *фонд накопления*.

В фонд накопления направляется не только часть прибыли, но также:

- безвозмездно полученные средства других хозяйствующих субъектов;
- средства бюджета;

- средства централизованных фондов вышестоящих организаций и добровольных вложений.

Фонд накопления используется для следующих целей:

- приобретение и строительство основных средств производственного и непроизводственного назначения;
- уплата процентов за пользование банковскими кредитами;
- финансирование НИОКР;
- уплата штрафов;
- подготовка и переподготовка кадров.

В условиях экономической самостоятельности организации имеют право выбирать направление использования оставшейся в их распоряжении прибыли. Государство воздействует на порядок распределения прибыли через налогообложение. Так, путем предоставления льгот стимулируется вложение прибыли в развитие производства.

Все организации независимо от организационно-правовой формы и отраслевой принадлежности начиная с 1993 г. получили право уменьшать налогооблагаемую прибыль на сумму прибыли, направленную:

- на финансирование капитальных вложений производственного и непроизводственного назначения при условии полного использования амортизационных отчислений;
- на финансирование мероприятий, связанных с содержанием объектов социально-культурной сферы;
- на взносы в благотворительные фонды и др.

Законодательно в Российской Федерации устанавливаются ограничения на уменьшение налогооблагаемой прибыли.

Основой организации финансов хозяйствующего субъекта, формирования денежных доходов и фондов денежных средств служит *финансовый план*. Формой финансового плана в организации является *баланс доходов и расходов*. Финансовые средства необходимы субъекту хозяйствования для его учреждения, модернизации и развития. Функционирование организации связано с использованием как собственных источников финансирования, так и привлеченного капитала. К *собственному капиталу* относятся уставный капитал, резервные накопления прибыли, балансовая прибыль. Самофинансирование осуществляется за счет использования прибыли организации или за счет перераспределения капитала. О степени самофинансирования можно судить по тому, способна ли организация функционировать без привлечения заемного капитала и использует ли она часть прибыли на развитие производства.

Источниками получения средств для самофинансирования могут быть:

- прибыль, не выплаченная вкладчикам капитала;
- скрытые резервы;
- отчисления в специальные фонды.

За счет *собственных* и *привлеченных средств* организации осуществляют инвестирование. Инвестиционные средства организации могут формироваться из чистой прибыли (рис. 1.2).

Термины «балансовая прибыль» и «чистая прибыль» остаются в употреблении, хотя в официальных отчетах, представляемых организациями в налоговые инспекции, они заменены соответственно на «прибыль отчетного периода» и «нераспределенную прибыль».

За счет *чистой прибыли* организации осуществляют:

- строительство объектов производственного назначения, реконструкцию, техническое перевооружение основных и подсобных производств, модернизацию оборудования,

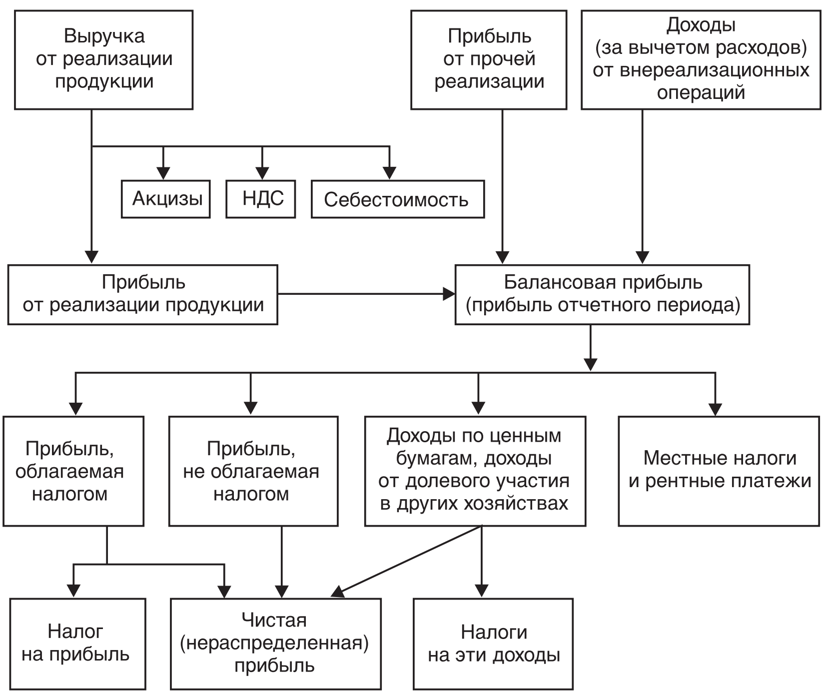

Рис. 1.2. Схема формирования чистой прибыли организации

приобретение машин, транспортных средств и других средств производства, улучшение качества продукции, совершенствование технологии производства;

- строительство жилья и объектов социальной сферы;
- эксплуатацию жилых домов, общежитий, детских дошкольных учреждений, спортивных сооружений, пионерских лагерей и т.п.;
- выплату процентов коммерческим банкам, платежи по процентам в пределах учетной ставки, установленной ЦБ РФ, оплату процентов сверх учетной ставки, а также по отсроченным и просроченным ссудам;
- оказание материальной помощи рабочим и служащим, ветеранам труда, ранее работавшим в организации, выплату премий;
- компенсацию стоимости питания в столовых и буфетах, посещения культурно-зрелищных мероприятий, спортивных занятий;
- страхование персонала организации;
- покрытие всех видов налогов, выплачиваемых из чистой прибыли;
- покупку акций, облигаций и других ценных бумаг;
- прочие расходы.

Из приведенного распределения чистой прибыли можно заключить, что большая часть приходится на инвестирование. Однако утверждать, что так же дела обстоят с общей суммой средств, выделяемых на эти цели, нельзя. Все зависит от конкретной ситуации, складывающейся в организации на момент осуществления такого распределения.

Инвестиции из бюджетных средств. С переходом России на рыночные формы хозяйствования приоритеты бюджетного инвестирования изменились. Бюджетными средствами не инвестируются расходы на поддержание и развитие производственного аппарата. Эти заботы легли на плечи предпринимателей. Тем не менее остались сферы инвестирования, расходы по которым государство не передает коммерческим хозяйствующим субъектам.

Так, государство оставляет за собой заботы по финансированию ряда инвестиционных проектов социальной и экологической направленности. Средства на инвестиционные программы и проекты этих двух сфер деятельности выделяются из федерального бюджета, бюджетов субъектов Федерации и местных органов самоуправления. Кроме того, часть средств указанных бюджетов направляется в различные фонды, в том числе во внебюджетные. Из таких фондов осуществляется финансирование некоторых инвестиционных проектов социального и экологического характера.

Объемы бюджетных инвестиций в основной капитал определяются в инвестиционных проектах и программах, а строго фиксируются — в годовых бюджетах. Доля бюджетных инвестиций в общей их сумме по стране невелика.

Иностранные инвестиции. На сегодняшний день иностранные инвесторы проявляют большой инвестиционный интерес к России. Однако основным отталкивающим фактором остаются закрытость и теневая структура бизнеса, неуплата налогов, коррупция в высших эшелонах власти и органах местного самоуправления. Это значительно тормозит приток средств и более эффективное развитие бизнеса.

В Российской Федерации инвестиции могут осуществляться следующим образом:

- создание организаций с долевым участием иностранного капитала (совместных организаций);
- создание организаций, полностью принадлежащих иностранным инвесторам, их филиалов и представительств;
- приобретение иностранным инвестором в собственность организаций, имущественных комплексов, зданий, сооружений, долей участия в существующих организациях, акций, облигаций и других ценных бумаг;
- приобретение прав пользования землей и иными природными ресурсами, а также иных имущественных прав;
- предоставление займов, кредитов, имущества, имущественных прав и т.п.

Доля России в общем объеме годового инвестирования мировой экономики ничтожна (около 5%), если принимать во внимание ее сырьевой, производственный потенциал, а также трудовые ресурсы.

Для России крайне важно стимулировать приток иностранного капитала. При этом необходимо определиться, в каких формах следует его привлекать — в форме частных зарубежных инвестиций (прямых и портфельных) или в форме кредитов и займов. Под *прямыми инвестициями* принято понимать капитальные вложения в реальные активы (производство) в других странах, в управлении которыми участвует инвестор. Инвестиции могут считаться прямыми, если иностранный инвестор владеет не менее чем 25% акций, или паем в уставном капитале организации, или их контрольным пакетом, величина которого может изменяться в достаточно широких пределах в зависимости от распределения акций или средств среди акционеров.

Прямые зарубежные инвестиции — это нечто большее, чем простое финансирование капиталовложений в экономику, это способ повышения производительности и технического уровня российских предприятий. Важно то, что, размещая капитал в России, иностранная компания приносит с собой новые способы организации производства, новые технологии и способствует выходу предприятия на мировой рынок.

Портфельные инвестиции — это капиталовложения в акции зарубежных предприятий, которые не дают права контроля над ними, в облигации и другие ценные бумаги иностранного государства и международных финансовых институтов.

Существуют еще и *реальные инвестиции* — это капитальные вложения в землю, недвижимость, машины и оборудование, запасные части и т.п.

Прямые и портфельные инвестиции движимы аналогичными, но не одинаковыми мотивами. В обоих случаях инвестор желает получить прибыль за счет владения акциями или паем доходной организации. При осуществлении портфельного инвестирования инвестор заинтересован не в том, чтобы руководить корпорацией, а в том, чтобы получить доход в будущем. Предпринимая прямое инвестирование, иностранный инвестор стремится увеличить свое влияние в управлении организацией. Россия прилагает все усилия к привлечению обоих видов инвестиций, но в большей степени — прямых инвестиций.

Иностранный капитал может иметь доступ во все сферы экономики (кроме некоторых закрытых) без ущерба интересов России. Однако приток иностранных инвестиций следует ограничить в отрасли, связанные с непосредственным использованием национальных природных ресурсов, в некоторые сферы производственной инфраструктуры, телекоммуникационную и спутниковую связь. Подобные ограничения имеются во многих развитых странах. Однако и в этих отраслях можно использовать такие альтернативные прямым инвестициям формы привлечения иностранного капитала, как *зарубежные кредиты* и *займы*.

Зарубежный капитал в форме организаций со 100%-м иностранным участием выгодно привлекать к таким видам деятельности, как производство и переработка сельскохозяйственной продукции, производство строительных материалов, строительство, выпуск товаров народного потребления, развитие деловой инфраструктуры. Портфельные инвестиции также выгодны: они обеспечивают приток финансовых ресурсов без потери российской стороной контроля над объектом инвестирования.

В последнее время по известным причинам активность иностранных инвесторов снизилась. Основные факторы, способствующие этому, очевидны:

- политическая нестабильность;
- сравнительно высокая инфляция;
- несовершенство законодательства;
- неразвитость производственной и социальной инфраструктуры;
- недостаточное информационное обеспечение.

Привлечение иностранных инвестиций в российскую экономику — жизненно важное направление деятельности руководящих органов России. Одним из таких направлений является *страхование инвестиций от некоммерческих рисков*. Важным шагом в этой области для России стало ее присоединение к Многостороннему агентству по гарантиям инвестиций (МИГА), осуществляющему их страхование от политических и других некоммерческих рисков [1].

Другое направление — это *улучшение правового обеспечения*, позволяющего иностранным инвесторам сохранить их вклады в российскую экономику и обеспечить приемлемые формы получения прибыли на вложенные средства. Будем надеяться, что в ближайшее время законодательная база функционирования иностранных инвестиций будет совершенствоваться.

Для **создания благоприятного инвестиционного климата в России** следует:

- законодательно обеспечить одинаковый для всех инвесторов, а в отдельных случаях — льготный правовой режим для иностранных вкладчиков, предоставить гарантии права собственности иностранного инвестора, а также права беспрепятственного распоряжения своей долей прибыли;
- упростить нормативную базу проведения денежной приватизации, чтобы обеспечить реальный доступ иностранного капитала к рынку недвижимости;
- создать соответствующие экономические предпосылки, включая предоставление льгот по налогообложению прибыли, земли, собственности и объектов инфраструктуры, для повышения прибыльности инвестирования в российскую экономику по сравнению с другими странами;

- установить приоритетные направления иностранных инвестиций в приватизируемые предприятия тех отраслей, в которых страна-импортер обладает значительными преимуществами;
- создать понятную и работающую структуру фондового рынка, установив жесткие и одинаковые правила для его участников;
- развивать и упрощать цепочки выдачи кредитов банками;
- ежегодно формировать перечень приоритетных отраслей промышленности, требующих инвестиций, на правительственном и региональном уровнях;
- обеспечить прозрачность финансовой отчетности российских субъектов хозяйствования.

Низкая инвестиционная активность в России — следствие известных объективных факторов. Однако есть и субъективные факторы, которые можно устранить, используя следующие рычаги:

- помощь организациям по приведению в соответствие формата изложения инвестиционного предложения современным западным стандартам;
- совершенствование законодательной базы в части гарантирования возвратности иностранных инвестиций;
- помощь организациям в продвижении их инвестиционных проектов к потенциальным иностранным инвесторам;
- создание системы, обеспечивающей информационную поддержку организаций реального сектора экономики при реализации ими всех этапов инвестиционных проектов.

Эмиссионное инвестирование. Эмиссия ценных бумаг (акций, облигаций, векселей и др.) — важнейший механизм привлечения заемных средств, значительная часть которых может использоваться для инвестирования. Этот инструмент инвестирования реализуется на фондовом рынке. Роль фондового рынка в развитых странах очень велика. По оценкам специалистов, используя инструменты фондового рынка, правительства развитых стран и субъекты хозяйствования привлекают до 75% инвестиций. В развитых странах наблюдается тесная связь (до 90%) между колебаниями индексов на фондовом рынке и спадом или подъемом экономики. К сожалению, в России до последнего времени такая закономерность не проявлялась. Это можно объяснить рядом причин: малая капитализация российского фондового рынка (50–70 млрд долл.), отсутствие должного доверия к ценным бумагам. Некоторое былое доверие было подорвано самим государством и, естественно, кризисами.

Отсутствие доверия объясняется также крайне низким качеством корпоративного управления в России, незаинтересованностью акционеров, менеджеров и клиентов в использовании инструментов фондового рынка. Ведущие менеджеры субъектов хозяйствования не так часто используют механизмы и практику реинвестирования прибыли в собственное развитие. Рядовые акционеры практически не участвуют в решении принципиальных вопросов реинвестирования в организациях.

Инструментарий российского фондового рынка очень бедный. На нем почти отсутствует в качестве участников большая часть граждан страны, имеющих средства, которые можно было бы использовать при финансировании инвестиционных проектов посредством механизма фондового рынка. Нужны не только приемлемые базовые ценности и необходимый уровень доверия, но и способность людей воспользоваться возможностями фондового рынка. Например, широкое внедрение сети торговли, реализуемой с использованием Интернета, привлекло бы на фондовый рынок десятки миллиардов долларов от миллионов граждан США; соответственно, число участников фондового рынка увеличилось бы в несколько раз.

Все же положительные сдвиги уже есть. Система интернет-торговли на Московской межбанковской валютной бирже была запущена в ноябре 1999 г. Суммарный объем сделок, заключенных через Интернет, вырос за последние несколько лет в сотни раз. Тенденции роста сохраняются. Важно, что значительно возросло число участников на фондовом рынке, представляющих группы физических лиц.

Однако пока в России много препятствий на пути расширения использования интернет-технологий. Это не только отсутствие достаточного числа компьютеров у граждан, но главным образом — низкий уровень коммуникационных сетей и дороговизна их использования, а также отсутствие соответствующих законодательных актов.

Специалисты признают, что лучшим инструментом долгосрочного инвестирования (10—15 лет) может быть *вложение в ценные бумаги*, и прежде всего — в государственные долговые обязательства. Для решения рассматриваемой проблемы нужны не только программы, но и политическая воля руководства страны.

Ценные бумаги являются отражением реально существующего капитала их эмитента. Оборот ценных бумаг на фондовом рынке напрямую связан с движением реальных капиталов. На фондовом рынке сталкивается спрос с предложением по определенным видам ценных бумаг и определяется их цена. Значимость фондового рынка в том, что на нем обеспечивается переход капитала из денежной формы в производственную путем аккумулирования денежных накоплений юридических, физических лиц и государства с последующим направлением их в производственную и непроизводственную сферы.

Эта форма инвестирования важна для всех финансовых структур, функционирующих в рыночных условиях, она обеспечивает ускорение развития реального сектора экономики.

Главный товар на фондовом рынке — *корпоративные ценные бумаги*, в основном это *акции акционерных обществ*. Инвесторами этих ценных бумаг преимущественно выступает население. В последние годы сравнительно много было эмитировано ценных бумаг государством — ГКО, ОФЗ и др. Эмиссия и оборот ценных бумаг позволяют, с одной стороны, удовлетворить спрос на денежный капитал, а с другой — удовлетворить потребности кредиторов в выгодном вложении своих средств.

Удовлетворение интересов всех контрагентов фондового рынка — важнейшая его функция.

Смешанные инвестиции. Одним из источников привлекаемых средств являются ресурсы коллективных инвесторов. **Организационные формы объединения свободных средств (инвестиций) юридических и физических лиц** могут быть следующие:

- инвестиционные компании и фонды, которым разрешается осуществлять инвестирование только в ценные бумаги;
- общие фонды банковского управления, которым разрешены различные формы инвестирования;
- паевые инвестиционные фонды, которым предоставлены широкие возможности по инвестированию;
- негосударственные пенсионные фонды, которым разрешается осуществлять практически все формы инвестирования за некоторым ограничением по использованию активов фондов;
- страховые компании, которым разрешается осуществлять практически все формы инвестирования. Однако отнесение страховых компаний к коллективным формам инвестирования надо считать условным;
- организации долевого строительства жилых помещений, но только условно, так как, по существу, в большинстве

своем при этой форме будущий собственник квартиры заранее оплачивает ее стоимость.

1.4. ИНВЕСТИЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ЛОГИСТИКЕ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Риск в бизнесе имеет вполне самостоятельное теоретическое и прикладное значение как важная составная часть теории и практики управления, особенно если учесть малоизученность этой серьезнейшей проблемы.

Анализ экономической литературы, посвященной проблеме риска, показывает, что среди исследователей нет единого мнения относительно определения предпринимательского риска, нет однозначного понимания его сущности. Это объясняется, в частности, многоаспектностью этого явления, практически полным игнорированием его нашим хозяйственным законодательством в реальной экономической практике и управленческой деятельности. Кроме того, риск — это сложное явление, имеющее множество несовпадающих, иногда противоположных основ. Это обусловливает возможность существования **нескольких определений риска** с разных точек зрения.

Анализ многочисленных определений риска позволяет выявить основные моменты, характерные для рисковой ситуации, такие как:

- случайный характер события, который определяет, какой из возможных исходов реализуется на практике (наличие неопределенности);
- наличие альтернативных решений;
- возможность определить вероятности исходов и ожидаемые результаты;
- вероятность возникновения убытков;
- вероятность получения дополнительной прибыли.

Риск — это деятельность, связанная с преодолением неопределенности в ситуации неизбежного выбора, в процессе которой имеется возможность количественно и качественно оценить вероятность достижения предполагаемого результата, неудачи и отклонения от цели [68].

Более простое определение приведено в книге С.И. Абрамова «Управление инвестициями в основной капитал» (М., 2002): «***Риск*** — неопределенность, связанная с возможностью возникновения неблагоприятных ситуаций и последствий».

Риск можно рассматривать не только как вероятность положительных и отрицательных последствий, которые могут возникнуть в результате выбора и реализации решения о расширении бизнеса, но и как неотъемлемый элемент самой этой деятельности. Зависимость здесь однозначная: по мере расширения (развития) предпринимательской деятельности, бизнеса будет расширяться сфера риска, увеличиваться число рисковых ситуаций. Так, в экономической борьбе с конкурентами за покупателя организация вынуждена продавать свою продукцию в кредит (с риском невозврата денежных сумм в срок), а при наличии временно свободных денежных средств — размещать их в виде депозитных вкладов или ценных бумаг.

Риск, расчет, случай, конкуренция — постоянные спутники бизнеса. Наличие риска предполагает необходимость выбора одного из возможных решений, в связи с чем лицо, принимающее решение, анализирует все возможные варианты, выбирая наиболее рентабельные и наименее рискованные. В сложных экономических ситуациях для выбора оптимального решения используются специальные методы анализа и экономико-математические модели.

Классификация рисков представляет довольно сложную проблему, что обусловлено их многообразием. *По характеру последствий* риски можно разделить на два типа: чистые и спекулятивные.

Особенность ***чистых рисков*** заключается в том, что они практически всегда несут в себе потери для бизнеса. Их причинами могут быть стихийные бедствия, несчастные случаи, недееспособность руководителей фирм и т.п.

Спекулятивные риски, которые называют также ***динамическими*** или ***коммерческими***, несут в себе либо потери, либо дополнительную прибыль. Их причинами могут быть изменения курсов валют, конъюнктуры рынка, условий инвестиций и др.

По месту возникновения, в основе которого лежит определенная сфера деятельности, различают следующие виды рисков в логистике производства:

- ***производственный риск***, связанный с невыполнением предприятием своих планов и обязательств по производству продукции, товаров, оказанию услуг, других видов производственной деятельности в результате воздействия как внешней среды, так и внутренних факторов;

- ***финансовый риск***, возникающий в связи с невозможностью выполнения фирмой своих обязательств. Причинами финансового риска являются изменение покупательной способности денег, неосуществление платежей, изменение валютных курсов и т.п.

В зависимости от *основной причины возникновения* риски делятся на следующие категории:

- ***природно-естественные риски*** — это риски, связанные с проявлением стихийных сил природы;
- ***экологические риски*** — связаны с наступлением гражданской ответственности за нанесение ущерба окружающей среде;
- ***политические риски*** — это возможность возникновения убытков или сокращения размеров прибыли, являющихся следствием государственной политики;
- ***транспортные риски*** — связаны с перевозками грузов различными видами транспорта;
- ***имущественные риски*** — это риски от потери имущества по причинам, от владельца не зависящим;
- ***торговые риски*** — зависят от убытков по причине задержки платежей, непоставки товаров, отказа от платежа и т.п.

Также можно отметить группу рисков, связанную с *покупательной способностью денег*: ***инфляционные***, ***дефляционные***, ***валютные риски*** и ***риск ликвидности***.

Инвестиционные риски связаны с *возможностью недополучения или потери прибыли в ходе реализации инвестиционных проектов*, они включают в себя следующие подвиды:

1) *риск упущенной выгоды* заключается в том, что возникает финансовый ущерб в результате неосуществления некоторого мероприятия;

2) *риск снижения доходности* связан с уменьшением размера процентов и дивидендов по портфельным инвестициям, он делится на процентный риск, возникающий в результате превышения процентных ставок, выплачиваемых по привлеченным средствам, над ставками по предоставленным кредитам, и кредитный риск, возникающий в результате неуплаты заемщиком основного долга и процентов, причитающихся кредитору;

3) *биржевой риск* представляет собой опасность потерь от биржевых сделок;

4) *риск банкротства* связан с полной потерей собственного капитала из-за его неправильного использования.

Естественно, анализ классификационных признаков, видов и подвидов риска можно продолжить. Это приведет к очередному перечислению мнений различных исследователей и специалистов, однако не даст ответа на вопрос: «Какой подход, какая классификация является основной? в какой мере она будет способствовать снижению степени риска?»

Остановимся лишь на таком критерии, как допустимый предел риска — критический риск. ***Критический риск*** — это риск, уровень которого выше среднего, но в пределах максимально допустимого значения [68].

Характерной причиной возникновения экономического риска является неопределенность. Ранее отмечалось, что риск как экономическая категория представляет собой событие, которое может произойти или не произойти. В случае наступления такого события возможны три экономических результата: отрицательный (убыток, ущерб), положительный (прибыль, выгода) и нулевой.

Рискованная ситуация связана со статистическими процессами, и ей сопутствуют три существенных условия: наличие неопределенности, необходимость выбора альтернативы и возможность при этом качественной и количественной оценки вероятности осуществления того или иного варианта.

Остановимся подробнее на первом условии. **Наличие неопределенности при любых видах предпринимательской деятельности** обусловлено тем, что экономические системы в процессе своего функционирования испытывают зависимость от целого ряда причин, которые можно систематизировать в виде схемы неопределенностей, представленной на рис. 1.3.

Временна́я неопределенность разделяется на ретроспективную, текущую и перспективную. Необходимость учета фактора времени при оценке экономической эффективности принимаемых решений обусловлена тем, что как эффект, так и затраты могут быть распределены во времени. Равные по величине затраты, по-разному распределенные во времени, обеспечивают неодинаковый полезный результат.

По факторам возникновения неопределенности подразделяются на экономические (коммерческие) и политические.

Экономические неопределенности обусловлены неблагоприятными изменениями в экономике предприятия или в экономике страны, к ним относятся: неопределенность рыночного спроса, слабая предсказуемость рыночных цен, неопределенность рыноч-

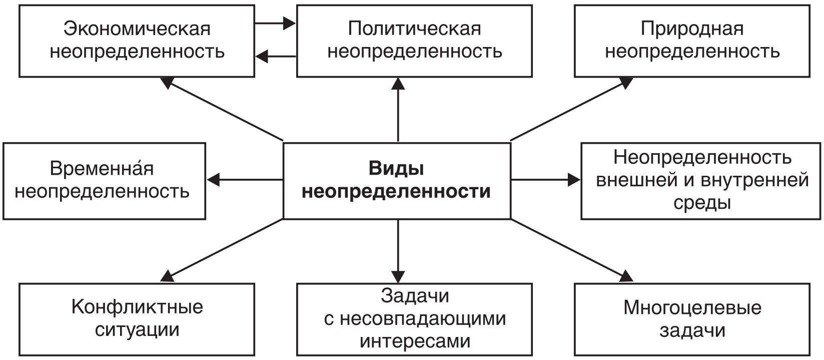

Рис. 1.3. Схема неопределенностей

ного предложения, недостаточность информации о действиях конкурентов и т.д.

Политические неопределенности обусловлены изменением политической обстановки, влияющей на предпринимательскую деятельность.

Эти виды неопределенности связаны между собой, и часто на практике их очень трудно разделить.

Природная неопределенность описывается совокупностью факторов, среди которых могут быть: климатические, погодные условия, различного рода помехи (атмосферные, электромагнитные и др.).

Следующим видом неопределенности является *неопределенность внешней среды*. При экономическом анализе бизнеса вводятся понятия внешней и внутренней среды. Внутренняя среда включает факторы, обусловленные деятельностью самого предприятия и его контактами. Внешняя среда представлена факторами, которые не связаны непосредственно с ведением бизнеса и имеют более широкий социальный, демографический и иной характер.

Особый вид неопределенности возникает при наличии *конфликтных ситуаций*, в качестве которых могут быть: стратегия и тактика лиц, участвующих в том или ином процессе; действия конкурентов и т.п.

Задачи с несовпадающими интересами подробно изучаются в курсе «Теория игр», а *многоцелевые задачи* являются предметом изучения в таком научном направлении, как многокритериальная оптимизация.

Наличие неопределенностей значительно усложняет процесс выбора оптимальных решений и может привести к непредсказуемым результатам.

В литературе существуют различные формулировки термина «неопределенность». Наиболее полная, на наш взгляд, приведена в книге В.А. Чернова «Анализ коммерческих рисков» (М., 1998): «***Неопределенность*** — это неполное или неточное представление о значениях различных параметров в будущем, порождаемых различными причинами и, прежде всего, неполнотой или неточностью информации об условиях реализации решения, в том числе связанных с ними затратах и результатах». Неопределенность, связанная с возможностью возникновения в ходе реализации решения неблагоприятных ситуаций и последствий, характеризуется понятием «риск».

Основные этапы управления риском представлены на рис. 1.4.

Нас в первую очередь интересует *оценка степени риска*, т.е. ее количественный анализ, предполагающий численное определение отдельных рисков и риска проекта в целом. Анализ риска позволяет получить картину возможных рисковых событий, определить вероятность их наступления и различные последствия. После сравнения полученных значений рисков с предельно допустимыми

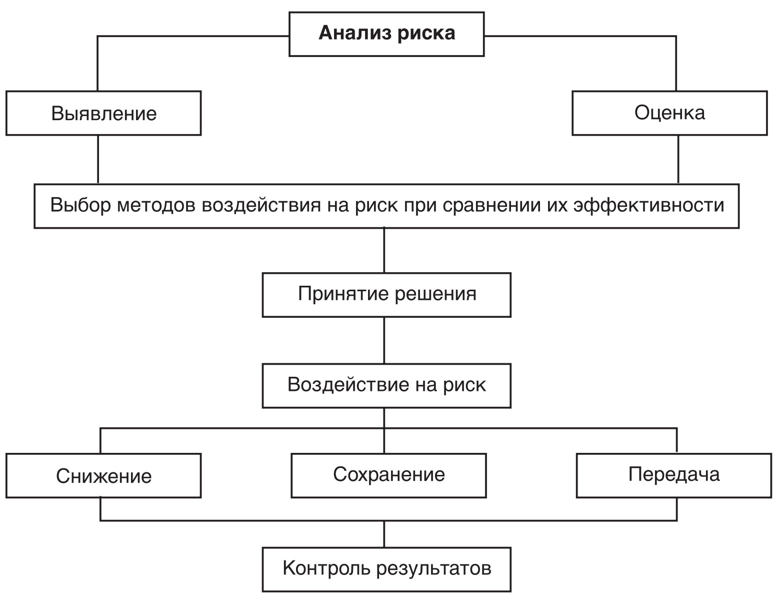

Рис. 1.4. Общая схема процесса управления риском

вырабатывается стратегия управления риском и на этой основе — меры предотвращения и уменьшения риска.

Роль количественной оценки экономического риска значительно возрастает, когда существует возможность выбора из совокупности альтернативных решений оптимального решения, обеспечивающего наибольшую вероятность наилучшего результата при наименьших затратах и потерях в соответствии с задачами минимизации и программирования риска. Здесь следует выявить, количественно измерить, оценить и сопоставить элементы рассматриваемых экономических процессов, выявить и определить взаимосвязи, тенденции, закономерности с описанием их в системе экономических показателей, что немыслимо без использования математических методов и моделей в экономическом анализе.

1.5. ПРИНЯТИЕ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Неопределенность можно охарактеризовать как множество состояний внутренней и внешней среды. При реализации цели всегда необходимо осуществлять поиск единственного наилучшего решения на заранее заданном множестве допустимых решений. Основная трудность состоит в том, что последствия, связанные с принятием того или иного решения, зависят от неизвестной ситуации. Степень неприемлемости этих последствий измеряется в условных единицах — потерях, которые могут возникнуть в связи с этим решением.

Риск — одно из важнейших понятий, сопутствующих любой активной деятельности человека. Вместе с тем это одно из самых неясных, многозначных и запутанных понятий. Однако, несмотря на это, во многих ситуациях суть риска очень хорошо понимается и воспринимается. Эти же качества риска служат серьезной преградой для его количественной оценки, которая во многих случаях необходима как для теоретических исследований, так и для практических расчетов.

В рамках нормативного подхода к исследованию процесса получения решения выработано понимание риска, во многом отличное от привычного его толкования в повседневной деятельности менеджеров, что затрудняет применение развитых теоретических идей.

Нормативная теория связывает риск преимущественно с *колеблемостью*, *изменчивостью результативного показателя* (используются термины «вариабельность», «волатильность»). Часто риск отождествляют с дисперсией показателя. Расчет таких характеристик, как дисперсия, предполагает комбинирование возможных значений результативного показателя и их вероятностей. При этом как значения показателей, так и их вероятность одинаково важны для расчета характеристики изменчивости. Однако для многих менеджеров значения результативного показателя важнее, чем их вероятности.

Второе принципиальное отличие постулатов нормативной теории от практики состоит в том, что в этой теории *отклонения результативного показателя* (скажем, доходности) *в большую или меньшую сторону в одинаковой степени считаются проявлением риска*. Это связано с тем, что в большинстве организаций менеджеры несут совершенно различную ответственность за убытки и упущенную выгоду.

Практически для любой операции, связанной с экономической деятельностью, начальное и конечное состояния имеют денежную оценку; и цель ее проведения, естественно, заключается в максимизации прибыли — разности между конечной и начальной оценками. Как правило, подобные операции, особенно финансовые, проводятся в условиях неопределенности, поэтому их результаты невозможно предсказать заранее. Однако экономико-математические модели позволяют нам оценивать прибыль и риск от принятых решений.

ГЛАВА 2

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ЛОГИСТИКЕ

2.1. БАЗОВЫЕ МОДЕЛИ ВЫБОРА ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОГРАММ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ЛОГИСТИКЕ

В рыночной экономике предприятие самостоятельно определяет рациональные варианты всех составляющих производственно-финансовой деятельности на основе баланса интересов производителей и потребителей выпускаемой продукции. При этом экономической оценкой эффективности варианта мероприятий является *прибыль предприятия, остающаяся в его распоряжении*. В связи с этим основная задача в условиях рынка — повысить эффективность предприятия путем оптимизации использования его ресурсов, в том числе кредитных, и составить перспективную производственную программу, а также планы предприятия по повышению его эффективности. Именно эти принципы и легли в основу построения рассмотренных далее базовых экономико-математических моделей.

Ключевой вопрос при оптимизации деятельности предприятия — *формирование его производственной программы с учетом наиболее рационального использования ресурсов предприятия*. Для определения объемов прибыли в зависимости от реализации различных вариантов производственной программы необходимо иметь данные о цене реализации продукции и себестоимости ее изготовления, а также об объеме выпуска по каждому виду продукции. Производственная программа формируется исходя из имеющихся у предприятия ресурсов (материально-сырьевых, производственных, финансовых и др.).

Процедура выбора оптимального варианта производственной программы предприятия на этапе стратегического управления производственно-финансовой деятельностью включает:

- генерацию вариантов перспективной производственной программы;

- расчет объема товарной продукции, соответствующего каждому варианту программы и планируемой балансовой прибыли;
- определение расхода материально-сырьевых ресурсов и загрузки производственного аппарата для каждого варианта.

При решении такой задачи стратегического управления, как формирование плана технического перевооружения предприятия, особенно в условиях использования им кредитных средств для реализации данного проекта, возникает необходимость генерации и сравнения альтернативных вариантов его производственно-технологической и организационных структур с последующим выбором наиболее рационального, обеспечивающего задаваемый уровень критерия оптимальности. В условиях директивной экономики при осуществлении мероприятий по реконструкции производства условия оптимальности игнорировались по причинам большой трудоемкости генерации альтернативных вариантов и их многообразия, а также сложности определения показателя эффективности для каждого варианта.

При экономической оценке наилучшим вариантом финансирования работ по созданию нового или реконструкции действующего предприятия с привлечением для финансирования кредита признается тот, который обеспечивает, во-первых, наибольшую эффективность использования ресурсов для реализации проекта, во-вторых, наибольшую рентабельность производства.

Очевидно, что при расширении производства, перевооружении предприятия или переходе на выпуск новой продукции встает вопрос о необходимости дополнительных инвестиций. При этом инвестиции могут осуществляться как самим предприятием, его собственниками, так и сторонними кредитными организациями. Проблема поиска наиболее эффективных условий инвестирования, учитывающих оптимизацию производственной программы предприятия, имеет немаловажное значение. Данная проблема актуальна не только для предприятия, но и для инвестора — ведь оба субъекта, определяя условия инвестирования, стремятся получить максимальный экономический эффект.

Таким образом, основная цель, которая ставится при использовании базовых моделей управления ресурсами предприятия,— решить задачу *оптимизации прибыли* в условиях ограничений на время использования оборудования, материальные и финансовые ресурсы, а также в условиях использования кредита для пополнения оборотных средств и реализации инвестиционных программ.

Кроме того, целью исследования является решение задач, направленных на *минимизацию риска* производственной программы и получение прибыли не ниже ожидаемого уровня.

Задача управления кредитными ресурсами предприятия с использованием моделей решается путем анализа результатов, полученных в процессе **моделирования различных вариантов производственно-финансовой деятельности предприятия с учетом использования им заемных средств**. Предложенные механизмы позволяют решать вопросы управления предприятием в ходе текущей деятельности и при проведении реорганизационных мероприятий, когда предприятие использует банковский кредит в своей деятельности. К числу таких мероприятий относятся расширение и реорганизация производства, переход на выпуск новой продукции и др.

Использование моделей позволяет формировать оптимальную производственную программу, осуществлять стратегическое планирование развития предприятия.

В основу моделирования производственно-финансовой деятельности предприятия легло решение задачи оптимизации с использованием методов линейного программирования.

Состояние предприятия, прежде всего объем его ресурсов, учитывается при составлении ограничений задачи оптимизации. Таким образом, моделирование осуществляется в условиях ограничений на имеющиеся материально-сырьевые и трудовые ресурсы, а также производственные мощности предприятия.

Для автоматизированной обработки данных и вычислений могут использоваться пакеты программ линейной оптимизации, в том числе программный продукт Microsoft Excel.

Модели предназначены преимущественно для средних и крупных предприятий, имеющих серийное производство, выпускающих разнообразную номенклатуру изделий и использующих большое количество видов материально-сырьевых ресурсов.

Рассмотрим несколько моделей оптимизации прибыли, базовой из которых является модель выбора оптимальной производственной программы предприятия, выпускающего несколько видов различной продукции.

Модель без привлечения кредита и с изначально доступным сырьем и оборудованием

Пусть предприятие с учетом имеющихся запасов материально-сырьевых ресурсов и производственных мощностей может выпускать продукцию в различных объемах. Объемы выпуска продукции могут быть заданы с помощью множества производственных программ: $X = \{x^1, ..., x^N\}$, где $x^k = (x^k_1, ..., x^k_n)$ — производственная программа k ($k = 1, ..., N$), задающая объем выпуска по всем видам продукции i ($i = 1, ..., n$, где n — количество видов выпускаемой продукции).

Введем следующие обозначения:

$Z_{\text{пост}}$ — постоянные затраты;

a_i — цена реализации единицы продукции вида i;

b_i — переменные затраты на выпуск единицы продукции вида i;

$c_i = a_i - b_i$ — маржинальный доход при выпуске продукции вида i;

l_{ij} — норма потребления ресурса, т.е. объем ресурса вида j ($j = 1, ..., M$, где M — число видов ресурсов), нужный для выпуска единицы продукции вида i;

L_j — запасы ресурса вида j;

t_{if} — время загрузки единицы оборудования вида f ($f = 1, ..., K$, где K — число видов оборудования) для выпуска единицы продукции вида i;

k_f — число единиц оборудования вида f;

τ_f — время эффективной работы единицы оборудования вида f.

Тогда требуется максимизировать величину прибыли:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - Z_{\text{пост}} \to \max \tag{2.1}$$

при ограничениях на ресурсы и оборудование:

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_j, \quad j = \overline{1, M}; \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{if} x_i \le k_f \tau_f, \quad f = \overline{1, K} \tag{2.3}$$

и целочисленности решения:

$$x_i \in \mathbf{Z}^+, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.4}$$

или, что то же самое,

$$x_i \ge 0, x_i \in \mathbf{Z}$$

(здесь $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbf{Z}^+$ — множество целых неотрицательных чисел).

Далее будем предполагать, что кредит предприятия погашается за счет доходов от его производственной деятельности.

Модель с привлечением кредита для увеличения объема выпуска и с изначально частично доступным сырьем и оборудованием

Как и ранее, будем предполагать, что предприятие может за ограниченный период времени выпустить продукцию в объемах, заданных альтернативными производственными программами множества $X = \{x^1, ..., x^N\}$, где $x^k = (x_1^k, ..., x_n^k)$ — производственная программа k, задающая объем выпуска по всем видам продукции i ($i = 1, ..., n$). В сравнении с моделью (2.1)–(2.4) (без привлечения кредита) использование кредита позволяет расширить объем выпуска продукции. Для *расширения производства* используются дополнительные ресурсы L_j^+ ($j = 1, ..., M$) и дополнительное оборудование y_f ($f = 1, ..., K$).

Введем следующие обозначения:

V — объем привлеченного кредита под α процентов. Кредит используется для дополнительной закупки ресурсов и оборудования:

β_j — цена единицы ресурса вида j ($j = 1, ..., M$);

γ_f — цена единицы оборудования вида f ($f = 1, ..., K$);

α — оплата за кредит (в долях);

$Z_{\text{пост}}$ — постоянные затраты;

a_i — цена реализации единицы продукции вида i;

b_i — переменные затраты на выпуск единицы продукции вида i;

$c_i = a_i - b_i$ — маржинальный доход при выпуске продукции вида i;

l_{ij} — норма потребления ресурса, т.е. объем ресурса вида j ($j = 1, ..., M$, где M — число видов ресурсов), нужный для выпуска единицы продукции вида i;

$(L_j + L_j^+)$ — запасы ресурса вида j;

t_{if} — время загрузки единицы оборудования вида f ($f = 1, ..., K$, где K — число видов оборудования) для выпуска единицы продукции вида i;

$(k_f + y_f)$ — число единиц оборудования вида f;

τ_f — время эффективной работы единицы оборудования вида f.

Тогда требуется максимизировать величину прибыли:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - Z_{\text{пост}} \to \max \qquad (2.5)$$

при ограничениях на ресурсы и оборудование:

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le \left(L_j + L_j^+\right), \quad j = \overline{1, M}; \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{if} x_i \le \left(k_f + y_f\right) \tau_f, \quad f = \overline{1, K}, \tag{2.7}$$

ограничении на размер закупок по кредиту:

$$\sum_{j=1}^{M} L_j^+ \beta_j + \sum_{f=1}^{K} y_f \gamma_f \le V, \tag{2.8}$$

условии возврата кредита за счет выручки:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - V(1+\alpha) \ge 0 \tag{2.9}$$

и целочисленности решения:

$$x_i \in \mathbf{Z}^+, i = \overline{1, n}; \quad L_j^+ \ge 0, j = \overline{1, M}; \quad y_f \in \mathbf{Z}^+, f = \overline{1, K}. \tag{2.10}$$

Решение оптимизационной задачи (2.5)–(2.10) позволит определить наилучшую производственную программу $x = (x_1, ..., x_n)$, а также объемы закупок дополнительного сырья и оборудования.

Модель с привлечением кредита для расширения номенклатуры и с изначально частично доступным сырьем и оборудованием

Исследуем ситуацию, связанную с *расширением номенклатуры производства*. Обозначим, как и ранее, множество производственных программ через $X = \{x^1, ..., x^N\}$, где $x^k = (x_1^k, ..., x_n^k)$ — производственная программа k, задающая объем выпуска по всем видам продукции i ($i = 1, ..., n_1$). Рассмотрим, как использование кредита позволит расширить номенклатуру (ассортимент) выпускаемой продукции: $n_1 > n$. Для производства расширенной номенклату-ры продукции $n + 1, ..., n_1$ используются ресурсы новых видов $M + 1, ..., M_1$ и новое оборудование видов $K + 1, ..., K_1$.

Введем следующие обозначения:

V — объем привлеченного кредита под α процентов. Кредит используется для дополнительной закупки $K + 1, ..., K_1$ видов оборудования и $M + 1, ..., M_1$ видов ресурса;

β_j — цена единицы ресурса вида j ($j = M + 1, ..., M_1$);

γ_f — цена единицы оборудования вида f ($f = K + 1, ..., K_1$);

$Z_{\text{пост}}$ — постоянные затраты;

a_i — цена реализации единицы продукции вида i;

b_i — переменные затраты на выпуск единицы продукции вида i;

$c_i = a_i - b_i$ — маржинальный доход при выпуске продукции вида i;

l_{ij} — норма потребления ресурса, т.е. объем ресурса вида j ($j = 1, ..., M_1$, где M_1 — общее число видов ресурсов), нужный для выпуска единицы продукции вида i;

L_j — запасы ресурса вида j;

L_j^+ — объем закупки ресурса вида j;

y_f — количество единиц оборудования вида f, которое необходимо приобрести;

t_{if} — время загрузки единицы оборудования вида f ($f = 1, ..., K_1$, где K_1 — число видов оборудования) для выпуска единицы продукции вида i;

k_f — число единиц оборудования вида f;

τ_f — время эффективной работы единицы оборудования вида f.

Тогда требуется максимизировать величину прибыли:

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_i x_i - Z_{\text{пост}} \to \max \tag{2.11}$$

при ограничениях на ресурсы и оборудование:

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_j,\ j = \overline{1, M};\quad \sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} x_i \le L_j^+,\ j = \overline{M+1, M_1}; \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{if} x_i \le k_f \tau_f,\ f = \overline{1, K};\quad \sum_{i=n+1}^{n_1} t_{if} x_i \le y_f \tau_f,\ f = \overline{K+1, K_1}, \tag{2.13}$$

ограничении на размер закупок по кредиту:

$$\sum_{j=M+1}^{M_1} L_j^+ \beta_j + \sum_{f=K+1}^{K_1} y_f \gamma_f \le V, \tag{2.14}$$

условии возврата кредита за счет выручки:

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_i x_i - V(1+\alpha) \ge 0 \tag{2.15}$$

и целочисленности решения:

$$\begin{aligned} &x_i \in \mathbf{Z}^+, i = \overline{1, n_1};\quad L_j^+ \ge 0,\ j = \overline{M+1, M_1};\\ &y_f \in \mathbf{Z}^+,\ f = \overline{K+1, K_1}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Модель с привлечением кредита для перепрофилирования производства

Рассмотрим ситуацию *перепрофилирования производства*, связанного с ухудшением спроса на традиционно выпускаемые виды продукции.

По сравнению с моделью (2.11)–(2.16) использование кредита позволяет перепрофилировать производство: продать все старое оборудование, сырье и готовую продукцию. Для начала нового производства используются ресурсы новых видов $M + 1, ..., M_1$ и новое оборудование видов $K + 1, ..., K_1$.

Введем следующие обозначения:

V — объем привлеченного кредита под α процентов. Кредит используется для дополнительной закупки $K + 1, ..., K_1$ видов оборудования и $M + 1, ..., M_1$ видов ресурса;

β_j — цена единицы ресурса вида j ($j = M + 1, ..., M_1$);

γ_f — цена единицы оборудования вида f ($f = K + 1, ..., K_1$);

P — выручка от реализации (продажи) старого оборудования, сырья и готовой продукции (учитывая связанные с этим возможные убытки). Выручка P позволяет уменьшить необходимый размер кредита V, если она будет использована для закупки нового оборудования и сырья;

$Z_{\text{пост}}$ — постоянные затраты;

a_i — цена реализации единицы продукции вида i;

b_i — переменные затраты на выпуск единицы продукции вида i;

$c_i = a_i - b_i$ — маржинальный доход при выпуске продукции вида i;

l_{ij} — норма потребления ресурса, т.е. объем ресурса вида j ($j = 1, ..., M_1$, где M_1 — общее число ресурсов), нужный для выпуска единицы продукции вида i;

L_j — запасы ресурса вида j;

L_j^+ — объем закупки ресурса вида j;

t_{if} — время загрузки единицы оборудования вида f ($f = 1, ..., K_1$, где K_1 — число видов оборудования) для выпуска единицы продукции вида i;

k_f — число единиц оборудования вида f;

τ_f — время эффективной работы единицы оборудования вида f.

Тогда требуется максимизировать величину прибыли:

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} c_i x_i - Z_{\text{пост}} \to \max \qquad (2.17)$$

при ограничениях на ресурсы и оборудование:

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} x_i \le L_j^+, \quad j = \overline{M+1, M_1}; \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} t_{if} x_i \le y_f \tau_f, \quad f = \overline{K+1, K_1}, \tag{2.19}$$

ограничении на размер закупок по кредиту:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=M+1}^{M_1} L_j^+ \beta_j + \sum_{f=K+1}^{K_1} y_f \gamma_f \le V + P, \\ &P = \sum_{j=1}^{M} L_j \beta_j + \sum_{f=1}^{K} k_f \gamma_f, \end{aligned} \tag{2.20}$$

условии возврата кредита:

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} a_i x_i - V(1+\alpha) \ge 0 \tag{2.21}$$

и целочисленности решения:

$$\begin{aligned} &x_i \in \mathbf{Z}^+, i = \overline{1, n}; \quad L_j^+ \ge 0, j = \overline{M+1, M_1}; \\ &y_f \in \mathbf{Z}^+, f = \overline{K+1, K_1}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ В МОДЕЛЯХ УПРАВЛЕНИЯ КРЕДИТНЫМИ РЕСУРСАМИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Рассмотрим модель с привлечением кредита для пополнения оборотных средств.

Анализ устойчивости при одинаковом росте цен на все виды выпускаемых изделий

Пусть для анализа устойчивости используется модель, аналогичная модели (2.5)–(2.10) с привлечением кредита и с изначально частично доступными сырьем и оборудованием. Тогда имеем целевую функцию

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \tag{2.23}$$

и ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_j^+, \quad j = \overline{1, M}; \tag{2.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{if} x_i \le y_f \tau_f, \quad f = \overline{1, K}; \tag{2.25}$$

$$\sum_{j=1}^{M} L_j^+ \beta_j + \sum_{f=1}^{K} y_f \gamma_f \le V; \tag{2.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - V(1+\alpha) \ge 0; \tag{2.27}$$

$$x_i \in \mathbf{Z}^+, i = \overline{1, n}; \quad L_j^+ \ge 0, j = \overline{1, M}; \quad y_f \in \mathbf{Z}^+, f = \overline{1, K}. \tag{2.28}$$

Все возможные решения (программы), удовлетворяющие данной системе ограничений, составляют конечное множество X:

$$X = \{x^1, ..., x^N\}.$$

Можно считать множество X упорядоченным по росту суммы компонент, его составляющих, т.е. $\sum_{i=1}^{n} x_i^N = \max_{j=\overline{1,N}} \sum_{i=1}^{n} x_i^j$. Пусть также программа x^l (где $1 \le l \le N$) максимизирует целевую функцию: $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$.

Так как $c_i = a_i - b_i$, то с ростом цены реализации a_i за счет инфляции: $a_i + \xi$ $(\xi \ge 0)$ — целевая функция изменяется:

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i + \xi) x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \xi \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Обозначим

$$f^k(\xi) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k + \xi \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Ясно, что $f^k(\xi)$ является линейной по ξ функцией. Таким образом, если при графической интерпретации с ростом ξ график $f^l(\xi)$ лежит выше и не пересекает графиков других $f^k(\xi)$, то программа x^l сохраняет свою оптимальность.

С учетом линейности функции $f^k(\xi)$ и упорядоченности множества X это дает

$$(f^l(\xi))' \geq (f^j(\xi))' \quad \forall j = \overline{l+1, N}, \tag{2.29a}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^l \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^j \quad \forall j = \overline{l+1, N}. \tag{2.29b}$$

Пересечение графиков (равенство функций) возможно при некотором ξ^τ: $(f^l(\xi^\tau))' \leq (f^\tau(\xi^\tau))'$. Тогда ближайшей точкой пересечения, приводящей к смене оптимальной программы, будет

$$\min_{\tau=\overline{l+1, N}} \left\{ \xi^\tau = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i (x_i^l - x_i^\tau)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i^\tau - x_i^l)} \right\}. \tag{2.30}$$

Анализ устойчивости при л и н е й н о м росте цен на каждый вид выпускаемых изделий

Пусть ξ — уровень инфляции; k_i — коэффициент, определяемый экспериментальным путем и показывающий связь скорости роста цен на товар вида i и инфляции ξ: при $k_i > 1$ цена растет быстрее инфляции, при $k_i < 1$ — медленнее. Тогда, если обозначить $k_i \equiv k_i a_i$, получим линейный закон роста цен на товар вида i: $a_i + k_i \xi$. Множество X теперь будет упорядочено по росту суммы произведения компонент, его составляющих, и коэффициента k_i:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^N k_i = \max_{j=\overline{1, N}} \sum_{i=1}^{n} x_i^j k_i.$$

Получим уточненные формулы:

$$f^k(\xi) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k + \xi \sum_{i=1}^{n} x_i^k k_i, \tag{2.31}$$

$$(f^l(\xi))' \geq (f^j(\xi))' \quad \forall j = \overline{l+1, N}, \tag{2.32a}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^l k_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^j k_i \quad \forall j = \overline{l+1, N}, \tag{2.32b}$$

$$\min_{\tau=l+1,N}\left\{\xi^{\tau}=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i^l-x_i^{\tau})}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\tau}k_i-\sum_{i=1}^{n}x_i^l k_i}\right\}. \tag{2.33}$$

На рис. 2.1 изображен график целевой функции на оптимальных производственных программах в зависимости от инфляции.

При уровне инфляции $\xi = 0$ значение целевой функции определяется по следующей формуле:

$$f^{k_1}(0)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i^{\text{опт}}.$$

Интервал $(0, \xi_1)$ есть интервал изменения инфляции, на котором сохраняет оптимальность решение $x^l \equiv x^{k_1}$. Для $\xi > \xi_1$ оптимальным будет некоторое другое решение x^{k2} (где $k_2 > k_1$). Следующим решением (при росте ξ) будет x^{k3} (где $k_3 > k_2$) и т.д. В итоге получим $x^{\text{опт}} \equiv x^N$.

Интервал разбивается на конечное число отрезков, их не более $N - 1$. Внутри каждого отрезка изменение инфляции не приводит к смене оптимальной программы.

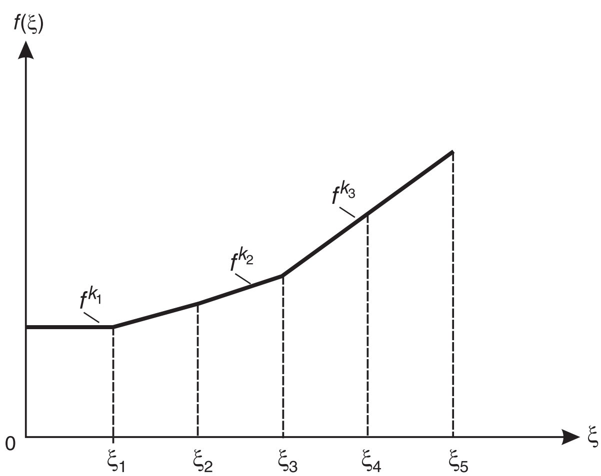

Рис. 2.1. График изменения целевой функции на оптимальных производственных программах при росте инфляции

Анализ устойчивости при одновременном линейном росте цен на выпускаемые изделия, материально-сырьевые ресурсы и оборудование

Дальнейшее уточнение модели позволяет учесть рост цен на материально-сырьевые ресурсы, используемые для выпуска продукции: $\beta_j + n_j\xi$, и на оборудование: $\gamma_f + n_f\xi$. Такой рост цен делает множество X у́же, удаляя из него часть программ. Тогда, чтобы x^l оставалось допустимым решением, т.е. не было удалено из множества X, необходимо условие

$$\sum_{j=1}^{M} L_j^l\left(\beta_j + n_j\xi\right) + \sum_{f=1}^{K} k_f^l\left(\gamma_f + n_f\xi\right) \le V, \tag{2.34a}$$

$$\xi\left(\sum_{j=1}^{M} L_j^l n_j + \sum_{f=1}^{K} k_f^l n_f\right) \le V - \left(\sum_{j=1}^{M} L_j^l \beta_j + \sum_{f=1}^{K} k_f^l \gamma_f\right), \tag{2.34b}$$

$$\xi \le \frac{V - \left(\sum\limits_{j=1}^{M} L_j^l \beta_j + \sum\limits_{f=1}^{K} k_f^l \gamma_f\right)}{\sum\limits_{j=1}^{M} L_j^l n_j + \sum\limits_{f=1}^{K} k_f^l n_f}, \tag{2.34c}$$

где L_j^l и k_f^l — конкретные объемы по видам продукции, найденным для решения x^l.

Тогда ясно, что смена программы $x^{k_q} \to x^{k_q+1}$ произойдет при значении инфляции, равном

$$\min\left\{\frac{V - \left(\sum\limits_{j=1}^{M} L_j^{k_q} \beta_j + \sum\limits_{f=1}^{K} k_f^{k_q} \gamma_f\right)}{\sum\limits_{j=1}^{M} L_j^{k_q} n_j + \sum\limits_{f=1}^{K} k_f^{k_q} n_f},\quad \min_{\tau=k_q+1,N}\left\{\xi^\tau = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i(x_i^{k_q} - x_i^\tau)}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i(x_i^\tau - x_i^{k_q})}\right\}\right\},$$

т.е. либо когда текущая программа из-за роста цен на выпускаемую продукцию перестанет быть оптимальной, либо когда выполнение текущей программы станет невозможным из-за роста цен на сырье (что может, например, случиться раньше потери оптимальности текущей программой). Возможна также ситуация, когда программа x^{k_q+1} сразу станет недопустимой из-за роста цен на сырье и потребуется тут же перейти к программе $x^{k_q+\nu}$ $(\nu \ge 1)$.

На рис. 2.2 изображено изменение целевой функции на оптимальном решении при росте инфляции.

При уровне инфляции $\xi = 0$ значение целевой функции определяется по следующей формуле:

$$f^{k_1}(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{\text{опт}}.$$

В точках излома (на рис. 2.2 они соответствуют уровням инфляции ξ_1 и ξ_3) происходит *переход к новой производственной программе*, а в точках разрыва (уровень инфляции ξ_2) — *сокращение выпуска продукции* (уменьшение объема производства объясняется тем, что при такой инфляции невозможно обеспечить материальными ресурсами выпуск конечной продукции в прежнем объеме).

Предлагаемые методы анализа устойчивости решений в задаче управления кредитными ресурсами предприятия позволяют не только определить оптимальное решение, но и исследовать решение в условиях инфляции, которая является достаточно значимым фактором в российской экономике.

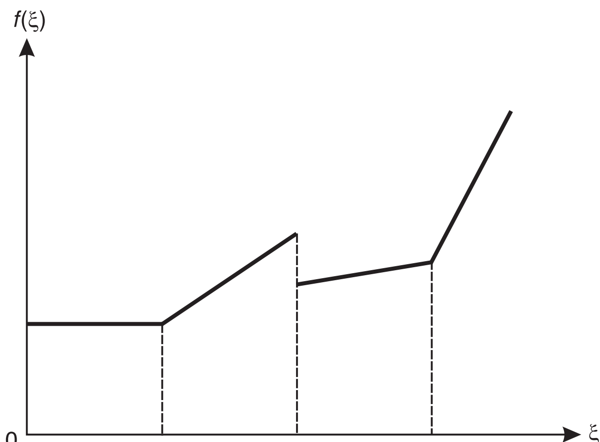

Рис. 2.2. График поведения целевой функции на оптимальном решении в зависимости от инфляции

2.3. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМИ РЕСУРСАМИ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Экономико-математические модели, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального) с точки зрения некоторого критерия или критериев варианта использования имеющихся ресурсов, существенно помогают выбрать правильную стратегию развития предприятия.

Производственная программа предприятия определяется исходя из имеющихся ресурсов различного вида (материально-сырьевых, производственных, финансовых).

Процедура выбора оптимального варианта производственной программы предприятия на этапе стратегического управления производственно-финансовой деятельностью включает:

- генерацию вариантов перспективной производственной программы;
- определение расхода материально-сырьевых ресурсов и использования производственных ресурсов для каждого вида выпускаемой продукции.

Очевидно, что в случае расширения производства, технического перевооружения предприятия, перехода на выпуск новой продукции необходимы дополнительные инвестиции. В рассматриваемых нами моделях финансовые ресурсы заимствуются в кредитной организации.

Решение задачи управления кредитными ресурсами предприятия с использованием экономико-математических моделей реализуется путем анализа результатов, полученных в процессе моделирования различных вариантов производственно-финансовой деятельности предприятия с учетом использования им заемных ресурсов.

Модель расширения производства по критерию минимизации риска

В данной модели рассмотрена ситуация, когда предприятие принимает решение о реализации инвестиционного проекта, предполагающего *расширение номенклатуры выпускаемых изделий*. Данный проект связан с покупкой нового оборудования и материально-сырьевых ресурсов для выпуска новой продукции.

Задачи этой модели — подобрать производственную программу с минимальным значением риска ее реализации и получением прибыли не ниже определенного предприятием уровня.

Расширение номенклатуры предполагает увеличение ассортимента выпускаемой продукции с n видов до n_1. При этом множество производственных программ выглядит следующим образом: $X = \{x^1, ..., x^N\}$, где $x^k = (x_1^k, ..., x_{n_1}^k)$.

Будем считать, что уровень маржи $c_i = a_i - b_i$ по каждому виду продукции определяется по выборочным значениям, накопленным за некоторый предыдущий период времени, т.е. она имеет значения $c_1^i, ..., c_T^i$ $(i = 1, ..., n_1)$, полученные в моменты времени $t = 1, ..., T$.

Для случайных величин c_i можно вычислить среднее значение, дисперсию и выборочный коэффициент ковариации по формулам:

$$\bar{c}_i = \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{l=1}^{n} c_l^i, \tag{2.35}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{\tilde{N}-1} \sum_{l=1}^{n} \left(c_l^i - \bar{c}_i\right)^2, \tag{2.36}$$

$$\text{cov}_{im} = \text{cov}(c_i, c_m) = \frac{1}{\tilde{N}-1} \sum_{l=1}^{n} (c_l^i - \bar{c}_i)(c_l^m - \bar{c}_m), \tag{2.37}$$

где $\tilde{N}$ — количество наблюдений;

cov_{im} — ковариация маржи по виду продукции i и виду продукции m.

Поскольку величины прибыли для каждого вида продукции могут быть различными, то хотелось бы свести к минимуму риск для получения общей прибыли (дохода), требуя при этом, чтобы она была не ниже заданного уровня $Д_{\text{гр}}$. Для определения риска воспользуемся формулами из теории Марковица, согласно которой необходимо определить часть y_i общей суммы, необходимой для покупки акций i-го вида. Аналогично этому вся сумма денежных средств, необходимая для реализации выпуска n_1 видов продукции $x_1, ..., x_{n_1}$, разбивается в соответствии с частями y_i $(i = 1, ..., n_1)$.

Для определения y_i воспользуемся *ограничениями на объем материально-сырьевых ресурсов*. Эти ограничения делятся на два вида:

для прежнего ассортимента изделий

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_j, \quad j = \overline{1, M}; \tag{2.38}$$

для новых изделий

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} x_i \le L_j, \quad j = \overline{M+1, M_1}, \tag{2.39}$$

где l_{ij} — норма потребления ресурса, т.е. объем ресурса вида j, необходимый для выпуска единицы продукции вида i;

L_j — запасы ресурса вида j.

Отсюда можно вычислить необходимые суммы для размера закупок:

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j L_j \le V_1 \qquad \text{(собственные средства предприятия);}$$

$$\sum_{j=M+1}^{M_1} \beta_j L_j \le V_{21} \quad \text{(кредитные средства предприятия),}$$

где β_j — цена единицы ресурса вида j ($j = 1, ..., M_1$).

Кроме того, при расширении номенклатуры потребуются новые виды оборудования, пронумеруем их в продолжение к предыдущим K видам: $K + 1, ..., K_1$. Для покупки этого оборудования нужна фиксированная сумма V_{22}:

$$V_{22} = \sum_{f=K+1}^{K_1} k_f \gamma_f. \tag{2.40}$$

Таким образом, вся сумма, необходимая для выпуска расширенного списка видов продукции, не должна превышать величину $V_1 + V_{21} + V_{22}$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j L_j + \sum_{j=M+1}^{M_1} \beta_j L_j + \sum_{f=K+1}^{K_1} k_f \gamma_f \le V_1 + V_{21} + V_{22}.$$

В силу того что V_{22} — фиксированная сумма, можно оставить

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j L_j + \sum_{j=M+1}^{M_1} \beta_j L_j \le V_1 + V_{21}. \tag{2.41}$$

Если воспользоваться неравенствами (2.38) и (2.39), то (2.41) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j \sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i + \sum_{j=M+1}^{M_1} \beta_j \sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} x_i \le V_1 + V_{21}.$$

Меняя знаки суммы по j и по i местами, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{M}\beta_j l_{ij}\right)x_i+\sum_{i=n+1}^{n_1}\left(\sum_{j=M+1}^{M_1}\beta_j l_{ij}\right)x_i\le V_1+V_{21}.$$

Здесь в скобках стоят величины затрат на производство единицы продукции соответствующего вида. Введем для них обозначение:

$$\theta_i=\sum_{j=1}^{M}\beta_j l_{ij},\quad i=\overline{1,n},$$

$$\theta_i=\sum_{j=M+1}^{M_1}\beta_j l_{ij},\quad i=\overline{n+1,n_1}.$$

Поэтому *ограничение на материально-сырьевые ресурсы* примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i+\sum_{i=n+1}^{n_1}\theta_i x_i\le V_1+V_{21},$$

или (после объединения обеих сумм)

$$\sum_{i=1}^{n_1}\theta_i x_i\le V_1+V_{21}.$$

Обозначим общую сумму средств, необходимую для закупки материальных ресурсов, через V, т.е. $V=V_1+V_{21}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n_1}\theta_i x_i\le V.$$

Разделим обе части неравенства на V:

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1}\theta_i x_i\right)/V\le 1.$$

Обозначив $y_i=\theta_i x_i/V$, в итоге получим

$$\sum_{i=1}^{n_1}y_i\le 1.$$

Это и есть части y_i, в соответствии с которыми необходимо разбить всю сумму средств V на закупку материальных ресурсов.

Теперь можно определить риск производства R:

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} \sigma_i^2 y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{m>i} \mathrm{cov}_{im}\, y_i y_m,$$

где σ_i^2, cov_{im} вычисляются по формулам (2.36) и (2.37).

Как было предложено ранее, необходимо в меняющихся условиях процесса производства минимизировать риск, потребовав получения прибыли не ниже заданного уровня $Д_{\text{гр}}$, и, кроме того, учесть ряд ограничений на производственные мощности и на спрос продукции.

Приведем математическую постановку задачи:

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} \sigma_i^2 y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{m>i} \mathrm{cov}_{im}\, y_i y_m \to \min \text{ (целевая функция);} \quad (2.42)$$

$\sum_{i=1}^{n_1} y_i \le 1$ (доли, в соответствии с которыми нужно распределить денежные средства на покупку материально-сырьевых ресурсов (в сумме меньше или равно 100%));

$\sum_{i=1}^{n_1} \left(y_i V / \theta_i \right) t_{if} \le k_f \tau_f$, $f = \overline{1, K_1}$ (ограничение на производственные мощности);

$\sum_{i=1}^{n_1} y_i \bar{c}_i V / \theta_i \ge Д_{\text{гр}}$ (нижнее ограничение на прибыль со всех видов изделий);

$y_i V / \theta_i \le D_i, i = \overline{1, n_1}$ (верхнее ограничение на количество производимых изделий);

$y_i V / \theta_i \ge P_i, i = \overline{1, n_1}$ (нижнее ограничение на количество производимых изделий).

Получена задача квадратичной оптимизации, которая может быть решена средствами Microsoft Excel.

Модель перепрофилирования производства с минимизацией риска и ограничением снизу на размер получаемой прибыли

Данная модель находит свое применение в условиях выхода предприятия из кризиса путем повышения конкурентоспособности его продукции на основе *перепрофилирования производства на выпуск новых видов продукции* и нередко для начала нового производства.

При формировании модели использованы предположения о том, что проект перепрофилирования производства подразумевает отказ от производства ранее выпускаемой продукции, демонтаж и продажу ликвидного оборудования и переход на выпуск новых видов продукции. Для этого необходимо за счет средств кредита приобрести новое оборудование.

Использование экономико-математического моделирования позволит рассчитать оптимальную схему реализации проекта, определить необходимый объем кредитования и оптимальный способ расходования кредита для перепрофилирования производства. Наряду с этим оптимизация направлена на минимизацию риска и получение предприятием прибыли не ниже определенного зафиксированного уровня.

Для формирования модели введем следующие обозначения:

V — объем привлеченного кредита под α процентов. Кредит используется для дополнительной закупки $K + 1, ..., K_1$ видов оборудования и $M + 1, ..., M_1$ видов материальных ресурсов производства;

β_j — цена единицы ресурса вида j ($j = M + 1, ..., M_1$);

γ_f — цена единицы оборудования вида f ($f = K + 1, ..., K_1$);

P — выручка от реализации (продажи) старого оборудования, сырья и готовой продукции (с учетом связанных с этим возможных убытков). Выручка P позволяет уменьшить необходимый размер кредита V, если она будет использована для закупки нового оборудования и сырья;

a_i — цена реализации единицы продукции вида i;

b_i — переменные затраты на выпуск единицы продукции вида i;

$c_i = a_i - b_i$ — маржинальный доход при выпуске продукции вида i;

l_{ij} — норма потребления ресурса, т.е. объем ресурса вида j ($j = 1, ..., M_1$, где M_1 — общее число ресурсов), необходимый для выпуска единицы продукции вида i;

t_{if} — время загрузки единицы оборудования вида f ($f = 1, ..., K_1$, где K_1 — число видов оборудования) для выпуска единицы продукции вида i;

k_f — число единиц оборудования вида f;

τ_f — время эффективной работы единицы оборудования вида f.

Учитывая, что прибыль для новых видов продукции заранее неизвестна, необходимо выбрать тип случайной величины, подходящим образом описывающей ее поведение. Естественно предположить, что это или р а в н о м е р н о е распределение на отрезке

$[a, b]$, или нормальное распределение $N(a, b)$. Задавая параметры a, b, можно сгенерировать с помощью датчика случайных чисел (имеющегося в пакете анализа данных Excel) необходимое количество значений, которые будут образовывать выборку величин прибыли для новых видов продукции. Пусть эти значения равны $c_1^i, \ldots, c_T^i, i = \overline{n+1, n_1}$.

Используя эту информацию, можно вычислить среднее значение $\overline{c}_i$, дисперсию σ_i^2 и ковариации cov_{im} прибылей для каждого нового вида продукции.

В условиях рыночной экономики необходимо добиться устойчивого процесса получения прибыли, т.е. минимизировать риск ее получения при выполнении требований к производственным мощностям, размеру кредита и объему выпускаемой продукции.

Рассмотрим **направления использования инвестиций в ситуации перепрофилирования предприятия**:

- необходимы *средства на покупку нового оборудования* в количестве

$$V_{22} = \sum_{f=K+1}^{K_1} k_f \gamma_f;$$

- необходимы *средства на покупку материально-сырьевых ресурсов*, при этом надо учитывать свободные денежные средства от продажи старого ликвидного оборудования в сумме P, т.е.

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} \theta_i x_i \le V_{21} + P,$$

где V_{21} — средства, необходимые для увеличения суммы P.

Таким образом, весь кредит состоит из двух частей:

$$V = V_{21} + V_{22}.$$

Обозначим через $y_i = \theta_i x_i / (V_{21} + P)$, $i = n + 1, \ldots, n_1$, доли, в соответствии с которыми разбивается сумма, предназначенная для покупки материально-сырьевых ресурсов.

В итоге **математическая модель с привлечением кредита для перепрофилирования производства** имеет вид

$$R = \sum_{i=n+1}^{n_1} \sigma_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{n_1} \sum_{m>i} \mathrm{cov}_{im}\, y_i y_m \to \min, \qquad (2.43)$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} y_i \le 1$$ (доли, в соответствии с которыми нужно распределить денежные средства на покупку материально-сырьевых ресурсов);

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} \left(y_i(V_{21}+P)/\theta_i\right)t_{if} \le k_f \tau_f,$$
$$f=\overline{K+1,K_1}$$ (ограничение на новые производственные мощности);

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} y_i\bar{c}_i(V_{21}+P)/\theta_i \ge Д_{\text{гр}}$$ (нижнее ограничение на прибыль со всех видов изделий);

$$y_i(V_{21}+P)/\theta_i \le D_i,\ i=\overline{n+1,n_1}$$ (верхнее ограничение на количество производимых изделий);

$$y_i(V_{21}+P)/\theta_i \ge P_i,\ i=\overline{n+1,n_1}$$ (нижнее ограничение на количество производимых изделий);

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} \bar{a}_i x_i - V(1+\alpha) \ge 0$$ (необходимое условие возврата кредита),

где $\bar{a}_i$ — математическое ожидание цены продукции вида i.

Модель расширения производства по критерию максимизации прибыли с ограничением сверху по уровню риска

Математическая модель с привлечением кредита для расширения производства отличается от модели (2.42): теперь целевая функция — это прибыль, а значение риска ограничено:

$$\sum_{i=1}^{n_1} y_i\bar{c}_i V/\theta_i \to \max \tag{2.44}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n_1} y_i \le 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(y_i V/\theta_i\right)t_{if} \le k_f \tau_f, \quad f=\overline{1,K_1},$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sigma_i^2 y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{m>i} \mathrm{cov}_{im}\, y_i y_m \le R,$$

$$y_i V / \theta_i \le D_i, \quad i = \overline{1, n_1},$$

$$y_i V / \theta_i \ge P_i, \quad i = \overline{1, n_1}.$$

З а м е ч а н и е. Количество единиц дополнительно приобретенного оборудования K_1 в рассмотренных моделях перепрофилирования и расширения производства также может быть искомой величиной. В этом случае в моделях появляется дополнительное ограничение вида

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(y_i V / \theta_i \right) t_{if} \le z_f \tau_f; \quad z_f \ge 0; \quad z_f \in \mathbf{Z}, \quad f = \overline{1, K_1}.$$

Модель перепрофилирования производства по критерию максимизации прибыли с ограничением сверху по уровню риска

Математическая модель с привлечением кредита для перепрофилирования производства отличается от модели (2.43) тем, что целевая функция направлена на максимизацию прибыли, а значение риска ограничено:

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} y_i \bar{c}_i V / \theta_i \ \to \ \max \qquad (2.45)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} y_i \le 1,$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} \left(y_i (V_{21} + P) / \theta_i \right) t_{if} \le k_f \tau_f, \quad f = \overline{K + 1, K_1},$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} \sigma_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{n_1} \sum_{m>i} \mathrm{cov}_{im}\, y_i y_m \le R,$$

$$y_i (V_{21} + P) / \theta_i \le D_i, \quad i = \overline{n + 1, n_1},$$

$$y_i (V_{21} + P) / \theta_i \ge P_i, \quad i = \overline{n + 1, n_1},$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} \bar{a}_i x_i - V(1 + \alpha) \ge 0.$$

Поскольку не все ограничения задачи линейны, то для ее решения необходимы методы нелинейной оптимизации. Несколько таких методов реализовано в программе Microsoft Excel. Примеры решения задач такого типа приведены в параграфе 2.4.

2.4. ПРИМЕР РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОГРАММ

Рассмотрим пример оптимизации деятельности реального предприятия — Московского машиностроительного завода «Вперед»*. Завод производит рулевые винты для вертолетов семейства Ми (Ми-2, Ми-8, Ми-14, Ми-17, Ми-24, Ми-26, Ми-28, Ми-35) с лопастями из композиционных материалов, воздушные винты для сверхлегких, легких, деловых и спортивных самолетов (Як-18Т, Як-50, Як-52, Як-55, Як-55М, Су-26, Су-26М, Су-26С, Су-26СЭ, Су-26Т, Су-29, Су-49), а также агрегаты воздушной системы для вспомогательных силовых установок типа ТА.

Для целей моделирования текущей деятельности завода «Вперед» были использованы показатели его производственно-финансовой деятельности, приведенные в табл. 2.1–2.5.

Таблица 2.1

Цена и себестоимость продукции, тыс. руб.

№ п/п	Вид продукции	Фактическая себестоимость единицы продукции	Отпускная цена за единицу продукции	Прибыль c_i
1	Лопасть 8-3922-00	249,80	346,65	96,85
2	Лопасть 246-3925-00	215,57	360,00	144,43
3	Лопасть 286-3922-00	221,98	346,65	124,67
4	Лопасть 90-3924-00	432,38	535,00	102,63
5	Лопасть 60-61-63	93,00	117,00	24,00
6	Лопасть В530ТА-Д35	3829,00	4641,30	812,30
7	Лопасть МАИ-89	239,43	297,42	57,99
8	Лопасть В530ТА-Д35 ЭРО	418,33	504,25	85,92
9	Лопасть MTV-9-B-C/CL-250-27-01	330,18	384,15	53,97

* Компьютерные расчеты по данному примеру проведены Ю.В. Посоховым.

Таблица 2.2

Нормы потребления сырья на единицу продукции

№ п/п	Вид продукции	Сталь сортовая	Сталь листовая	Цветные металлы	Пластмассы	Резинотехнические изделия	Лакокрасочная продукция	Промышленные материалы	Вспомогательные материалы	Древесные материалы
1	Лопасть 8-3922-00	7,25	3,33	51,51	26,24	14,10	5,20	2,73	1,80	0
2	Лопасть 246-3925-00	7,01	3,40	50,70	26,10	14,17	5,12	2,78	1,82	0
3	Лопасть 286-3922-00	7,01	3,40	50,73	26,10	14,00	5,12	2,78	1,82	0
4	Лопасть 90-3924-00	6,90	3,32	54,20	27,00	13,90	5,60	2,64	1,65	0
5	Лопасть 60-61-63	6,90	3,55	52,10	0,00	13,76	5,60	2,65	1,58	27
6	Лопасть В530ТА-Д35	5,83	3,10	50,75	0,00	12,50	5,00	2,45	1,58	20,7
7	Лопасть МАИ-89	8,37	4,00	54,10	0,00	14,00	5,44	2,80	1,94	26,4
8	Лопасть В530ТА-Д35 ЭРО	9,20	5,70	42,25	0,00	10,14	4,24	2,20	1,87	8,24
9	Лопасть MTV-9-B-C/ CL-250-27-01	8,75	5,68	40,78	0,00	11,00	4,14	2,68	1,58	6,58
Единица измерения		кг	кг	кг	кг	кг	кг	м	кг	кг

Таблица 2.3

Затраты на приобретение материально–сырьевых ресурсов, руб.

№ п/п	Вид материала	Стоимость единицы материала	№ п/п	Вид материала	Стоимость единицы материала
1	Сталь сортовая	82,00	6	Лакокрасочная продукция	920,00
2	Сталь листовая	302,00	7	Промышленные материалы	46,00
3	Цветные металлы	4876,00	8	Вспомогательные материалы	427,00
4	Пластмассы	1245,00	9	Древесные материалы	120,00
5	Резинотехнические изделия	5204,00			

Таблица 2.4

Нормы времени обработки и эффективное время работы, ч, на каждом станке по видам продукции

№ п/п	Вид продукции	Циркульная пила	Рейсмус (строгальный станок)	Ленточная пила	Шлифовальный станок	Стенд склейки хвостовых отсеков лопастей	Сушильная камера	Прессовочный станок	Копировальный станок	Автоклав	Столярная обработка	Малярный станок, отделочные работы	Транспортировка
1	Лопасть 8-3922-00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,40	5,90	0,00	0,00	2,60	0,00	1,2	0,25
2	Лопасть 246-3925-00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,60	5,40	0,00	0,00	2,90	0,00	1,3	0,25
3	Лопасть 286-3922-00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,60	5,40	0,00	0,00	2,80	0,00	1,4	0,25
4	Лопасть 90-3924-00	0,00	0,00	0,00	0,00	23,00	3,20	0,00	0,00	9,20	0,00	5,5	0,25
5	Лопасть 60-61-63	0,83	2,00	0,17	0,17	0,00	0,00	48,00	0,67	0,00	5,00	48,00	0,25
6	Лопасть В530ТА-Д35	0,83	2,33	0,17	0,17	0,00	0,00	48,00	0,75	0,00	6,00	48,00	0,25
7	Лопасть МАИ-89	0,67	2,00	0,17	0,00	0,00	0,00	24,00	0,50	0,00	4,00	31,33	0,25
8	Лопасть В530ТА-Д35 ЭРО	0,67	1,33	0,17	0,00	0,00	0,00	24,00	0,50	0,00	5,00	24,00	0,25
9	Лопасть MTV-9-B-C/CL-250-27-01	0,67	0,67	0,17	0,17	0,00	0,00	24,00	0,00	0,00	10,00	24,00	0,25
Итого времени на обработку		3,67	8,33	0,83	0,51	33,60	19,90	168,00	2,42	17,50	30,00	184,73	2,25
Эффективное время работы оборудования в течение месяца		132	132	121	110	154	484	154	132	165	132	154	110

Таблица 2.5

Прибыль, получаемая от реализации каждого вида изделия за год, тыс. руб.

№ п/п	Вид продукции	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь	Среднее значение	Среднее квадратичное значение
1	Лопасть 8-3922-00	5,00	5,00	19,98	37,47	2,50	–5,00	24,98	–2,50	57,45	19,98	9,99	62,45	19,78	22,41
2	Лопасть 246-3925-00	6,47	17,25	19,40	32,34	21,56	21,56	23,71	64,67	43,11	12,93	43,11	10,78	26,41	16,70
3	Лопасть 286-3922-00	8,88	8,88	22,20	2,22	15,54	8,88	4,44	11,10	15,54	8,88	–6,66	–22,20	6,47	11,57
4	Лопасть 90-3924-00	21,62	86,48	47,56	64,86	43,24	8,65	56,21	8,65	172,95	8,65	43,24	43,24	50,44	45,51
5	Лопасть 60-61-63	5,58	–3,72	11,16	13,95	12,09	–5,58	13,02	–9,30	–8,37	0,00	4,65	23,25	4,73	10,28
6	Лопасть В530ТА-Д35	33,50	–38,29	62,22	57,44	19,15	4,79	71,79	4,79	47,86	23,93	14,36	119,66	35,10	40,37
7	Лопасть МАИ-89	19,15	–28,73	33,52	35,91	45,49	95,77	38,31	–23,94	28,73	23,94	2,39	59,86	27,53	34,08
8	Лопасть В530ТА-Д35 ЭРО	37,65	41,83	62,75	62,75	92,03	–37,65	71,12	50,20	58,57	83,67	–4,18	104,58	51,94	39,90
9	Лопасть MTV-9-B-C/CL-250-27-01	220,12	–66,04	52,83	49,53	6,60	–33,02	59,43	–66,04	3,30	33,02	–9,91	6,60	21,37	75,59
	Итого	357,97	22,65	331,62	356,46	258,19	58,40	363,01	37,63	419,15	215,00	97,00	408,22	—	—

Суть **проекта по расширению производства завода «Вперед»** заключается в следующем. На предприятии предполагается постепенный переход на выпуск новых изделий. В результате реализации этого проекта произойдет расширение продуктового ряда: помимо ранее выпускаемых *лопастей из дерева* (лопасти 60-61-63, В530ТА-Д35, В530ТА-Д35 ЭРО, MTV-9-B-C/CL-250-27-01 и МАИ-89) будут производиться новые виды *лопастей из пластика* (лопасти 8-3922-00, 246-3925-00, 286-3922-00 и 90-3924-00).

Для производства новых видов лопастей закупается новое оборудование, в связи с чем необходимо выделить определенную сумму заемных или собственных денежных средств.

Для размещения нового оборудования предполагается использовать имеющиеся у предприятия свободные производственные площади. Обеспеченность производственными площадями составляет 100%. Закупаемое для реализации проекта оборудование позволит создать базу для производства по аналогичной технологии целого ряда изделий.

Согласно финансовому плану предприятия для закупки оборудования, проведения строительно-монтажных работ, а также приобретения материально-сырьевых ресурсов в необходимом объеме завод предполагает воспользоваться банковским кредитом.

Для решения задач оптимизации производственно-финансовой деятельности предприятия был использован программный продукт Microsoft Excel и его функция «Поиск решения». В диалоговом окне «Поиск решения» с использованием исходных данных, занесенных в таблицы, указываются целевая ячейка, значение которой необходимо максимизировать, минимизировать или установить равным заданному числу, а также ячейки, значения которых изменяются в процессе поиска решения до тех пор, пока не будут выполнены условия оптимизации. Значения целевой ячейки со списком граничных условий поставленной задачи, а также возможные варианты решений отображены на рис. 2.3.

После выполнения задачи программа выводит в таблице Microsoft Excel данные, полученные в результате оптимизации.

Для решения задач моделирования производственно-финансовой деятельности предприятия и ее оптимизации в программе Microsoft Excel были созданы следующие таблицы:

1. Таблица с данными для построения целевой функции:

- прибыль с одного рубля, полученная от реализации каждого вида изделия.

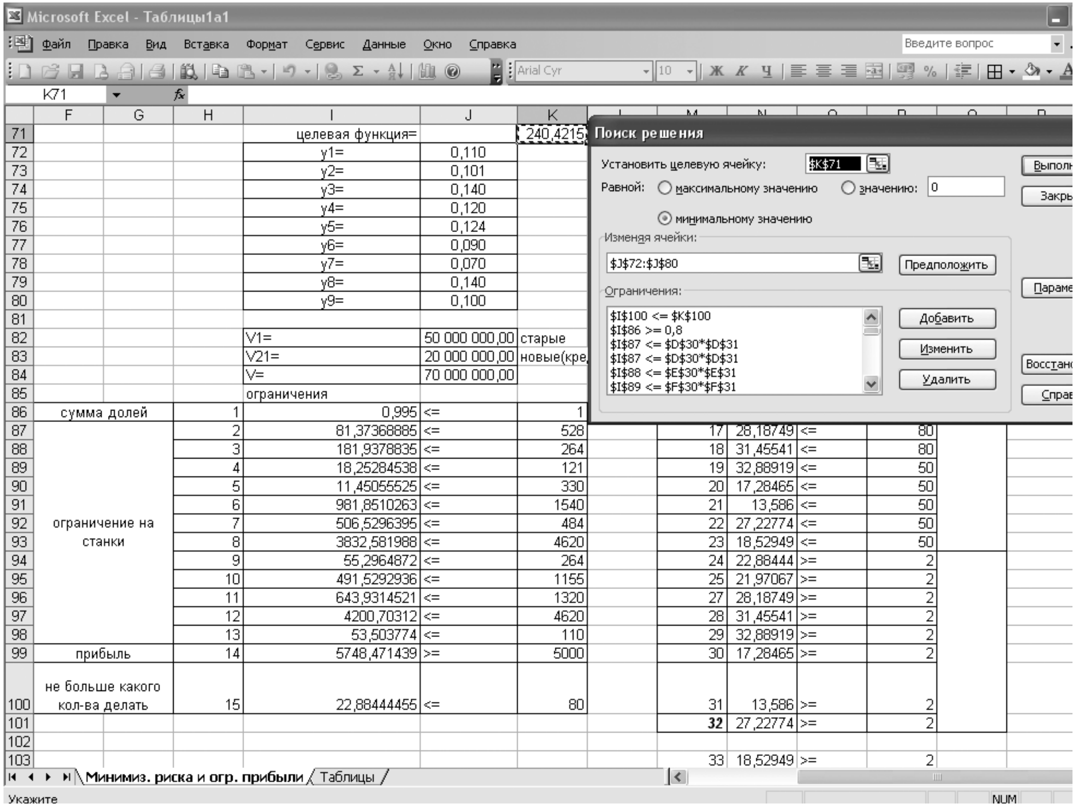

Рис. 2.3. Диалоговое окно «Поиск решений»

2. Таблица, характеризующая норму потребления сырья по каждому виду изделия на единицу продукции:

- вид материала;
- расход материала.

3. Таблица с данными по расходам на приобретение дополнительных материально-сырьевых ресурсов:

- вид материала;
- стоимость единицы материала.

4. Таблица с данными по нормам времени обработки на каждой операции по видам продукции:

- вид станков;
- эффективное время работы станков.

Примеры таблиц с исходными данными для расчетов по различным моделям приведены в приложениях 1–4.

В зависимости от конкретной решаемой задачи и вида модели условия изменялись с учетом постановки задачи и исходных данных.

В моделях были использованы следующие основные ограничения:

- на целочисленность и неотрицательность количества производимых изделий;
- на производственные мощности предприятия;
- на прибыль или риск в зависимости от модели;
- на количество производимых изделий того или иного вида.

Ограничения также менялись в зависимости от постановки задачи.

Для целей моделирования расчетный период в моделях был принят равным одному месяцу.

Для расчета показателей моделирования производственно-финансовой деятельности завода «Вперед» были использованы экономико-математические модели, описанные в параграфе 2.3.

Модель расширения производства по критерию минимизации риска и с ограничением снизу на размер получаемой прибыли

Расчеты по модели расширения производства проводились при следующих ограничениях:

- сумма долей, на которые необходимо разбить все денежные средства на закупку материально-сырьевых ресурсов, не должна превосходить единицу;
- ограничение на целочисленность и неотрицательность количества производимых изделий;

- ограничение на производительность оборудования;
- ограничение по спросу на продукцию.

Был задан минимальный уровень прибыли: 5 млн руб.

Исходные данные и результаты расчетов по модели представлены в Приложении 1.

В ходе расчетов была получена оптимальная производственная программа (табл. 2.6) минимального риска при ограничении снизу на ожидаемую доходность.

Таблица 2.6

Количество изделий каждого вида

x_1	23
x_2	22
x_3	28
x_4	31
x_5	33
x_6	17
x_7	14
x_8	27
x_9	19
Итого	214

Анализируя результаты расчетов, можно сделать вывод, что запас эффективного времени обработки по некоторым станкам в несколько раз превышает требуемый уровень. Несмотря на это, данная производственная программа позволяет заводу получать прибыль в размере 5 748 471 руб. при минимальной дисперсии доходности и выполнить стратегическую задачу по расширению номенклатуры выпуска и повышению конкурентоспособности на рынке.

Модель перепрофилирования производства по критерию минимизации риска и с ограничением снизу на размер получаемой прибыли

При формировании модели перепрофилирования производства была исследована ситуация, когда предприятие полностью отказывается от выпуска традиционных видов продукции (имеются в виду лопасти, сделанные из дерева).

Ликвидное оборудование, которое использовалось ранее, подлежит продаже, а для производства новых видов изделий — лопастей из пластика — закупается новое оборудование.

Модель позволяет менеджерам предприятия оценить эффективность проекта перепрофилирования производства на основании данных о себестоимости изделий, которые предполагается выпускать, о спросе, стоимости оборудования и его производительности, материалах, используемых для производства, и их закупочной цене.

Сравнительный анализ рассчитанных вариантов позволяет проследить зависимость суммарной прибыли предприятия от объема финансирования и на основе этого анализа сделать вывод о наиболее целесообразной сумме финансирования проекта.

Кроме того, рассматриваемая модель позволила осуществить более эффективную загрузку оборудования.

При расчетах использовались следующие исходные данные:

Целевая функция: минимизация риска.

Изменяемые ячейки:

- доли денежных средств, выделяемых на материально-сырьевые ресурсы;
- количество лопастей каждого вида.

Ограничения:

- сумма долей, на которые необходимо разбить все денежные средства на закупку материально-сырьевых ресурсов, не должна превосходить единицу;
- для каждого вида станка время обработки не должно превышать ежемесячного эффективного времени его работы;
- прибыль не должна быть ниже заданного уровня;
- количество выпускаемых изделий по каждому виду не должно превышать определенного объема.

Исходные данные по модели и полученные результаты приведены в Приложении 2. Расчеты показали, что при минимальной дисперсии доходности завод производит 102 лопасти (табл. 2.7) и получает прибыль не ниже заданного уровня (5 млн руб.), а именно 5 021 998 руб.

Таблица 2.7

Количество изделий каждого вида

x_1	22
x_2	21

Окончание табл. 2.7

x_3	28
x_4	31
Итого	102

Модель расширения производства по критерию максимизации прибыли и с ограничением сверху по уровню риска

Данная модель рассчитана на ситуацию, когда предприятие принимает решение расширить производство выпускаемых изделий. В отличие от предыдущих моделей она нацелена на получение максимальной прибыли, при этом устанавливается предельная граница допустимого риска.

Постановка задачи включает в себя *целевую функцию* (получение максимальной прибыли) и следующие *ограничения*:

- сумма долей, на которые необходимо разбить все денежные средства на закупку материально-сырьевых ресурсов, не должна превосходить единицу;
- для каждого вида станка время обработки не должно превышать ежемесячного эффективного времени его работы;
- дисперсия доходности не должна превышать заданного уровня;
- количество выпускаемых изделий по каждому виду должно удовлетворять ограничениям снизу и сверху.

Исходные данные по модели представлены в Приложении 3. При расчете модели были получены следующие результаты (табл. 2.8 и 2.9).

Таблица 2.8

Доли денежных средств на закупку материально-сырьевых ресурсов

y_1	0,039
y_2	0,093
y_3	0,01
y_4	0,008
y_5	0,008
y_6	0,216
y_7	0,136
y_8	0,257
y_9	0,101

Таблица 2.9

Количество изделий каждого вида

x_1	8
x_2	20
x_3	2
x_4	2
x_5	2
x_6	42
x_7	26
x_8	50
x_9	19
Итого	171

Таким образом, согласно выделенным средствам завод должен выпускать больше лопастей 8-го и 6-го вида и меньше лопастей 3-, 4-, 5-го видов.

Расчеты показали, что от реализации 171-й лопасти завод получит прибыль в размере 6 005 694 руб. при дисперсии доходности, равной 40 310 руб.

Модель перепрофилирования производства по критерию максимизации прибыли и с ограничением сверху по уровню риска

Эта модель позволяет предприятию перепрофилировать производство и получить максимальную прибыль при ограниченном риске.

Описанная модель состоит из *целевой функции* — максимизация прибыли и *ограничений*:

- сумма долей, на которые необходимо разбить все денежные средства на закупку материально-сырьевых ресурсов, не должна превосходить единицу;
- для каждого вида станка время обработки не должно превышать ежемесячного эффективного времени его работы;
- дисперсия доходности не должна превышать заданного уровня;
- количество выпускаемых изделий по каждому виду не должно превышать определенного объема.

Исходные данные по модели и результаты расчетов приведены в Приложении 4.

Моделирование показало, что целесообразно выпускать лопасть 1-го вида (табл. 2.10).

Таблица 2.10

Количество изделий каждого вида

x_1	110
x_2	28
x_3	15
x_4	45
Итого	198

Количество лопастей, выпускаемых по данной производственной программе, равно 198. При этом завод получит прибыль в размере 5 291 700 руб. при дисперсии доходности, равной 20 560 руб.

Разработанные двухкритериальные экономико-математические модели охватывают наиболее важные области решения задач управления финансовыми ресурсами завода. Кроме того, модели позволяют провести комплексное исследование деятельности предприятия, определить и построить оптимальную производственную программу и тем самым повысить эффективность предприятия.

Благодаря применению приведенных моделей предприятие получало прибыль в среднем на 10—30% больше, чем за аналогичный период в прошлом, что свидетельствует о перспективности их использования.

При применении этих моделей происходит экономия ресурсов предприятия в результате оптимального их использования.

Расчеты, осуществленные в целях оптимизации деятельности реального предприятия, позволили получить положительный экономический эффект от внедрения разработанных экономических моделей. Благодаря своей универсальности предлагаемые модели могут применяться и в других отраслях промышленного производства, где в качестве критериев эффективности работы предприятия используются такие показатели, как ожидаемая доходность по всему портфелю выпускаемой продукции и рыночный риск.

Актуальность предложенных моделей оптимизации управления финансовыми ресурсами в логистике производства связана также с тем, что в периоды кризисного развития экономики объем предложения заемных средств на финансовом рынке резко сокращается, а условия получения кредита многократно усложняются. В этой ситуации более тонкая настройка производственно-финансовой деятельности предприятия с использованием современного инструментария количественного анализа его экономических показателей может оказаться весьма эффективной.

ГЛАВА 3

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМИ РЕСУРСАМИ ПРИ СОЗДАНИИ НОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

3.1. КРЕДИТОВАНИЕ ПРОЕКТА СОЗДАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Последнее десятилетие развития отечественной промышленности характеризовалось, с одной стороны, сменой форм собственности для многих предприятий, с другой — возникновением проблем в области инвестиционного управления. В то же время пример развития реального сектора экономики как в нашей стране, так и за рубежом свидетельствует о том, что стратегически эффективная деятельность предприятий, обеспечение высоких темпов экономического роста и повышение конкурентоспособности в рыночной экономике в значительной мере определяются их *инвестиционной активностью*.

Одной из отличительных черт развития российской экономики на протяжении 1999–2006 гг. являлся опережающий рост инвестиций в основной капитал по сравнению с динамикой ВВП и выпуском продукции базовых отраслей экономики. Лидирующие позиции в использовании инвестиций заняли отрасли по производству оборудования для нефтяной и химической промышленности, а также отрасли машиностроения, традиционно ориентированные на внутренний рынок, — железнодорожное и металлургическое машиностроение.

Российский рынок с его обширным потенциалом — на сегодняшний день один из самых привлекательных для инвесторов рынков, но в то же время и один из наиболее рискованных. Основные препятствия для притока капитала в Россию — это неэффективность законодательства, чрезмерные налоги, отсутствие механизма защиты инвестиций, криминогенность обстановки, распространение коррупции. Именно поэтому для государства очень важно сегодня улучшить инвестиционный климат нашей страны.

В экономике большинства стран мира инвестиции осуществляются за счет внутренних источников. Среди них амортизация стоит на первом месте. В общем объеме осуществляемых валовых вложений на нее приходится 60–70%. В России на сегодняшний день имеются огромные фонды, большая часть которых не используется, тем самым амортизационные отчисления из инвестиционного ресурса превращаются в тяжкое бремя. В связи с этим особую актуальность приобретает создание в нашей стране механизма, позволяющего переместить активы, не нашедшие эффективного применения, от одного юридического лица к другому, способному извлечь из них реальную выгоду. В таких условиях особое значение имеет деятельность по продаже активов, предоставлению их в аренду или финансовый лизинг, т.е. любая из возможных схем создания среды, позволяющей активам перемещаться.

Существует достаточно много определений того, что же такое инвестиции. В соответствии с законодательством Российской Федерации ***инвестиции*** определяются как денежные средства, целевые банковские вклады, паи, акции и другие ценные бумаги, технологии, машины, оборудование, лицензии, кредиты, любое другое имущество или имущественные права, интеллектуальные ценности, вкладываемые в объекты предпринимательской и других видов деятельности в целях получения прибыли или достижения другого социального эффекта. Далее мы будем рассматривать *реальные инвестиции*, т.е. вложения в материальные и нематериальные активы, формирующие основной и оборотный капиталы предприятия.

Для оценки эффективности долгосрочных капиталовложений существует несколько традиционных **критериев**, к которым прежде всего относится *чистая приведенная стоимость проекта* (NPV), *внутренняя ставка доходности* (IRR), *индекс рентабельности* (PI), *срок окупаемости* (PP) и др. При расчете каждого из этих показателей используются дисконтированные притоки и оттоки денежных средств в течение нескольких временны́х периодов. Эти денежные потоки определяются однозначно, когда речь идет о капиталовложениях в предприятие, выпускающее о д и н вид продукции. Если же предприятие выпускает н е с к о л ь к о видов продукции, используя при этом для выпуска каждого вида одни и те же материально-сырьевые ресурсы и одни и те же машины и оборудование, то определение количества приобретаемого оборудования, производственной программы предприятия, а следовательно, и соответствующих притоков и оттоков денежных средств является во многих случаях задачей, имеющей неединственное решение. Примером такого предприятия может быть мебельная фабрика. Основные виды ее материально-сырьевых ресурсов — это древесина и лакокрасочные материалы для производства столов, стульев, полок и т.п. В условиях ограничений на производственные мощности предприятия, объемы материально-сырьевых ресурсов и рыночного спроса на продукцию необходимо для каждого временно́го периода выбрать такую производственную программу, чтобы при расчете, например, NPV проекта получить наибольшую его величину. Далее рассмотрены методы решения подобной задачи.

3.2. ОДНОПЕРИОДНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ ПРИ СОЗДАНИИ НОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

В условиях рыночной экономики особое значение приобретает адекватное управление инвестиционной политикой предприятия. Это определяется рядом факторов. Прежде всего, как правило, эффект инвестиционных решений влияет на многие показатели работы предприятия в течение нескольких лет. Например, приобретение дорогостоящего оборудования связано с иммобилизацией средств предприятия в течение длительного времени.

Ошибочное решение о необходимости приобретения оборудования может иметь серьезные последствия, поэтому крупные капиталовложения должны быть всегда оправданны. При недостаточном объеме инвестиций в основные средства оборудование фирмы может оказаться устаревшим, не будет отвечать требованиям современного производства и не обеспечит успешного развития в условиях конкуренции. Из-за нехватки производственной мощности фирма может потерять часть рынка, восстановление которой обычно требует больших временны́х и финансовых затрат. С другой стороны, избыточные инвестиции приводят к простою оборудования, следовательно, капиталовложение неэффективно.

При распределении инвестиционных средств необходимо учитывать прогноз спроса на выпускаемую продукцию, что также влияет на виды и количество единиц приобретаемых машин и оборудования.

Рассмотрим, каким образом можно учесть ограничения на инвестируемые финансовые средства, производственные мощности оборудования и спрос на выпускаемую продукцию для ситуации, когда инвестор в результате осуществления инвестиционного проекта хотел бы максимизировать прибыль от реализации продукции на заданном временно́м интервале.

Далее будем предполагать, что *жизненный цикл инвестиционного проекта* имеет три фазы: предынвестиционную, инвестиционную и эксплуатационную. Первая фаза связана с проведением аналитической работы и оценкой эффективности инвестиционного проекта (в данном случае речь идет о создании предприятия, которое будет выпускать несколько видов продукции). На второй фазе (в случае принятия положительного решения на первой фазе) осуществляется непосредственно создание предприятия. Временны́е и финансовые затраты на этой фазе могут быть учтены, например, с использованием методов сетевого планирования, предложенных в [48]. И наконец, на третьей фазе выпускается готовая продукция, за счет реализации которой инвестор компенсирует свои затраты и получает прибыль.

Далее будем полагать, что инвестор использует для создания предприятия, которое будет выпускать n видов продукции, кредит в объеме V. Время, в течение которого единица продукции вида i обрабатывается на оборудовании вида p, обозначим через t_{ip} ($i = 1, \ldots, n$; $p = 1, \ldots, K$, где K — общее число видов оборудования, используемых для выпуска всей номенклатуры продукции предприятия).

Прогнозируемый объем спроса на продукцию вида i в течение жизненного цикла проекта обозначим через Pt_i ($i = 1, \ldots, n$), цену реализации единицы продукции вида i — через a_i, переменные затраты — через b_i, а постоянные затраты — через $Z_{\text{пост}}$. Тогда **задача наиболее эффективного использования инвестиционных ресурсов по критерию максимизации прибыли** может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x_i - Z_{\text{пост}} \to \max, \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ip}x_i \le y_p\tau_p, \quad p = \overline{1, K}, \tag{3.2}$$

$$d\sum_{p=1}^{K} y_p S_p + \sum_{p=1}^{K} y_p\gamma_p \le V, \tag{3.3}$$

$$x_i \ge 0, x_i \le Pt_i, x_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{1, n}; \quad y_p \ge 0, y_p \in \mathbf{Z}, p = \overline{1, K}, \tag{3.4}$$

где x_i — объем выпуска продукции вида i;

y_p — количество приобретаемых единиц оборудования вида p;

τ_p — время беспростойной работы оборудования вида p ($p = 1, ..., K$), которое возможно по техническим требованиям на эксплуатационной фазе проекта, т.е. это календарное время эксплуатационной фазы за вычетом времени на переналадку, регламентное обслуживание и другие виды работ, при проведении которых оборудование вида p не может использоваться в производственном процессе;

S_p — размер производственной площади, необходимой для размещения единицы оборудования вида p;

γ_p — цена единицы оборудования вида p;

d — цена (покупки или аренды) одного квадратного метра производственной площади предприятия.

Задача (3.1)–(3.4) принадлежит к классу задач целочисленного программирования и может быть решена с использованием методов, изложенных в [48], и программного пакета QSB. Решением задачи будут компоненты вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ и вектора $y = (y_1, ..., y_K)$. Это решение определяет, сколько единиц каждого оборудования необходимо приобрести при реализации инвестиционного проекта по созданию предприятия и какой объем x_i продукции вида i необходимо выпустить, чтобы максимизировать целевую функцию прибыли (3.1) в задаче (3.1)–(3.4).

☐ Рассмотрим полученную задачу эффективного использования инвестиционных ресурсов на примере реализации инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики, занимающейся производством трех видов продукции — столов, стульев и полок. Предположим, что для производства этих изделий будут использоваться три вида оборудования: токарные, фрезерные станки и сверлильные установки. При этом ожидаемая рыночная цена столов составляет 3000 руб. за штуку, стульев — 1500 руб., полки продаются по 300 руб. Переменные затраты фабрики на производство стола, стула и полки равны соответственно 2450, 1180 и 220 руб., а постоянные затраты составляют 173 000 руб. Кроме того, предположим, что известен объем спроса на продукцию фабрики: 350 столов, 420 стульев и 800 полок в год. Нормативы времени в часах, затрачиваемого на обработку каждого вида продукции на токарных и фрезерных станках, на сверлильных установках, приведены в табл. 3.1.

Пусть также известно, что время беспростойной работы оборудования каждого вида, которое возможно по техническим требованиям на эксплуатационной фазе проекта (τ_p), составляет 6,15 ч в день для токарных станков, 6,05 ч в день для фрезерных станков и 7,38 ч в день для сверлильных установок; производственная площадь, необходимая для размещения единицы оборудования каждого вида (S_p), равна для токарных, фрезерных станков и сверлильных установок соответственно 1,7; 1,5 и 1 м^2.

Таблица 3.1

Нормативы времени на обработку продукции, ч

Вид оборудования	*Столы*	*Стулья*	*Полки*
Токарный станок	0,53	0,28	0,17
Фрезерный станок	0,33	0,21	0,15
Сверлильная установка	0,12	0,07	0,03

В то же время цена токарного станка составляет 20 000 руб., фрезерного станка — 36 000 руб., а сверлильной установки — 18 000 руб. Цена аренды одного квадратного метра производственной площади предприятия — 500 руб., а доступный объем кредитных ресурсов, используемых для реализации инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики, — 1,5 млн руб.

С учетом приведенных данных задача эффективного использования инвестиционных ресурсов мебельной фабрики будет выглядеть следующим образом:

$$550x_1 + 320x_2 + 80x_3 - 173\,000 \to \max,$$

$$0{,}53x_1 + 0{,}28x_2 + 0{,}17x_3 \le y_1 \cdot 6{,}15 \cdot 260,$$
$$0{,}33x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}15x_3 \le y_2 \cdot 6{,}05 \cdot 260,$$
$$0{,}12x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}03x_3 \le y_3 \cdot 7{,}38 \cdot 260,$$

$$500 \cdot (1{,}7y_1 + 1{,}5y_2 + y_3) + 20\,000y_1 + 36\,000y_2 + 18\,000y_3 \le 1\,500\,000,$$

$$x_1 \le 350;\ x_2 \le 420;\ x_3 \le 800,$$

$$x_i \ge 0,\ x_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{1,n};\quad y_p \ge 0, y_p \in \mathbf{Z}, p = \overline{1,K},$$

где x_1, x_2, x_3 — количество столов, стульев и полок соответственно, которое необходимо выпускать мебельной фабрике для наиболее эффективного использования ресурсов;

y_1, y_2, y_3 — количество приобретаемых токарных, фрезерных станков и сверлильных установок соответственно.

Решением данной оптимизационной задачи является *оптимальная производственная программа* мебельной фабрики: ($x_1 = 324$, $x_2 = 67$, $x_3 = 0$), а также *оптимальный объем закупки оборудования*, необходимого для производства продукции: ($y_1 = 31$, $y_2 = 20$, $y_3 = 6$).

Таким образом, решение оптимизационной задачи (3.1)–(3.4) позволяет сделать вывод о том, что при реализации инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики для достижения наиболее эффективного варианта использования инвестиционных ресурсов необходимо приобрести 31 токарный станок, 20 фрезерных станков и 6 сверлильных установок, с помощью которых фабрика будет выпускать 324 стола и 67 стульев в год. В то же время при ожидаемом уровне цен и норм затрат на производство продукции для оптимизации использования инвестиционных ресурсов фабрике целесообразно полностью отказаться от производства полок. ■

Если продолжительность эксплуатационной фазы проекта достаточно велика и составляет год и более, то **с учетом темпов инфляции** произойдет увеличение цен как на выпускаемую продукцию, так и на материально-сырьевые ресурсы производства. Проанализируем, как будет меняться решение задачи (3.1)–(3.4) в этом случае при условии, что изменение цен происходит линейно относительно темпов инфляции.

Далее будем предполагать, что если темп инфляции (в долях) составляет ξ, то *цена единицы продукции* меняется как $a_i + a_i n_i \xi$ ($i = 1, ..., n$). Здесь n_i — коэффициент, отражающий темп изменения цены с учетом инфляции. Если $n_i > 1$, то рост цены на продукцию вида i опережает темп инфляции. Если $n_i < 1$, то рост цены на продукцию вида i отстает от темпа инфляции.

Переменные затраты на единицу продукции вида i представим следующим образом: $b_i = b_i^1 + b_i^2$. Здесь b_i^1 — переменные затраты на материально-сырьевые ресурсы; b_i^2 — прочие переменные затраты.

Пусть потребление материально-сырьевых ресурсов для выпуска единицы продукции вида i задается величинами $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{iL}$, а стоимость единицы материально-сырьевого ресурса вида j ($j = 1, ..., L$) — величиной β_j. Тогда *переменные затраты на всю производственную программу* $x = (x_1, ..., x_n)$ при уровне инфляции ξ можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{L} (\beta_j \alpha_{ij} + m_j \beta_j \alpha_{ij} \xi), \tag{3.5}$$

где m_j — коэффициент, отражающий степень изменения цены на материально-сырьевой ресурс j-го вида при инфляции ξ.

С учетом формулы (3.5) целевая функция (3.1) при инфляции ξ будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i n_i \xi)\, x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{L} (\beta_j \alpha_{ij} + m_j \beta_j \alpha_{ij} \xi) - Z_{\text{пост}}. \tag{3.1′}$$

☐ Предположим, что в рассмотренном ранее примере инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики закладывается уровень инфляции, составляющий 12% в год. При этом для простоты изложения ограничимся рассмотрением двух основных видов материально-сырьевых ресурсов, используемых для производства мебели, — древесины и лакокрасочных материалов. Нормы расхода данных ресурсов на производство столов, стульев и полок приведены в табл. 3.2. Прочие переменные затраты при выпуске одного стола b_1^2 = 1470 руб., одного стула b_2^2 = 609,5 руб. и одной полки b_3^2 = 45 руб.

Таблица 3.2

Нормы расхода ресурсов на производство продукции

Вид ресурса	*Столы*	*Стулья*	*Полки*
Древесина, м^3	0,80	0,35	0,10
Лакокрасочные материалы, л	5,00	3,20	1,00

Пусть при этом ожидаемая цена закупки древесины составляет 350 руб./м^3, а цена лакокрасочных материалов — 140 руб./л. Тогда при условии, что коэффициент n_i, отражающий темп изменения цены с учетом инфляции, равен 0,94; 0,83 и 0,72 для столов, стульев и полок соответственно, а коэффициент m_j, отражающий степень изменения цены на материально-сырьевые ресурсы, составляет 0,76 и 0,58 соответственно для древесины и лакокрасочных материалов, задачу (3.1′)–(3.4) оптимизации использования инвестиционных ресурсов при создании мебельной фабрики можно сформулировать в следующем виде:

$$3338{,}4x_1 + 1649{,}4x_2 + 325{,}9x_3 - (1470{,}0x_1 + 609{,}5x_2 + 45{,}0x_3) -$$
$$- (1069{,}4x_1 + 622{,}5x_2 + 191{,}0x_3) - 173\,000 \to \max,$$

$$0,53x_1 + 0,28x_2 + 0,17x_3 \le y_1 \cdot 6,15 \cdot 260,$$
$$0,33x_1 + 0,21x_2 + 0,15x_3 \le y_2 \cdot 6,05 \cdot 260,$$
$$0,12x_1 + 0,07x_2 + 0,03x_3 \le y_3 \cdot 7,38 \cdot 260,$$

$$500 \cdot (1,7y_1 + 1,5y_2 + y_3) + 20\,000y_1 + 36\,000y_2 + \\ + 18\,000y_3 \le 1\,500\,000,$$

$$x_1 \le 350; \quad x_2 \le 420; \quad x_3 \le 800,$$

$$x_i \ge 0, x_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{1,n}; \;\; y_p \ge 0, y_p \in \mathbf{Z}, p = \overline{1,K}.$$

Решением данной оптимизационной задачи является *оптимальная производственная программа* мебельной фабрики: ($x_1 = 347$, $x_2 = 24$, $x_3 = 0$), а также *оптимальный объем закупки оборудования*, необходимого для производства продукции: ($y_1 = 31$, $y_2 = 20$, $y_3 = 6$).

Полученный результат свидетельствует о том, что учет инфляции при построении инвестиционного проекта приводит к изменению оптимальной производственной программы в сторону увеличения объема производства столов за счет сокращения производства стульев. При этом количество и состав закупаемого оборудования остались неизменными. ■

В этой ситуации возникает следующий вопрос. Если на начальный момент времени эксплуатационной фазы проекта решена оптимизационная задача (3.1)–(3.4), которая определяет количество закупаемого оборудования для вновь создаваемого предприятия и производственную программу, то *как будет меняться эта программа при линейном росте цен на готовую продукцию и материально-сырьевые ресурсы производства вместе с ростом инфляции*?

Чтобы ответить на этот вопрос, проведем следующий анализ. С учетом целочисленности решения задачи (3.1)–(3.4) число допустимых решений (допустимых производственных программ) есть множество $X = \{x^1, \ldots, x^N\}$, где x^l — одно из допустимых решений $x^l = (x_1^l, \ldots, x_n^l)$ ($l = 1, \ldots, N$), а x^m ($1 \le m \le N$) — оптимальное решение задачи (3.1)–(3.4).

Оценим скорость роста целевой функции (3.1′) на каждом допустимом решении. Для этого определим функцию $f^l(\xi)$ ($l = 1, \ldots, N$) следующим образом:

$$f^l(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i n_i \xi) x_i^l - \sum_{i=1}^{n} x_i^l b_i^2 -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i^l \sum_{j=1}^{L} (\beta_j \alpha_{ij} + m_j \beta_j \alpha_{ij} \xi) - Z_{\text{пост}}. \qquad (3.6)$$

Сравнивая (3.1′) и (3.6), отметим, что $f^l(\xi)$ — это значение целевой функции (3.1′) на допустимом решении x^l. Нетрудно видеть, что $f^l(\xi)$ является линейной функцией ξ при фиксированной производственной программе и, следовательно, скорость ее роста по ξ определяется величиной первой производной по ξ , т.е. следующим выражением:

$$\frac{\mathrm{d}f^l(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \sum_{i=1}^{n} a_i n_i x_i^l - \sum_{i=1}^{n} x_i^l \sum_{j=1}^{L} m_j \beta_j \alpha_{ij}, \quad l = \overline{1, N}. \qquad (3.7)$$

Далее будем считать, что множество $X = \{x^1, ..., x^N\}$ упорядочено по возрастанию производных:

$$(f^1(\xi))', (f^2(\xi))', ..., (f^N(\xi))', \text{ т.е. } (f^1(\xi))' \le (f^2(\xi))' \le ... \le (f^N(\xi))'.$$

Поэтому если для исходной задачи (3.1)–(3.4) оптимальным является решение $\boldsymbol{x}^N$, то оно остается оптимальным и для задачи (3.1′)–(3.4) при любом значении $\xi \in (0, \infty)$.

Рисунок 3.1 дает наглядную графическую интерпретацию последнего утверждения. При $\xi = 0$ значение $f^N(\xi) > f^l(\xi)$ $(l = 1, ..., N - 1)$ в силу оптимальности производственной программы для

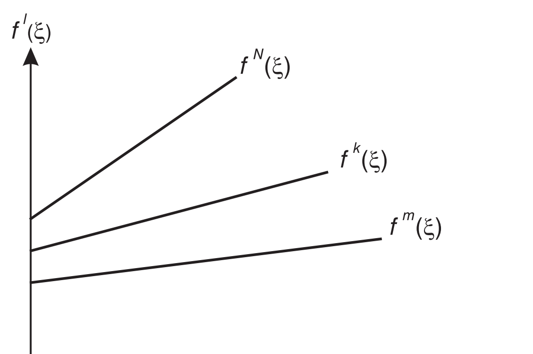

Рис. 3.1. Ситуация неизменности оптимального решения в условиях инфляции

задачи (3.1)–(3.4). Далее, с учетом того, что $(f^N(\xi))' > (f^l(\xi))'$ ($l = 1, ..., N-1$), значение функции $f^N(\xi)$ (а значит, и значение целевой функции (3.1′) на решении x^N) остается наибольшим при любом значении параметра инфляции ξ.

Исследуем ситуацию, когда о п т и м а л ь н ы м является решение $\boldsymbol{x^m}$($1 \le m < N$). В этом случае с ростом ξ оптимальное решение задачи (3.1′)–(3.4) будет меняться. Это связано с тем, что, начиная с некоторого ξ_k, $k = m + 1, ..., N$, будет выполняться неравенство

$$f^k(\xi) \ge f^m(\xi) \quad \forall \xi \ge \xi_k. \tag{3.8}$$

Значение ξ_k, при котором $f^k(\xi) = f^m(\xi)$, можно определить из следующего соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i n_i \xi_k)x_i^k - \sum_{i=1}^{n} x_i^k b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^k \sum_{j=1}^{L}(\beta_j \alpha_{ij} + m_j \beta_j \alpha_{ij} \xi_k) - Z_{\text{пост}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i n_i \xi_k)x_i^m - \sum_{i=1}^{n} x_i^m b_i^2 -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} x_i^m \sum_{j=1}^{L}(\beta_j \alpha_{ij} + m_j \beta_j \alpha_{ij} \xi_k) - Z_{\text{пост}}. \tag{3.9}$$

Разрешая уравнение (3.9) относительно ξ_k при $k = m + 1, ..., N$, получим

$$\xi_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^m b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^k \sum_{j=1}^{L} \beta_j \alpha_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_i^m \sum_{j=1}^{L} \beta_j \alpha_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i n_i)x_i^k - \sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i n_i)x_i^m - \sum_{i=1}^{n} x_i^k \sum_{j=1}^{L} m_j \beta_j \alpha_{ij} + \sum_{i=1}^{n} x_i^m \sum_{j=1}^{L} m_j \beta_j \alpha_{ij}} \tag{3.10}$$

Определив все точки ξ_k по формуле (3.10), выберем среди них минимальное значение ξ_K, т.е. $\xi_K = \min\limits_k \xi_k$ ($k = m + 1, ..., N$; $m + 1 < K \le N$).

Очевидно, что на интервале изменения инфляции $\xi \in (0, \xi_K)$ оптимальным будет $\boldsymbol{x^m}$. При уровне инфляции более ξ_K оптимальным станет решение $\boldsymbol{x^K}$. Этот факт имеет следующую геометрическую интерпретацию (рис. 3.2).

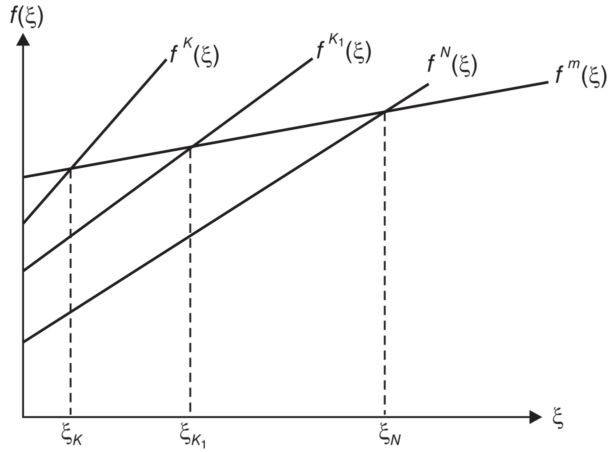

Рис. 3.2. Определение интервала устойчивости решения

Если $K < N$, то при дальнейшем увеличении ξ получим, что для некоторого значения ξ_{K_1} ($\xi_{K_1} > \xi_K$) значение функции $f^{K_1}(\xi) > f^K(\xi)$ при $K_1 > K$, $\xi > \xi_{K_1}$, и это означает, что если уровень инфляции будет больше чем ξ_K, то оптимальным для задачи (3.1′)–(3.4) будет уже решение $\boldsymbol{x}^{K_1}$ ($K_1 > K$).

Продолжим эту процедуру до тех пор, пока оптимальным не станет решение $\boldsymbol{x}^N$. Последующего перехода на другие оптимальные решения не произойдет при дальнейшем увеличении уровня инфляции на интервале (ξ_N, ∞). Это следует из того, что $(f^N(\xi))' > (f^l(\xi))'$ для всех $l = 1, ..., N - 1$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $X = \{x^1, ..., x^N\}$ — множество допустимых решений задачи (3.1′)–(3.4). Если оптимальным решением (3.1′)–(3.4) при $\xi = 0$ является решение x^N, то оно останется оптимальным и для любого уровня инфляции $\xi \in (0, \infty)$. Если же оптимальным решением задачи (3.1′)–(3.4) является решение x^m ($1 \le m < N$), то существует такое разбиение интервала изменения инфляции $(0, \infty)$ на конечное число отрезков (не более чем $N - m + 1$), что каждому отрезку можно поставить в соответствие одно из допустимых решений множества X, которое будет оставаться оптимальным при изменении инфляции в рамках соответствующего отрезка.

☐ Используя утверждение 1, проведем **анализ устойчивости оптимальной производственной программы** мебельной фабрики, полученной при решении задачи (3.1)–(3.4) по данным рассмотренного ранее условного примера. Определим, как будет меняться эта программа при линейном росте цен на готовую продукцию и материально-сырьевые ресурсы производства вместе с ростом инфляции.

В целях упрощения расчетов рассмотрим множество допустимых решений задачи (3.1)–(3.4), состоящее из четырех допустимых решений вида:

$x^1 = (131; 331; 95);$ $\qquad$ $x^3 = (324; 67; 0);$

$x^2 = (152; 349; 0);$ $\qquad$ $x^4 = (348; 21; 0).$

Далее, пользуясь приведенной методикой, оценим скорость роста целевой функции (3.1′) на каждом допустимом решении. С этой целью определим функции $f^l(\xi)$ $(l = 1, ..., 4)$ для каждого допустимого решения по формуле (3.6):

$$\begin{aligned} f^1(\xi) &= (3000 + 3000 \cdot 0{,}94 \cdot \xi) \cdot 131 + (1500 + 1500 \cdot 0{,}83 \cdot \xi) \cdot 331 + \\ &+ (300 + 300 \cdot 0{,}72 \cdot \xi) \cdot 95 - 1470 \cdot 131 - 609{,}5 \cdot 331 - 45 \cdot 95 - \\ &- [131 \cdot (980 + 744{,}8\xi) + 331 \cdot (570{,}5 + 433{,}58\xi) + \\ &+ 95 \cdot (175 + 133\xi)] - 173\,000 = 12\,570 + 548\,316{,}2\xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^2(\xi) &= (3000 + 3000 \cdot 0{,}94 \cdot \xi) \cdot 152 + (1500 + 1500 \cdot 0{,}83 \cdot \xi) \cdot 349 - \\ &- 1470 \cdot 152 - 609{,}5 \cdot 349 - [152 \cdot (980 + 744{,}8\xi) + \\ &+ 349 \cdot (570{,}5 + 433{,}58\xi)] - 173\,000 = 22\,280 + 598\,616\xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3_{\text{опт}}(\xi) &= (3000 + 3000 \cdot 0{,}94 \cdot \xi) \cdot 324 + (1500 + 1500 \cdot 0{,}83 \cdot \xi) \cdot 67 - \\ &- 1470 \cdot 324 - 609{,}5 \cdot 67 - [324 \cdot (980 + 744{,}8\xi) + \\ &+ 67 \cdot (570{,}5 + 433{,}58\xi)] - 173\,000 = 26\,640 + 726\,729{,}9\xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(\xi) &= (3000 + 3000 \cdot 0{,}94 \cdot \xi) \cdot 348 + (1500 + 1500 \cdot 0{,}83 \cdot \xi) \cdot 21 - \\ &- 1470 \cdot 348 - 609{,}5 \cdot 21 - [348 \cdot (980 + 744{,}8\xi) + \\ &+ 21 \cdot (570{,}5 + 433{,}58\xi)] - 173\,000 = 25\,120 + 739\,209{,}4\xi. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что данный ряд функций упорядочен по возрастанию производных $(f^1(\xi))' \le (f^2(\xi))' \le (f^3(\xi))' \le (f^4(\xi))'$, причем оптимальная производственная программа мебельной фабрики соответствует решению x^3. Следовательно, согласно утверждению 1 можно определить уровень инфляции ξ_k, задающий *границу устойчивости* оптимальной производственной программы x^3 мебельной фабрики. При этом при росте инфляции выше уровня ξ_k производственный план x^3 перестанет быть оптимальным и его место займет производственная программа x^4, обеспечивающая достижение наибольшего значения производной функции $f^l(\xi)$ на множестве допустимых решений задачи (3.1)–(3.4).

Определяя уровень инфляции ξ_k путем подстановки в соотношение (3.10) данных условного примера, получим $\xi_k = 0{,}12$.

Таким образом, на основании проведенных вычислений можно сделать вывод, что при изменении инфляции в пределах от 0 до 12% годовых для достижения оптимального использования ресурсов мебельной фабрике необходимо придерживаться производственной программы, задаваемой вектором x^3 и заключающейся в производстве 324 столов и 67 стульев в год, а в случае роста инфляции выше 12% годовых оптимальная программа производства мебели задается вектором x^4 и соответствует производству 348 столов и 21 стула. ■

Однопериодная модель проекта создания нового предприятия в условиях интервальной оценки переменных затрат и цен на выпускаемую продукцию

Рассмотрим задачу оптимизации использования кредита в объеме V при решении задачи (3.1)–(3.4) в ситуации, когда не удается точно оценить переменные издержки b_i ($i = 1, ..., n$) и стоимость выпускаемой продукции a_i ($i = 1, ..., n$). На практике такое вполне возможно из-за того, что предынвестиционная и инвестиционная фазы проекта суммарно могут превышать год.

Будем считать, что b_i может принимать любые значения на интервале $\left[b_i^1; b_i^2\right]$, т.е. $b_i \in \left[b_i^1; b_i^2\right]$, а $a_i \in \left[a_i^1; a_i^2\right]$, $i = 1, ..., n$. Очевидно, что в этом случае значения $c_i = a_i - b_i$ ($i = 1, ..., n$) также будут принадлежать некоему интервалу $\left[c_i^1; c_i^2\right]$, при этом $c_i^1 = \max\left\{0, a_i^1 - b_i^2\right\}$, а $c_i^2 = \max\left\{0, a_i^2 - b_i^1\right\}$, $i = 1, ..., n$.

Таким образом, маржа по каждому виду выпускаемой продукции принимает все возможные значения на выпуклом многограннике $P = \prod_{i=1}^{n}\left[c_i^1, c_i^2\right]$. Учитывая, что множество допустимых производственных программ $X = \{x^1, ..., x^N\}$ конечно в силу специфики ограничений (3.2)–(3.4), рассмотрим задачу разбиения исходного многогранника P на множества $M_{n1}, M_{n2}, ..., M_{nL}$ ($L \le N$), обладающие следующими свойствами:

1. $\bigcup_{j=1}^{L} M_{nj} = P$.

2. При изменении маржи $c = (c_1, ..., c_n)$ на множестве M_{nj} оптимальной остается одна и та же производственная программа x^j.

Для решения этой задачи выясним, какие из производственных программ $x^1, \ldots, x^N$ могут быть оптимальными при изменении маржи на многограннике P. Обозначим значение целевой функции $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k$ на производственной программе x^k через f^k, т.е. $f^k = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k$, и, соответственно, через f_1^k обозначим значение $\sum_{i=1}^{n} c_i^1 x_i^k$ и через f_2^k — значение $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 x_i^k$. Вычислим значения f_1^k и f_2^k для всех $k = 1, \ldots, N$. Далее сформируем множество *Opt* производственных программ, которые могут быть оптимальными при каком-либо значении маржи $c \in P$. Для этого выберем производственную программу x^d, удовлетворяющую условию

$$f_2^d = \max_{k=\overline{1,N}} f_2^k, \tag{3.11}$$

и производственную программу x^m, удовлетворяющую условию

$$f_1^m = \max_{k=\overline{1,N}} f_1^k. \tag{3.12}$$

Обе программы x^d и x^m включим в множество *Opt*. Кроме того, включим в множество *Opt* все производственные программы, для которых $f_2^k > f_1^m$ ($k = 1, \ldots, N$; $k \neq d$; $k \neq m$). Далее очевидно, что производственная программа $x^j \in Opt$ будет оптимальной на множестве $M_{nj} \in P$, которое задается следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} c_i^1 \le c_i \le c_i^2, \quad i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^j \ge \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k \quad \forall x_k \in Opt; \quad k \neq j. \end{cases} \tag{3.13}$$

Очевидно, что множество, заданное этой системой неравенств, является выпуклым многогранником. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. Если в задаче (3.1)–(3.4) маржа по каждому виду выпускаемой продукции изменяется на множестве $P = \prod_{i=1}^{n} \left[c_i^1, c_i^2 \right]$, то гиперпараллелепипед P может быть разбит на конечное число многогранников M_{n1}, M_{n2}, ..., M_{nL} таким образом, что $\bigcup_{j=1}^{L} M_{nj} = P$ и при изменении маржи $c = (c_1, ..., c_n)$ на множестве M_{nj} оптимальной остается производственная программа x^j ($j = 1, ..., L$; $L \leq N$).

Для иллюстрации данного утверждения воспользуемся знакомым условным примером инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики.

☐ Предположим, что цены a_i на выпускаемую продукцию, а также объем переменных затрат на ее производство b_i заранее неизвестны. Предположим также, что по данным маркетингового исследования, проведенного на существующем рынке мебели, удалось установить, что ожидаемые цены на столы будут находиться в интервале $a_1 \in [2750; 3250]$; на стулья — в интервале $a_2 \in [1300; 1800]$; на полки — $a_3 \in [300; 400]$. Будем также считать, что переменные затраты на производство каждого вида мебели могут принимать любые значения на интервале $b_1 \in [1800; 2850]$ для столов, $b_2 \in [850; 1295]$ для стульев и $b_3 \in [100; 260]$ для полок. В таком случае очевидно, что маржа, равная разнице цены продукции фабрики и переменных затрат на ее производство, будет принимать любые значения на интервале $\left[c_i^1; c_i^2\right]$, границы которого определим по приведенным ранее формулам отдельно для каждого вида продукции:

$$c_1^1 = \max\{0; 2750 - 2850\} = 0; \quad c_1^2 = \max\{0; 3250 - 1800\} = 1450;$$

$$c_2^1 = \max\{0; 1300 - 1295\} = 5; \quad c_2^2 = \max\{0; 1800 - 850\} = 950;$$

$$c_3^1 = \max\{0; 300 - 260\} = 40; \quad c_3^2 = \max\{0; 400 - 100\} = 300.$$

Далее, рассматривая множество допустимых производственных программ вида $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$, описанное в предыдущем примере, определим, какие из производственных программ могут быть оптимальными при изменении маржи. Для этого согласно приведенной методике вычислим значения целевых функций f^k задачи (3.1)–(3.4) для каждой производственной программы на нижней (f_1^k) и верхней (f_2^k) границе интервала изменения маржи:

$$f_1^1 = -167\,545; \quad f_2^1 = 359\,900;$$

$$f_1^2 = -171\,225; \quad f_2^2 = 378\,950;$$

$$f_1^3 = -172\,665; \quad f_2^3 = 360\,450;$$
$$f_1^4 = -172\,895; \quad f_2^4 = 351\,550.$$

Очевидно, что наибольшее значение целевой функции на верхней границе изменения маржи $f_2^d = \max\limits_{k=\overline{1,4}} f_2^k$ будет достигнуто при производственной программе $x^d = x^2$, а на нижней границе $f_1^m = \max\limits_{k=\overline{1,4}} f_1^k$ — при производственной программе $x^m = x^1$. Таким образом, обе программы x^1 и x^2 включаем в множество *Opt* производственных программ, которые могут быть оптимальными при каком-либо значении маржи. Кроме того, в множество *Opt* должны попасть все производственные программы, при которых значение целевой функции на верхней границе интервала изменения маржи превышает значение f_1^m. Нетрудно убедиться, что данному условию удовлетворяют все производственные программы из множества допустимых планов решения задачи (3.1)–(3.4). Этим доказано, что в рассматриваемом случае множество допустимых производственных программ $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ совпадает с искомым множеством *Opt*.

Согласно утверждению 2 и изложенной методике определим для каждой допустимой производственной программы мебельной фабрики систему линейных неравенств (3.13), множество решений которой соответствует множеству вариантов размера маржи, на котором данная производственная программа будет оставаться оптимальной:

- для $x^1 = (131;\ 331;\ 95)$

$$\begin{cases} 131c_1 + 331c_2 + 95c_3 \geq 152c_1 + 349c_2; \\ 131c_1 + 331c_2 + 95c_3 \geq 324c_1 + 67c_2; \\ 131c_1 + 331c_2 + 95c_3 \geq 348c_1 + 21c_2; \\ 0 \leq c_1 \leq 1450; \\ 5 \leq c_2 \leq 950; \\ 40 \leq c_3 \leq 300; \end{cases}$$

- для $x^2 = (152; 349; 0)$

$$\begin{cases} 152c_1 + 349c_2 \geq 131c_1 + 331c_2 + 95c_3; \\ 152c_1 + 349c_2 \geq 324c_1 + 67c_2; \\ 152c_1 + 349c_2 \geq 348c_1 + 21c_2; \\ 0 \leq c_1 \leq 1450; \\ 5 \leq c_2 \leq 950; \\ 40 \leq c_3 \leq 300; \end{cases}$$

- для $x^3 = (324; 67; 0)$

$$\begin{cases} 324c_1 + 67c_2 \geq 131c_1 + 331c_2 + 95c_3; \\ 324c_1 + 67c_2 \geq 152c_1 + 349c_2; \\ 324c_1 + 67c_2 \geq 348c_1 + 21c_2; \\ 0 \leq c_1 \leq 1450; \\ 5 \leq c_2 \leq 950; \\ 40 \leq c_3 \leq 300; \end{cases}$$

- для $x^4 = (348; 21; 0)$

$$\begin{cases} 348c_1 + 21c_2 \geq 131c_1 + 331c_2 + 95c_3; \\ 348c_1 + 21c_2 \geq 152c_1 + 349c_2; \\ 348c_1 + 21c_2 \geq 324c_1 + 67c_2; \\ 0 \leq c_1 \leq 1450; \\ 5 \leq c_2 \leq 950; \\ 40 \leq c_3 \leq 300. \end{cases}$$ ■

Однопериодная модель проекта создания нового предприятия с учетом риска

В условиях введенных нами обозначений будем далее считать, что маржа по каждому виду выпускаемой продукции есть случайная величина c_i^q $(i = 1, ..., n; q = 1, ..., m)$ с заданным вероятностным распределением p_l $(l = 1, ..., K)$, $p_l \geq 0$, $\sum_{l=1}^{K} p_l = 1.$

Введем также в рассмотрение следующие дополнительные параметры модели:

d — стоимость аренды каждого квадратного метра производственной площади в год;

T_p — время технологического использования оборудования вида p ($p = 1, \ldots, K$) до полного его физического износа;

t_{ip} — время использования оборудования вида p для выпуска единицы продукции вида i;

γ_p — цена единицы оборудования вида p;

S_p — производственная площадь, занимаемая единицей оборудования вида p.

Оценим *затраты, связанные с амортизацией оборудования* при выпуске единицы продукции вида i:

$$Zat_i^{\text{ам}} = \sum_{p=1}^{K} \gamma_p \frac{t_{ip}}{T_p}. \tag{3.14}$$

Аналогично оценим *затраты, связанные со стоимостью аренды производственной площади* при выпуске единицы продукции вида i:

$$Zat_i^{\text{ар}} = d \sum_{p=1}^{K} S_p t_{ip}. \tag{3.15}$$

Тогда затраты на аренду производственной площади и затраты, связанные с амортизацией оборудования при выпуске единицы продукции вида i, вычисляются следующим образом:

$$Zat_i = Zat_i^{\text{ам}} + Zat_i^{\text{ар}}. \tag{3.16}$$

Соответственно, если продукция вида i выпускается в объеме x_i, то суммарные затраты

$$Zt_i = Zat_i \cdot x_i. \tag{3.17}$$

Введем новую переменную z_i — долю от общего объема инвестиционных ресурсов V, которая будет потрачена на выпуск продукции вида i ($i = 1, \ldots, n$):

$$z_i = \frac{Zat_i \cdot x_i}{V},$$

откуда

$$x_i = \frac{z_i V}{Zat_i}.$$

Далее, используя в качестве количественной оценки риска проекта дисперсию маржи производственной программы и требуя, чтобы ожидаемое значение маржи производственной программы было не ниже величины mr, сформулируем **оптимизационную однопериодную модель проекта создания нового предприятия на минимум риска**:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 z_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \mathrm{cov}_{ij}\, z_i z_j \to \min, \tag{3.18}$$

где σ_i^2 — дисперсия маржи i-го вида выпускаемой продукции;

cov_{ij} — ковариация маржи i-го и j-го видов выпускаемой продукции.

Ограничение на величину дохода

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i \frac{z_i V}{Zat_i} \geq mr, \tag{3.19}$$

где $\bar{c}_i$ — математическое ожидание маржи по i-му виду выпускаемой продукции: $\bar{c}_i = \sum_{q=1}^{m} c_i^q p_q$;

$\frac{z_i V}{Zat_i}$ — объем выпуска продукции вида i ($i = 1, ..., n$) в производственной программе предприятия.

Ограничение на производственные мощности предприятия задается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ip} \frac{z_i V}{Zat_i} \leq y_p \tau_p, \quad p = \overline{1, K}, \tag{3.20}$$

где y_p — количество единиц приобретаемого оборудования вида p;

τ_p — время беспростойной работы оборудования вида p.

Ограничение на объем производственных ресурсов совпадает с аналогичным ограничением для детерминированной модели:

$$d\sum_{p=1}^{K} y_p S_p + \sum_{p=1}^{K} y_p \gamma_p \leq V. \tag{3.21}$$

Ограничение на суммарные затраты по всем составляющим производственной программы x_i ($i = 1, ..., n$) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} Zat_i \cdot x_i \leq V,$$

или, если поделить обе части этого неравенства на V,

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \leq 1, \tag{3.22}$$

$$z_i \geq 0; \quad 0 \leq \frac{z_i V}{Zat_i} \leq Pt_i; \quad y_p \geq 0; \quad y_p \in \mathbf{Z}. \tag{3.23}$$

□ Снова воспользовавшись данными описанного ранее условного примера инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики, продемонстрируем частный случай решения оптимизационной задачи (3.18)–(3.23) на минимум риска. Для этого предположим, что маржа по каждому виду выпускаемой продукции является случайной величиной, принимающей одно из приведенных ниже значений с заданными вероятностями (табл. 3.3).

Пользуясь формулой (3.14), оценим затраты на амортизацию оборудования при выпуске единицы продукции каждого вида. Для расчета воспользуемся данными о нормативах времени, затрачиваемого на обработку столов, стульев и полок на токарных, фрезерных станках и сверлильных установках (см. табл. 3.1). Пусть при этом время эксплуатации до полного износа (T_p) токарных станков составляет 5 лет, фрезерных станков — 8 лет, сверлильных установок — 3 года. Таким образом, получаем, что затраты, связанные с амортизацией оборудования при производстве одного стола, составляют 0,49 руб., одного стула — 0,28 руб., одной полки — 0,18 руб.

Для оценки затрат на аренду производственной площади при выпуске единицы продукции каждого вида воспользуемся формулой (3.15), предполагая при этом, что стоимость аренды производственной площади (d) составляет 62,50 руб./м^2. Таким образом, затраты на аренду производственных площадей на единицу продукции мебельной фабрики составили 94,75; 53,81 и 34 руб., а общие затраты — 95,24; 54,10 и 34,18 руб. для столов, стульев и полок соответственно.

Таблица 3.3

Вероятностное распределение маржи, руб., по видам продукции

Столы		*Стулья*		*Полки*	
c_1	p_1	c_2	p_2	c_3	p_3
0	0,10	0	0,15	0	0,05
350	0,15	150	0,20	150	0,15
1000	0,15	650	0,25	120	0,20
100	0,20	350	0,40	50	0,40
750	0,40	—	—	60	0,20

Далее, для решения оптимизационной задачи на минимум риска (3.18)–(3.23) введем переменную z_i, обозначающую долю общего объема инвестиционных ресурсов V, которая будет потрачена на выпуск продукции каждого вида, а также вычислим дисперсию и среднее значение маржи (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Математическое ожидание и дисперсия маржи по видам продукции

	$\bar{c}_i$	σ_i^2
c_1	522,5	122 368,8
c_2	332,5	48 568,8
c_3	78,5	1812,8

Предположим, что $V = 1{,}5$ млн руб., $mr = 150\,000$ руб. Используя данные, приведенные в табл. 3.5, вычислим также ковариацию маржи производственной программы. Таким образом, получим, что ковариация маржи от производства мебельной фабрикой столов и стульев равна 89 250, столов и полок — 40 650, стульев и полок — 48 165.

Таблица 3.5

Значения вероятностей

$p_{1,2}$	$p_{1,3}$	$p_{2,3}$
0,02	0,01	0,01
0,68	0,22	0,36
0,07	0,07	0,48
0,23	0,27	0,15
—	0,43	—

Тогда оптимизационная задача на минимум риска при реализации инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики будет выглядеть следующим образом:

$$122\,368{,}8z_1^2 + 48\,568{,}8z_2^2 + 1812{,}8z_3^2 +$$
$$+ 2 \cdot (89\,250{,}0z_1z_2 + 40\,650{,}0z_1z_3 + 48\,165{,}0z_2z_3) \to \min,$$

$$522{,}5z_1 \cdot 15\,749{,}1 + 332{,}5z_2 \cdot 27\,728{,}4 + 78{,}5z_3 \cdot 43\,891{,}4 \geq 150\,000,$$

$$8347{,}01z_1 + 7763{,}95z_2 + 7461{,}55z_3 \leq 6{,}15 \cdot y_1,$$
$$5197{,}19z_1 + 5822{,}96z_2 + 6583{,}72z_3 \leq 6{,}05 \cdot y_2,$$
$$1889{,}89z_1 + 1940{,}99z_2 + 1316{,}74z_3 \leq 7{,}38 \cdot y_3,$$

$$62{,}50\cdot(1{,}7y_1+1{,}5y_2+y_3)+20\,000y_1+36\,000y_2+18\,000y_3\le 1\,500\,000,$$

$$0\le 15\,749{,}1z_1\le 350,$$

$$0\le 27\,728{,}4z_2\le 420,$$

$$0\le 43\,891{,}4z_3\le 800,$$

$$z_1+z_2+z_3\le 1.$$

Решением данной оптимизационной задачи будет *набор долей, определяющий оптимальное распределение инвестиционных ресурсов между выпуском продукции каждого вида*: (z_1 = 0,001, z_2 = 0,015, z_3 = 0), а также *оптимальный объем закупки оборудования*, необходимого для производства продукции: (y_1 = 21, y_2 = 16, y_3 = 5). Используя соотношение $x_i=\dfrac{z_iV}{Zat_i}$, перейдем от переменных z_i к переменным x_i, определяющим оптимальный объем выпуска продукции мебельной фабрики. На основании расчетов получим *оптимальную производственную программу*: (x_1 = 20, x_2 = 420, x_3 = 0).

Таким образом, решение рассматриваемой оптимизационной задачи позволяет сделать вывод о том, что для достижения минимального риска при реализации инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики необходимо выпускать 20 столов и 420 стульев и отказаться от производства полок. При этом для осуществления наиболее эффективного варианта использования инвестиционных ресурсов необходимо закупить 21 токарный станок, 16 фрезерных станков и 5 сверлильных установок. ■

3.3. МНОГОПЕРИОДНАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

Рассмотрим задачу оптимизации затрат при создании нового предприятия для случая, когда жизненный цикл проекта включает несколько периодов, на каждом из которых существует вполне определенный спрос по каждому виду выпускаемой продукции. Обозначим число периодов в жизненном цикле проекта через T. В этом случае задача оптимизации затрат, представленная в параграфе 3.2, будет иметь следующий вид:

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{i=1}^{n}a_i^t x_i^t-\sum_{t=0}^{T}\sum_{i=1}^{n}b_i^t x_i^t-\sum_{t=0}^{T}Z_{\text{пост}}^t\to\max, \tag{3.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ip} x_i^t \le y_p \tau_p^t, \quad p = \overline{1,K}; \quad t = \overline{0,T}, \tag{3.25}$$

$$d\sum_{p=1}^{K} y_p S_p + \sum_{p=1}^{K} y_p \gamma_p \le V, \tag{3.26}$$

$$x_i^t \le Pt_i^t, \quad i = \overline{1,n}; \quad t = \overline{0,T}, \tag{3.27}$$

$$x_i^t \ge 0, \quad x_i^t \in \mathbf{Z}; \quad y_p \ge 0, \quad y_p \in \mathbf{Z},$$

где a_i^t — цена реализации единицы продукции вида i на временнóм периоде t;

x_i^t — объем выпуска продукции вида i в период времени t;

b_i^t — переменные затраты на единицу продукции вида i на временнóм периоде t;

$Z_{\text{пост}}^t$ — постоянные затраты на временнóм периоде t;

γ_p — стоимость единицы оборудования вида p;

τ_p^t — эффективное время использования оборудования вида p в период времени t;

t_{ip} — время, в течение которого единица продукции вида i обрабатывается на оборудовании вида p;

Pt_i^t — рыночный спрос на продукцию вида i в период времени t;

y_p — количество единиц оборудования вида p;

V — объем средств, инвестируемых на создание предприятия;

S_p — площадь, занимаемая единицей оборудования вида p;

d — цена аренды одного квадратного метра производственной площади.

С учетом дисконтирования целевая функция (3.24) будет иметь следующий вид:

$$\sum_{t=0}^{T}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^t x_i^t}{(1+D)^t} - \sum_{t=0}^{T}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^t x_i^t}{(1+D)^t} - \sum_{t=0}^{T} \frac{Z_{\text{пост}}^t}{(1+D)^t} \to \max, \tag{3.24′}$$

где D — ставка (коэффициент) дисконтирования.

☐ Для иллюстрации практического применения многопериодной модели оценки эффективности инвестиционного проекта снова рассмотрим пример инвестиционного проекта по созданию мебельной фабрики, выпускающей три вида оборудования: столы, стулья и полки. Осуществим оптимизацию использования инвестиционных ресурсов при реализации данного инвестиционного проекта, исходя из упрощенного предположения, что жизненный цикл проекта составляет четыре квартала. Цены на выпускаемую продукцию, переменные затраты на ее производство, а также эффективное время использования оборудования в каждом из четырех кварталов приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Параметры оптимизационной модели

Квартал	*Вид продукции*	*Цена, руб.*	*Переменные затраты, руб.*	*Эффективное время использования оборудования, ч*	*Спрос на продукцию, шт.*
I	Столы	3000,0	2450,0	6,15	88
	Стулья	1500,0	1180,0	6,05	105
	Полки	300,0	220,0	7,38	200
II	Столы	3090,0	2508,8	6,1	93
	Стулья	1545,0	1208,3	6,02	111
	Полки	309,0	225,3	7,3	212
III	Столы	1515,0	2559,0	6,05	92
	Стулья	303,0	1232,5	5,98	108
	Полки	3120,9	229,8	7,3	210
IV	Столы	3245,7	2648,5	6,02	95
	Стулья	1622,9	1275,6	5,98	114
	Полки	324,6	237,8	7,3	225

Допустим при этом, что постоянные затраты на производство мебели ($Z^t_{\text{пост}}$) составят в первом квартале 43 250 руб., во втором — 44 548 руб., в третьем — 45 216 руб., а в четвертом квартале — 47 476 руб. Тогда многопериодную модель оценки эффективности инвестиционного проекта создания мебельной фабрики можно записать следующим образом:

$$(550x_1^1 + 320x_2^1 + 80x_3^1 - 43\,250)/(1+0,33)^1 +$$

$$+(581,2x_1^2 + 336,7x_2^2 + 83,7x_3^2 - 44\,548)/(1+0,33)^2 +$$

$$+(561,9x_1^3 + 328,0x_2^3 + 82,3x_3^3 - 45\,216)/(1+0,33)^3 +$$

$$+(597,2x_1^4 + 347,2x_2^4 + 86,7x_3^4 - 47\,476)/(1+0,33)^4 \to \max,$$

$$0,53x_1^1 + 0,28x_2^1 + 0,17x_3^1 \le y_1^1 \cdot 6,15 \cdot 65,$$

$$0,33x_1^1 + 0,21x_2^1 + 0,15x_3^1 \le y_2^1 \cdot 6,05 \cdot 65,$$

$$0,12x_1^1 + 0,07x_2^1 + 0,03x_3^1 \le y_3^1 \cdot 7,38 \cdot 65,$$

$$0{,}53x_1^2 + 0{,}28x_2^2 + 0{,}17x_3^2 \le y_1^2 \cdot 6{,}10 \cdot 65,$$
$$0{,}33x_1^2 + 0{,}21x_2^2 + 0{,}15x_3^2 \le y_2^2 \cdot 6{,}02 \cdot 65,$$
$$0{,}12x_1^2 + 0{,}07x_2^2 + 0{,}03x_3^2 \le y_3^2 \cdot 7{,}30 \cdot 65,$$

$$0{,}53x_1^3 + 0{,}28x_2^3 + 0{,}17x_3^3 \le y_1^3 \cdot 6{,}05 \cdot 65,$$
$$0{,}33x_1^3 + 0{,}21x_2^3 + 0{,}15x_3^3 \le y_2^3 \cdot 5{,}98 \cdot 65,$$
$$0{,}12x_1^3 + 0{,}07x_2^3 + 0{,}03x_3^3 \le y_3^3 \cdot 7{,}30 \cdot 65,$$

$$0{,}53x_1^4 + 0{,}28x_2^4 + 0{,}17x_3^4 \le y_1^4 \cdot 6{,}02 \cdot 65,$$
$$0{,}33x_1^4 + 0{,}21x_2^4 + 0{,}15x_3^4 \le y_2^4 \cdot 5{,}98 \cdot 65,$$
$$0{,}12x_1^4 + 0{,}07x_2^4 + 0{,}03x_3^4 \le y_3^4 \cdot 7{,}30 \cdot 65,$$

$$x_1^1 \le 88;\ x_2^1 \le 105;\ x_3^1 \le 200;\ x_1^2 \le 93;\ x_2^2 \le 111;\ x_3^2 \le 212,$$
$$x_1^3 \le 92;\ x_2^3 \le 108;\ x_3^3 \le 210;\ x_1^4 \le 95;\ x_2^4 \le 114;\ x_3^4 \le 225,$$

$$500 \cdot (1{,}7y_1 + 1{,}5y_2 + y_3) + 20\,000y_1 + 36\,000y_2 + 18\,000y_3 \le 1\,500\,000,$$

$$x_i \ge 0, x_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{1,n}; \quad y_p \ge 0, y_p \in \mathbf{Z}, p = \overline{1,K}.$$

Здесь коэффициент дисконтирования $D = 0{,}33$.

Решением данной задачи являются *оптимальная производственная программа* мебельной фабрики с разбиением на кварталы: ($x_1^1 = 88$, $x_2^1 = 105$, $x_3^1 = 200$, $x_1^2 = 93$, $x_2^2 = 111$, $x_3^2 = 212$, $x_1^3 = 92$, $x_2^3 = 108$, $x_3^3 = 210$, $x_1^4 = 95$, $x_2^4 = 114$, $x_3^4 = 225$) и *оптимальный объем закупки оборудования*, необходимого для производства продукции: ($y_1 = 21$, $y_2 = 15$, $y_3 = 4$).

Полученный результат свидетельствует о том, что при применении многопериодной модели оценки эффективности инвестиционного проекта удается получить оптимальную производственную программу мебельной фабрики за четыре квартала, предусматривающую выпуск большего объема продукции, причем в данном случае перераспределение инвестиционных ресурсов происходит таким образом, что в оптимальный план включается производство третьего вида продукции — полок. В то же время благодаря эффекту масштаба, чтобы обеспечить выпуск заданного объема продукции, можно приобрести меньшее число единиц оборудования ($y_2 = 15$, $y_3 = 4$ против предыдущих $y_2 = 16$, $y_3 = 5$). ■

Напомним, что формула расчета NPV проекта имеет следующий вид [7]:

$$NPV = \sum_{t=0}^{T} \frac{S_t - Z_t}{(1+D)^t}, \qquad (3.28)$$

где S_t, Z_t — соответственно приток и отток финансовых средств в период времени t;

D — ставка дисконтирования.

Следовательно, целевая функция (3.24′) представляет собой величину NPV проекта, оптимизация которой происходит за счет варьирования производственными мощностями предприятия и его производственной программой на различных временны́х периодах.

Задача (3.24′)–(3.27) также принадлежит к классу задач целочисленного линейного программирования, переменными в которой являются величины $y_1, \ldots, y_k$, задающие количество единиц закупаемого производственного оборудования, и x_i^t ($i = 1, \ldots, n$; $t = 0, \ldots, T$), задающие объемы выпуска каждого вида продукции на каждом временно́м периоде t.

Как и ранее, здесь можно провести **анализ влияния инфляции на оптимальную производственную программу**.

Вначале заметим, что если задача (3.24′)–(3.27) решена и, следовательно, получен вектор $y = (y_1, \ldots, y_K)$, задающий количество единиц закупаемого оборудования по каждому виду, то оптимальная производственная программа для каждого временно́го интервала t ($t = 0, \ldots, T$) совпадает с решением следующей задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^t x_i^t}{(1+D)^t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^t x_i^t}{(1+D)^t} - \frac{Z_{\text{пост}}^t}{(1+D)^t} \to \max, \qquad (3.29)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ip} x_i^t \le y_p \tau_p^t, \quad t = \overline{1,T};\ p = \overline{1,K_1}, \qquad (3.30)$$

$$0 \le x_i^t \le Pt_i^t, \quad x_i^t \in \mathbf{Z}, \quad i = \overline{1,n}; \quad t = \overline{1,T}, \qquad (3.31)$$

где K_1 — количество единиц приобретаемого оборудования вида K, полученное при решении задачи (3.24′)–(3.27).

Проведем доказательство этого факта следующим образом. Будем исходить от противного, тогда сумма по всем временны́м интервалам t ($t = 0, \ldots, T$) значений целевой функции задачи (3.29)–(3.31) на оптимальных решениях будет отличаться от значения целевой функции на оптимальном решении задачи

(3.24′)–(3.27). Учитывая, что последнее невозможно, получим требуемое утверждение.

С учетом только что доказанного свойства решения задачи (3.29)–(3.31) исследование чувствительности решения задачи (3.24′)–(3.27) может быть проведено по каждому интервалу t ($t = 0, ..., T$). Пусть, как и ранее, *цены на выпускаемую продукцию* при уровне инфляции ξ увеличиваются для i-го вида продукции на временно́м интервале t на величину $a_i^t n_i^t \xi$ ($i = 1, ..., n$) и становятся равными $a_i^t + a_i^t n_i^t \xi$, где n_i^t — коэффициент роста цен на продукцию вида i на временно́м интервале t при инфляции ξ.

Переменные затраты на временно́м периоде t представим как $b_i^t = b_i^{t1} + b_i^{t2}$. Здесь b_i^{t1} — переменные затраты на материально-сырьевые ресурсы в период t; b_i^{t2} — прочие переменные затраты в период t.

Если для всей номенклатуры выпускаемой продукции используется L видов материально-сырьевых ресурсов, то

$$b_i^{t1} = \sum_{j=1}^{L} \beta_j^t \alpha_{ij}, \quad i = \overline{1, n},$$

где β_j^t — цена единицы материально-сырьевого ресурса вида j в интервале времени t;

α_{ij} — норма потребления материально-сырьевого ресурса вида j для производства единицы продукции вида i ($i = 1, ..., n; j = 1, ..., L$).

Далее будем считать, что *цены на материально-сырьевые ресурсы* с ростом инфляции ξ будут меняться на величину $m_j^t \beta_j^t \xi$ (где m_j^t — коэффициент, отражающий степень изменения цены на материально-сырьевой ресурс j-го вида при инфляции ξ в период времени t) и, следовательно, будут равны

$$\beta_j^t + m_j^t \beta_j^t \xi, \quad t = \overline{1, T}; j = \overline{1, L}.$$

С учетом последнего соотношения величина переменных затрат, связанная с покупкой материально-сырьевых ресурсов для выпуска единицы продукции вида i, составит при уровне инфляции ξ следующую величину:

$$b_i^{t1} = \sum_{j=1}^{L} \beta_j^t \alpha_{ij} + \xi \sum_{j=1}^{L} m_j^t \beta_j^t \alpha_{ij}. \tag{3.32}$$

Целевая функция задачи (3.29)–(3.31) с учетом инфляции ξ будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^t x_i^t}{(1+D)^t}+\xi\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i^t a_i^t x_i^t}{(1+D)^t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{t2} x_i^t}{(1+D)^t}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{L}\frac{\beta_j^t \alpha_{ij} x_i^t}{(1+D)^t}-$$

$$-\xi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{L}\frac{m_j^t \beta_j^t \alpha_{ij} x_i^t}{(1+D)^t}-\frac{Z_{\text{пост}}^t}{(1+D)^t}\to \max. \qquad (3.29')$$

Необходимо для каждого значения параметра, задающего уровень инфляции, решить задачу (3.29′)–(3.31). Заметим, что при $\xi = 0$ целевые функции (3.29) и (3.29′) совпадают.

Пусть $X^t = \{x^{t1}, ..., x^{tN}\}$ — множество допустимых решений задачи (3.29)–(3.31), которое, учитывая одну и ту же систему ограничений, совпадает с множеством допустимых решений задачи (3.29′)–(3.31) для любого $\xi \in (0, \infty)$. Пусть x^{tq} — некоторое допустимое решение задачи (3.29′)–(3.31) ($1 \le q \le N$). Обозначим через f^{tq} (ξ) значение целевой функции (3.29′) на решении x^{tq} при уровне инфляции ξ. Далее определим производную по ξ функции $f^{tq}(\xi)$:

$$(f^{tq}(\xi))' = \sum_{i=1}^{n}\frac{n_i^t a_i^t x_i^{tq}}{(1+D)^t}-\sum_{i=1}^{n} x_i^{tq}\sum_{j=1}^{L}\frac{m_j^t \beta_j^t \alpha_{ij}}{(1+D)^t}. \qquad (3.33)$$

Не уменьшая общности, будем считать, что все допустимые решения множества $X^t = \{x^{t1}, ..., x^{tN}\}$ упорядочены по возрастанию производных функций $f^{tq}(\xi)$ ($q = 1, ..., N_t$). Далее, по аналогии с тем, как это было сделано в параграфе 3.2, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть для любого временнóго интервала t ($t=1, ..., T$) для задачи (3.29′)–(3.31) при изменении уровня инфляции ξ на интервале $(0, \infty)$ задано множество всех допустимых решений $X^t = \{x^{t1}, ..., x^{tN}\}$. Если оптимальным решением задачи (3.29′)–(3.31) при $\xi = 0$ является решение x^{tN}, то оно остается оптимальным при любом уровне инфляции ξ из интервала $(0, \infty)$. Если же оптимальным решением задачи (3.29′)–(3.31) является некоторое решение x^{tq} ($1 \le q < N$), то существует такое разбиение интервала изменения инфляции $(0, \infty)$ на конечное число отрезков (не более чем $N - q + 1$), что каждому отрезку можно поставить в соответствие одно из решений множества X^t, которое будет оставаться оптимальным для задачи (3.29′)–(3.31) при любом уровне инфляции из соответствующего отрезка.

В заключение необходимо отметить, что традиционно в работах по финансовому менеджменту при расчете такого финансового показателя, как NPV инвестиционного проекта, вычисляемого по формуле (3.28), вопрос определения притоков и оттоков финансовых ресурсов (S_t и Z_t) остается за рамками рассмотрения теории. По-видимому, предполагается, что решение этой задачи в большой степени носит рутинный, а не исследовательский характер. И это во многом так, если в качестве инвестиционного проекта рассматривается создание предприятия, ориентированного на выпуск одного вида продукции в условиях, когда известно, какой объем продукции может быть реализован на каждом периоде всего жизненного цикла предприятия. Если же речь идет о создании многономенклатурного производства и объемы выпуска по каждому виду продукции могут варьироваться, кроме того, объемы закупаемого оборудования также могут быть различными при фиксированном объеме финансовых средств, выделяемых на реализацию проекта по созданию предприятия, задача определения NPV является нетривиальной. В этом случае она сводится не просто к расчету по известной формуле, а к решению *оптимизационной задачи по определению наилучшего значения NPV проекта*.

Исходными величинами в этой задаче является количество единиц оборудования, которое необходимо приобрести для организуемого производства, а также объем выпуска продукции каждого вида на каждом периоде жизненного цикла проекта.

Если анализируемый инвестиционный проект имеет жизненный цикл несколько лет и более, то при выборе производственной программы предприятия необходимо учитывать отклонение уровня инфляции от прогнозируемых значений, чтобы определить чувствительность той или иной производственной программы к изменению цен на выпускаемую продукцию и на материально-сырьевые ресурсы производства.

3.4. ОДНОПЕРИОДНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЕКТА РАСШИРЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Модели оптимизации NPV, рассмотренные в параграфе 3.2, приемлемы при реализации проекта создания нового предприятия. Если же речь идет о проекте модернизации предприятия в целях *расширения номенклатуры выпускаемой продукции*, то с учетом ранее используемых обозначений может быть предложена следующая оптимизационная однопериодная модель:

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n_1} b_i x_i - Z_{\text{пост}} \to \max, \qquad (3.34)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le L_j + z_j, \quad j = \overline{1, M}, \qquad (3.35)$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} x_i \le z_j, \quad j = \overline{M+1, M_1}, \qquad (3.36)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} x_i \le k_l \tau_l + y_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \qquad (3.37)$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} t_{il} x_i \le y_l \tau_l, \quad l = \overline{K+1, K_1}, \qquad (3.38)$$

$$\sum_{j=1}^{M_1} \alpha_j z_j + \sum_{l=1}^{K_1} \beta_l y_l \le V, \qquad (3.39)$$

$$x_i \le Pt_i, \quad x_i \ge 0. \qquad (3.40)$$

Здесь дополнительно были использованы следующие обозначения:

l_{ij} — норма потребления материально-сырьевого ресурса вида j ($j = 1, ..., M_1$) при выпуске единицы продукции вида i ($i = 1, ..., n_1$);

L_j — объем запаса материально-сырьевого ресурса вида j ($j = 1, ..., M$);

z_j — объем закупок материально-сырьевого ресурса вида j ($j = 1, ..., M_1$);

t_{il} — время использования оборудования вида l ($l = 1, ..., K_1$) для выпуска единицы продукции вида i ($i = 1, ..., n_1$);

k_l — число единиц оборудования вида l ($l = 1, ..., K$), которое использовалось для выпуска традиционной продукции;

y_l — число единиц дополнительного оборудования, необходимого для выпуска новой продукции ($l = K + 1, ..., K_1$);

τ_l — эффективное время использования оборудования вида l;

α_j — цена единицы материально-сырьевого ресурса вида j ($j = 1, ..., M_1$);

β_l — цена единицы оборудования вида l ($l = 1, ..., K_1$).

В данной постановке задачи предполагается, что M видов материально-сырьевых ресурсов используется для выпуска *традиционных* видов продукции, а ресурсы видов $M + 1, ..., M_1$ — только для выпуска *новых* видов продукции $n + 1, ..., n_1$.

Таким образом, оптимальное решение задачи (3.34)–(3.40) заключается в нахождении портфеля выпускаемой продукции x (x_1, ..., x_{n_1}), объема закупаемых материальных ресурсов z (z_1, ..., z_{M_1}) и дополнительного оборудования y (y_1, ..., y_{K_1}), которые в условиях ограничений (3.35)–(3.40) максимизируют целевую функцию (3.34).

Модель (3.34)–(3.40) не учитывает затрат, связанных с непосредственной подготовкой или строительством дополнительных производственных помещений, а также дисконтирование финансовых потоков при реализации данного проекта. Этот учет можно осуществить аналогично тому, как это было сделано в модели (3.24′)–(3.27).

☐ Рассмотрим практическое применение модели расширения производства на знакомом условном примере мебельной фабрики. Допустим, что руководство фабрики приняло решение о расширении номенклатуры выпускаемой продукции за счет изготовления садовой мебели из пластика и выделило на эти цели денежные средства в размере 1,5 млн руб. Для запуска новой производственной линии фабрике необходимо приобрести новое оборудование — пресс-формы для получения пластика и, возможно, расширить парк существующего оборудования.

Определим оптимальную производственную программу фабрики с учетом новой продукции, а также объем закупки ресурсов и оборудования для ее производства. Пусть при этом фабрика имеет запасы древесины и лакокрасочных материалов для выпуска столов, стульев и полок в размере 150 м^3 и 600 л соответственно, а для производства садовой мебели требуется закупить пластик. Предположим, что цены на ресурсы составляют 350 руб./м^3, 140 руб./л и 78 руб./кг для древесины, лакокрасочных материалов и пластика соответственно.

Воспользуемся моделью (3.34)–(3.40) расширения производства мебельной фабрики при условии, что нормы потребления ресурсов при производстве основных видов продукции, а также время беспростойной работы оборудования, объем спроса на основную продукцию и цены на токарное, фрезерное и сверлильное оборудование останутся на том же уровне, что и в предыдущих примерах (см. параграф 3.2), а для новой продукции эти значения составят соответственно: 3,2 кг на единицу садовой мебели; 7,16 ч в день; 500 единиц в год; 13 720 руб. за одну пресс-форму. Маржа при производстве садовой мебели равна 220 руб.

Напомним, что оптимальный объем закупки оборудования, полученный при решении однопериодной модели оптимизации затрат мебельной фабрики (3.1)–(3.4), составляет 31 токарный станок, 20 фрезерных станков и 6 сверлильных установок.

В этом случае оптимизационная задача будет выглядеть следующим образом:

$$550x_1 + 320x_2 + 80x_3 + 220x_4 \to \max,$$

$$\begin{aligned}
&0,8x_1 + 0,35x_2 + 0,1x_3 \le 150 + z_1,\\
&5x_1 + 3,2x_2 + x_3 \le 600 + z_2,\\
&3,2x_4 \le z_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0,53x_1 + 0,28x_2 + 0,17x_3 + 0,01x_4 \le (31 \cdot 6,15 + y_1 \cdot 6,15) \cdot 260,\\
&0,33x_1 + 0,21x_2 + 0,15x_3 \le (20 \cdot 6,05 + y_2 \cdot 6,05) \cdot 260,\\
&0,12x_1 + 0,07x_2 + 0,03x_3 \le (6 \cdot 7,38 + y_3 \cdot 7,38) \cdot 260,\\
&0,43x_4 \le 7,16y_4 \cdot 260,
\end{aligned}$$

$$350z_1 + 140z_2 + 78z_3 + 20\,000y_1 + 36\,000y_2 + 18\,000y_3 + \\ + 13\,720y_4 \le 1\,500\,000,$$

$$x_1 \le 350, \quad x_2 \le 420, \quad x_3 \le 800, \quad x_4 \le 500.$$

Решением данной оптимизационной задачи является *оптимальная производственная программа* мебельной фабрики: ($x_1 = 284$, $x_2 = 389$, $x_4 = 482$), *оптимальный объем закупки оборудования*, необходимого для производства как основной, так и дополнительной номенклатуры продукции: ($y_1 = 12$, $y_2 = 9$, $y_3 = 3$, $y_4 = 29$), а также *оптимальный объем закупки материальных ресурсов*: ($z_1 = 213,35$, $z_2 = 2064,8$, $z_3 = 1542,4$).

Таким образом, решение оптимизационной задачи расширения производства позволяет сделать вывод о том, что для наиболее эффективного использования инвестиционных ресурсов при расширении номенклатуры продукции мебельной фабрике необходимо приобрести 29 пресс-форм для получения пластика, а также расширить парк существующего оборудования на 12 токарных, 9 фрезерных станков и 3 сверлильные установки, при использовании которых фабрика получит возможность производить 482 единицы садовой мебели, а также выпускать традиционную продукцию в объеме 284 шт. и 389 шт. для столов и стульев соответственно, отказавшись при этом от производства полок. ■

Рассмотрим далее **модель проекта расширения производства** в условиях, когда маржа по каждому виду выпускаемой продукции $c_i = a_i - b_i$ ($i = 1, \ldots, n_1$) является не постоянной, а случайной величиной с заданным вероятностным распределением, т.е. c_i принимает значение c_i^1 с вероятностью p_1, c_i^2 с вероятностью p_2 и т.д.

Будем считать, что математическое ожидание маржи $\bar{c}_i$ вычисляется по формуле

$$\bar{c}_i = \sum_{q=1}^{m} c_i^q p_q, \quad i = \overline{1, n_1}.$$

Тогда ожидаемая *доходность проекта расширения предприятия* без учета дисконтирования может быть вычислена так:

$$Д = \sum_{i=1}^{n_1} \bar{c}_i x_i.$$

Определим *затраты, связанные с амортизацией оборудования*, и *затраты на материальные ресурсы* на единицу продукции вида *i* следующим образом:

$$Zt_i = \sum_{j=1}^{M_1} \alpha_j l_{ij} + \sum_{l=1}^{K_1} \beta_l \frac{t_{il}}{T_l}, \quad i = \overline{1, n_1},$$

где T_l — период полной амортизации оборудования вида l ($l = 1, \ldots, K_1$).

Полные затраты на приобретение материальных ресурсов производства и оборудования

$$Zat = \sum_{j=1}^{M} (L_j + z_j)\alpha_j + \sum_{j=M+1}^{M_1} z_j \alpha_j + \sum_{l=1}^{K} (k_l + y_l)\beta_l + \sum_{l=K+1}^{K_1} y_l \beta_l.$$

Определим θ_i — долю затрат на выпуск единицы продукции вида *i* в общих затратах на производство продукции:

$$\theta_i = \frac{Zt_i \cdot x_i}{Zat}, \quad i = \overline{1, n_1}.$$

Рыночный риск проекта рассчитывается как дисперсия портфеля выпускаемой продукции:

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} \sigma_i^2 \theta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{r>i} \mathrm{cov}_{ir}\, \theta_i \theta_r,$$

где σ_i^2 — дисперсия маржи по i-му виду выпускаемой продукции;
cov_{ir} — ковариация маржи по i-му и r-му видам выпускаемой продукции.

Задача инвестора заключается в том, чтобы распределить инвестиционный капитал V таким образом, чтобы минимизировать рыночный риск, обеспечив доходность проекта не ниже заданной величины $Д_{\text{гр}}$. **Математическая модель на минимум риска** в этом случае может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sigma_i^2 \theta_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{r>i} \text{cov}_{ir}\, \theta_i \theta_r \to \min, \tag{3.41}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \frac{\theta_i \cdot Zat}{Zt_i} \le L_j + z_j, \quad j = \overline{1, M}, \tag{3.42}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} \frac{\theta_i \cdot Zat}{Zt_i} \le z_j, \quad j = \overline{M+1, M_1}, \tag{3.43}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{il} \frac{\theta_i \cdot Zat}{Zt_i} \le k_l \tau_l + y_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \tag{3.44}$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} t_{il} \frac{\theta_i \cdot Zat}{Zt_i} \le y_l \tau_l, \quad l = \overline{K+1, K_1}, \tag{3.45}$$

$$\sum_{j=1}^{M_1} \alpha_j z_j + \sum_{l=1}^{K_1} \beta_l y_l \le V, \tag{3.46}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \theta_i \le 1, \quad 0 \le \frac{\theta_i \cdot Zat}{Zt_i} \le Pt_i, \tag{3.47}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \bar{c}_i x_i \ge Д_{\text{гр}}. \tag{3.48}$$

☐ Рассмотрим практическое применение данной модели на известном нам примере расширения номенклатуры продукции мебельной фабрики, сделав предварительно ряд допущений. Во-первых, предположим, что маржа по основным видам выпускаемой продукции является случайной величиной, принимающей одно из значений, приведенных в табл. 3.3, с заданными там же вероятностями. Для нового вида продукции маржа соответствует условию, приведенному в табл. 3.7. В результате чего математическое ожидание маржи по новому виду продукции составит 232,7 руб. за единицу садовой мебели, а дисперсия — 38 198,2. Математическое ожидание и дисперсия маржи по каждому виду основной продукции приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.7

Вероятностное распределение маржи, руб., для нового вида продукции

Садовая мебель	
c_4	p_4
5	0,1
170	0,36
200	0,16
300	0,33
800	0,05

Во-вторых, пусть $V = 1{,}5$ млн руб., $Д_{гр} = 150\ 000$ руб. Используя данные, приведенные в табл. 3.8, получим численное решение задачи оптимизации использования ресурсов при расширении производства мебельной фабрики на минимум риска.

Таблица 3.8

Значения ковариации по различным видам продукции

$p_{1,2}$	$p_{1,3}$	$p_{1,4}$	$p_{2,3}$	$p_{2,4}$	$p_{3,4}$
0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,1
0,68	0,22	0,05	0,36	0,15	0,05
0,07	0,07	0,15	0,48	0,19	0,45
0,23	0,27	0,25	0,15	0,65	0,15
—	0,43	0,54	—	—	0,25
$\mathrm{cov}_{1,2}$	$\mathrm{cov}_{1,3}$	$\mathrm{cov}_{1,4}$	$\mathrm{cov}_{2,3}$	$\mathrm{cov}_{2,4}$	$\mathrm{cov}_{3,4}$
89 250,0	40 650,0	106 437,5	48 165,0	93 062,5	15 637,5

Оптимизационная модель будет записана следующим образом:

$$122\,368{,}8\theta_1^2 + 48\,568{,}8\theta_2^2 + 1812{,}8\theta_3^2 + 38\ 198{,}2\theta_4^2 +$$
$$+ 2\cdot(\mathrm{cov}_{1,2}\,\theta_1\theta_2 + \mathrm{cov}_{1,3}\,\theta_1\theta_3 + \mathrm{cov}_{1,4}\,\theta_1\theta_4 + \mathrm{cov}_{2,3}\,\theta_2\theta_3 +$$
$$+ \mathrm{cov}_{2,4}\,\theta_2\theta_4 + \mathrm{cov}_{3,4}\,\theta_3\theta_4) \to \min,$$

$$0,8x_1 + 0,35x_2 + 0,1x_3 \le 150 + z_1,$$
$$5x_1 + 3,2x_2 + x_3 \le 600 + z_2,$$
$$3,2x_4 \le z_3,$$

$$0,53x_1 + 0,28x_2 + 0,17x_3 + 0,01x_4 \le 31 \cdot 6,15 + y_1 \cdot 6,15,$$
$$0,33x_1 + 0,21x_2 + 0,15x_3 \le 20 \cdot 6,05 + y_2 \cdot 6,05,$$
$$0,12x_1 + 0,07x_2 + 0,03x_3 \le 6 \cdot 7,38 + y_3 \cdot 7,38,$$
$$0,43x_4 \le 7,16y_4,$$

$$350z_1 + 140z_2 + 78z_3 + 20\,000y_1 + 36\,000y_2 + 18\,000y_3 + \\ + 13\,720y_4 \le 1\,500\,000,$$

$$522,5x_1 + 332,5x_2 + 78,5x_3 + 232,7x_4 \ge 150\,000,$$

$$x_1 \le 350, \quad x_2 \le 420, \quad x_3 \le 800, \quad x_4 \le 500.$$

Решением данной оптимизационной задачи являются *оптимальная производственная программа* мебельной фабрики: ($x_3 = 800$, $x_4 = 375$), *оптимальный объем закупки оборудования*, необходимого для производства как основной, так и дополнительной номенклатуры продукции: ($y_1 = 11$, $y_2 = 10$, $y_3 = 17$, $y_4 = 35$), и *оптимальный объем закупки материальных ресурсов*: ($z_1 = 31{,}28$, $z_2 = 208{,}95$, $z_3 = 1200$).

Таким образом, для минимизации риска мебельной фабрике может быть предложено отказаться от производства столов и стульев в пользу расширения производства полок и выпуска нового вида продукции — пластиковой садовой мебели. Действительно, маржа по первым двум видам выпускаемой продукции, хотя и имеет большее математическое ожидание, обладает дисперсией, значительно превосходящей дисперсию по третьему и четвертому видам продукции, из чего можно сделать вывод, что, в случае когда маржа производственной программы является случайной величиной, выпуск столов и стульев сопряжен для мебельной фабрики с наибольшим риском потери прибыли. ■

3.5. ПРИМЕР РАСЧЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ ПРЕДПРИЯТИЯ

Разработанные модели управления инвестиционной деятельностью предприятия были использованы при **анализе проекта расширения производства** в ОАО «Объединение Альфапластик»*. Основной вид деятельности предприятия «Альфапластик» — производство изделий широкого ассортимента из резины и других полимерных материалов, в том числе медицинского назначения в таких областях, как хирургия, диагностика, анестезиология и др. В частности, предприятие выпускает зонды, наркозные маски, дыхательные мешки, дренажи, грелки и ряд других изделий, применяемых в медицине. Потребителями этой продукции являются фармацевтические предприятия Москвы и Московской области, Министерство обороны, МЧС, а также ряд предприятий розничной и оптовой торговли. Расчеты проводились с использованием программного продукта Microsoft Excel 97 SR-2. В качестве входных использовались следующие данные:

1) параметры производимой продукции (14 видов изделий): цена изделия, переменные затраты, объем спроса;

2) характеристика материально-сырьевых ресурсов производства. Здесь использовалась информация о видах необходимых материально-сырьевых ресурсов, норме потребления по каждому виду конечной продукции и цене покупки предприятием материально-сырьевых ресурсов у поставщиков;

3) сведения о запасах материально-сырьевых ресурсов у предприятия;

4) сведения о производственной базе предприятия — информация о видах оборудования (8 групп оборудования), норме времени использования оборудования по каждому изделию и количестве единиц оборудования каждого вида.

Суть инвестиционного проекта заключалась в усовершенствовании технологии выпуска изделия № 14 (кружка Эсмарха). По традиционной технологии его корпус изготавливается из резины. В то же время в большинстве зарубежных стран подобное изделие производится из пластических масс полиэтилена, полипропилена, полистирола экструзионно-выдувным способом или из многослойных пленок методом сварки.

---

* Компьютерные расчеты по данному примеру проведены М.И. Ковалевым.

Внедрение новой технологии позволит снизить отпускные цены на изделие № 14 на 20%, при этом потребуется два дополнительных вида исходных материалов, а также те материально-сырьевые ресурсы, которые использовались при традиционной технологии. Кроме того, необходимо закупить экструзионно-выдувное оборудование (табл. 3.9) для изготовления корпуса кружки, а также частично использовать уже имеющиеся на предприятии производственные мощности. Оборудование, закупаемое для выпуска изделия № 14 по новой технологии, позволит создать производственную базу для выпуска по аналогичной технологии целого ряда изделий, например емкостей для жидкостей, в том числе канистр.

Таблица 3.9

Характеристика нового вида оборудования

Вид оборудования	*Вид изделия, для которого оно предназначено*	*Цена, тыс. руб.*	*Производство за смену, шт.*
Группа № 9	Изделие № 14, выпускаемое по новой технологии	4303	1323

Для размещения нового оборудования предполагается использовать имеющиеся производственные площади, обеспеченность которыми составляет 100%.

Предполагаемый спрос на изделия № 14 составляет около 80 000 ед. в год. Предприятие будет использовать для реализации проекта кредит в объеме 5 млн руб. Результаты расчетов по модели приведены в табл. 3.10 и 3.11: в табл. 3.10 представлена оптимальная производственная программа предприятия для ситуации, когда приобретается один комплект оборудования для изготовления компонентов изделия № 14 по новой технологии, а в табл. 3.11 — распределение финансовых средств на закупку материально-сырьевых ресурсов и затраты этих ресурсов при реализации полученной оптимальной производственной программы.

Анализ результатов расчета по данному инвестиционному проекту показал:

1. Отпускную цену на новое изделие № 14 целесообразно установить на 10% выше, чем первоначально было оговорено в бизнес-плане. Эта цена составляет 31,55 руб. за единицу.

2. Моделирование производственно-финансовой деятельности предприятия при реализации проекта расширения производства при данной цене на новый вид продукции показывает, что увеличение прибыли составит около 10%.

Таблица 3.10

Построение функции оптимизации прибыли

Вид изделия	*Отпускная цена изделия, руб.*	*Себестоимость производства единицы продукции, руб.*	*Прибыль от реализации единицы изделия, руб.*	*Количество изделий, ед.*	*Прибыль от реализации расчетного количества изделий каждого вида, руб.*
Изделие № 1, шт.	11,40	6,58	4,82	120 000	578 400,00
Изделие № 2, м	12,00	6,43	5,57	4500	25 047,00
Изделие № 3, кг	605,00	370,32	234,68	1000	234 679,00
Изделие № 4, м	13,70	5,92	7,78	17 241	134 186,70
Изделие № 5, шт.	52,80	19,71	33,09	1200	39 703,20
Изделие № 6, пара	124,85	67,89	56,96	759	43 232,64
Изделие № 7, шт.	25,00	8,28	16,72	35 000	585 060,00
Изделие № 8, кг	84,00	50,60	33,40	2926	97 737,18
Изделие № 9, кг	80,00	49,36	30,64	2160	66 186,72
Изделие № 10, кг	76,00	47,06	28,94	975	28 218,65
Изделие № 11, кг	57,60	23,05	34,55	6000	207 314,40
Изделие № 12, шт.	25,03	13,83	11,20	8000	89 632,00
Изделие № 13, шт.	35,63	24,18	11,45	12 000	137 371,20
Изделие № 14, шт.	34,72	19,40	15,32	21 791	333 796,72
Новое изделие № 14, шт.	31,55	16,17	15,38	58 209	895 264,42
Итого					3 495 819,82

Переход на выпуск новой продукции будет экономически целесообразен только в случае приращения прибыли на величину, которая обеспечит окупаемость затрат на приобретение, монтаж и наладку нового оборудования, а также выплату процентов по кредиту в допустимые сроки, оговоренные в кредитном договоре.

3. При запуске нового изделия происходит частичный отказ от производства традиционно выпускаемой продукции, что приводит к простою ранее задействованного оборудования. Поэтому одной из первоочередных задач предприятия является разработка конкретных предложений по использованию высвобождающегося оборудования.

Таблица 3.11

Использование материально-сырьевых ресурсов в производстве

Вид изделия	*Вид материала, используемого для производства изделия*	*Расход материала для производства единицы продукции, ед.*	*Цена единицы материала, руб.*	*Расход на закупку материала для производства единицы продукции, руб.*	*Требуется материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, ед.*	*Расход на закупку материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства единицы продукции, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*
Изделие № 1, шт.	Вид № 18, кг	0,062	26	1,61	7440	193 440	2,53	303 840,00
	Вид № 12, шт.	1	0,27	0,27	120 000	32 400		
	Вид № 15, шт.	1	0,33	0,33	120 000	39 600		
	Вспомогательные материалы	Х	Х	0,03	Х	Х		
	Упаковка	Х	Х	0,29	Х	Х		
Изделие № 2, м	Вид № 31, кг	0,012	182	2,18	54	9828	2,46	11 060,30
	Вид № 17, кг	0,0002	1089,22	0,22	0,9	980,3		
	Вспомогательные материалы	Х	Х	0,05	Х	Х		
	Упаковка	Х	Х	0,01	Х	Х		
Изделие № 3, кг	Вид № 31, кг	1,025	182	186,55	1025	186 550	202,12	202 119,08
	Вид № 17, кг	0,014	1089,22	15,25	14	15 249,08		
	Вспомогательные материалы	Х	Х	0,32	Х	Х		

Продолжение табл. 3.11

Вид изделия	*Вид материала, используемого для производства изделия*	*Расход материала для производства единицы продукции, ед.*	*Цена единицы материала, руб.*	*Расход на закупку материала для производства единицы продукции, руб.*	*Требуется материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, ед.*	*Расход на закупку материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства единицы продукции, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*
Изделие № 4, м	Вид № 19, кг	0,116	25,31	2,94	1999,96	50 618,89	2,99	51 549,90
	Вспомогательные материалы	Х	Х	0,01	Х	Х		
	Упаковка	Х	Х	0,04	Х	Х		
Изделие № 5, шт.	Вид № 9, кг	0,077	20	1,54	92,4	1848	6,10	7317,69
	Вид № 1, шт.	1	1,25	1,25	1200	1500		
	Вид № 6, шт.	1	0,28	0,28	1200	336		
	Вид № 7, шт.	1	0,19	0,19	1200	228		
	Вид № 5, кг	0,0005	76,67	0,04	0,6	46		
	Вид № 4, кг	0,0033	17	0,06	3,96	67,32		
	Вид № 2, кг	0,03	73	2,19	36	2628		
	Вид № 3, кг	0,0017	0,92	0,02	20,4	18,77		
	Вспомогательные материалы	Х	Х	0,43	Х	Х		
	Упаковка	Х	Х	0,11	Х	Х		

Продолжение табл. 3.11

Вид изделия	Вид материала, используемого для производства изделия	Расход материала для производства единицы продукции, ед.	Цена единицы материала, руб.	Расход на закупку материала для производства единицы продукции, руб.	Требуется материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, ед.	Расход на закупку материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.	Расход на закупку материалов для производства единицы продукции, руб.	Расход на закупку материалов для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.
Изделие № 6, пара	Вид № 23, кг	0,527	22,56	11,89	399,99	9023,84	47,04	35 702,88
	Вид № 27, кг	1,575	22,07	34,76	1195,43	26 383,03		
	Вспомогательные материалы	X	X	0,39	X	X		
Изделие № 7, шт.	Вид № 24, кг	0,129	28	3,61	4515	126 420	3,75	131 215,00
	Вспомогательные материалы	X	X	0,14	X	X		
Изделие № 8, кг	Вид № 29, кг	1,025	28,02	28,72	2999,15	84 036,18	29,81	87 225,52
	Вспомогательные материалы	X	X	0,21	X	X		
	Упаковка	X	X	0,88	X	X		
Изделие № 9, кг	Вид № 30, кг	1,025	27,65	28,34	2214	61 217,1	29,43	63 571,50
	Вспомогательные материалы	X	X	0,21	X	X		
	Упаковка	X	X	0,88	X	X		

Продолжение табл. 3.11

Вид изделия	*Вид материала, используемого для производства изделия*	*Расход материала для производства единицы продукции, ед.*	*Цена единицы материала, руб.*	*Расход на закупку материала для производства единицы продукции, руб.*	*Требуется материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, ед.*	*Расход на закупку материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства единицы продукции, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*
Изделие № 10, кг	Вид № 22, кг	1,025	27,26	27,94	999,38	27 242,96	28,35	27 642,71
	Вспомогательные материалы	Х	Х	0,41	Х	Х		
Изделие № 11, кг	Вид № 26, кг	1,025	14,59	14,95	6150	89 728,5	15,27	91 648,50
	Вспомогательные материалы	Х	Х	0,32	Х	Х		
Изделие № 12, шт.	Вид № 28, кг	0,045	15,22	0,68	360	5479,2	6,15	49 178,40
	Вид № 25, кг	0,34	12,42	4,22	2720	33 782,4		
	Вид № 4, кг	0,0028	17	0,05	22,4	380,8		
	Вид № 20, шт.	1	0,54	0,54	8000	4320		
	Вспомогательные материалы	Х	Х	0,16	Х	Х		
	Упаковка	Х	Х	0,5	Х	Х		

Продолжение табл. 3.11

Вид изделия	*Вид материала, используемого для производства изделия*	*Расход материала для производства единицы продукции, ед.*	*Цена единицы материала, руб.*	*Расход на закупку материала для производства единицы продукции, руб.*	*Требуется материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, ед.*	*Расход на закупку материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства единицы продукции, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*
Изделие № 13, шт.	Вид № 28, кг	0,045	15,22	0,68	540	8218,8	12,76	153 082,20
	Вид № 25, кг	0,406	12,42	5,04	4872	60 510,24		
	Вид № 33, шт.	1	3,33	3,33	12 000	39 960		
	Вид № 32, шт.	0,082	2,19	0,18	984	2154,96		
	Вид № 20, шт.	1	0,54	0,54	12 000	6480		
	Вид № 21, шт.	1	0,42	0,42	12 000	5040		
	Вид № 11, шт.	1	0,19	0,19	12 000	2280		
	Вид № 12, шт.	1	0,27	0,27	12 000	3240		
	Вид № 8, шт.	1	0,66	0,66	12 000	7920		
	Вид № 10, шт.	1	0,73	0,73	12 000	8760		
	Вид № 4, кг	0,0028	17	0,05	33,6	571,2		
	Вспомогательные материалы	X	X	0,19	X	X		
	Упаковка	X	X	0,47	X	X		

Продолжение табл. 3.11

Вид изделия	*Вид материала, используемого для производства изделия*	*Расход материала для производства единицы продукции, ед.*	*Цена единицы материала, руб.*	*Расход на закупку материала для производства единицы продукции, руб.*	*Требуется материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, ед.*	*Расход на закупку материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства единицы продукции, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*
Изделие № 14, шт.	Вид № 33, шт.	1	3,33	3,33	21791	72 564,03	9,23	201 225,07
	Вид № 32, шт.	0,016	2,19	0,04	348,66	763,56		
	Вид № 25, кг	0,275	12,42	3,42	5992,53	74 427,16		
	Вид № 34, шт.	0,108	3,56	0,38	2353,43	8378,2		
	Вид № 16, шт.	1	0,15	0,15	21 791	3268,65		
	Вид № 13, шт.	1	0,26	0,26	21 791	5665,66		
	Вид № 14, шт.	1	0,35	0,35	21 791	7626,85		
	Вид № 4, кг	0,0005	17	0,01	10,9	185,22		
	Вид № 8, шт.	1	0,66	0,66	21 791	14 382,06		
	Вспомогательные материалы	X	X	0,15	X	X		
	Упаковка	X	X	0,5	X	X		
							Итого	1 416 378,75

Окончание табл. 3.11

Вид изделия	*Вид материала, используемого для производства изделия*	*Расход материала для производства единицы продукции, ед.*	*Цена единицы материала, руб.*	*Расход на закупку материала для производства единицы продукции, руб.*	*Требуется материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, ед.*	*Расход на закупку материала для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства единицы продукции, руб.*	*Расход на закупку материалов для производства расчетного количества изделий каждого вида, руб.*
Новое изделие № 14, шт.	Вид № 33, шт.	1	3,33	3,33	58 209	193 835,97	8,27	481 574,70
	Новый вид № 36, шт.	0,14	22,08	3,09	8149,26	179 935,66		
	Новый вид № 35, шт.	1	0,51	0,51	58 209	29 686,59		
	Вид № 13, шт.	1	0,26	0,26	58 209	15 134,34		
	Вид № 14, шт.	1	0,35	0,35	58 209	20 373,15		
	Вид № 16, шт.	1	0,15	0,15	58 209	8731,35		
	Вспомогательные материалы	X	X	X	X	X		
	Упаковка	X	X	X	X	X		
							Итого	481 574,70

ГЛАВА 4
ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ РЕСУРСАМИ И ОБОРОТНЫМ КАПИТАЛОМ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ЛОГИСТИКЕ

4.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОГИСТИКИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Несмотря на определенные успехи национальной экономики, современный уровень развития ее реального сектора характеризуется во многом устаревшими производственными технологиями, низкой квалификацией кадров, нехваткой оборотных средств и инвестиций в основной капитал. При этом проблема инвестиций отходит на второй план из-за нехватки оборотных средств. В этой ситуации актуальной становится задача управления оборотным капиталом предприятия, с тем чтобы обеспечить наиболее рациональную структуру запасов материальных ресурсов производства.

Эта задача решается с помощью *динамической производственной модели*, которая задает технологическую последовательность операций производственного процесса, объем производственных ресурсов, потребность рынка в конечной продукции. Оптимальное распределение оборотного капитала, используемого для закупки материальных ресурсов, достигается за счет структуризации соответствующего финансового потока.

В общем случае данная задача сводится к классической проблеме оптимального управления и может быть решена путем итерационного применения симплекс-процедуры.

Динамическая задача управления финансовыми и производственными ресурсами предприятия

Рассмотрим задачу динамического управления финансовыми средствами предприятия, поступающими с целью закупки материальных ресурсов производства. Будем использовать следующую математическую модель.

Пусть бизнес-процесс производства продукции представляет собой совокупность операций, выполняемых в строго определенной последовательности. *Материально-сырьевые ресурсы* динамически поступают на вход производственной системы. Для того чтобы произвести продукцию вида i ($i = 1, ..., m$), необходимо обработать исходный материально-сырьевой поток на N_i последовательных операциях. Графически это можно представить в виде следующей π-сети (рис. 4.1).

Здесь $U_i(t)$ — поток материально-сырьевых ресурсов для i-го вида производимой продукции ($i = 1, ..., m$). Обработка исходного сырья и материалов проходит в заданной технологической последовательности с использованием *производственных ресурсов* (станков, механизмов, оборудования, специалистов и т.д.), объем которых на предприятии задан вектором $c = (c_1, ..., c_M)$. Для того чтобы обеспечить единичную производительность на операции j по i-му виду выпускаемой продукции (обозначим ее O_{ij}), необходимо выделить на эту операцию объем производственных ресурсов, заданный вектором $\alpha_{ij} = (\alpha_{ij}^1, ..., \alpha_{ij}^M)$. Если же необходимо обеспечить производительность q_{ij} на операции O_{ij}, то, соответственно, объем производственных ресурсов должен быть равен $\alpha_{ij} q_{ij} = (\alpha_{ij}^1 q_{ij}, ..., \alpha_{ij}^M q_{ij})$.

Все затраты на изготовление готовой продукции по степени их зависимости от объема производства целесообразно подразделять на переменные, годовой размер которых изменяется прямо пропорционально годовому объему выпуска продукции, и постоянные, годовой размер которых не зависит от изменения величины объема производства.

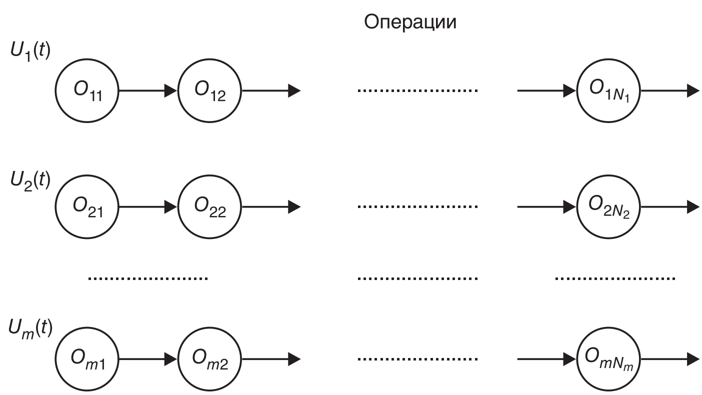

Рис. 4.1. Схема поступления и обработки материально-сырьевых ресурсов по всем операциям производственного цикла

К **переменным затратам** относятся:

- затраты на основные материалы за вычетом реализуемых отходов;
- затраты на топливо, предназначенные для технологических целей;
- затраты на различные виды энергии, предназначенные для технологических целей;
- затраты на основную и дополнительную заработную плату основных производственных рабочих с отчислениями в фонд социальной защиты населения;
- затраты, связанные с эксплуатацией универсального технологического оборудования;
- затраты, связанные с эксплуатацией инструмента и универсальной оснастки.

К **постоянным затратам** относятся:

- затраты, связанные с эксплуатацией оборудования, оснастки и инструмента, специально сконструированного для осуществления технологического процесса по данному варианту;
- затраты на оплату подготовительно-заключительных работ.

Пусть известны a_i — переменные затраты на выпуск единицы продукции вида i и d_i — цена реализации единицы продукции вида i ($i = 1, ..., m$). Тогда, для того чтобы задать производственную программу, которая давала бы наибольшую валовую прибыль, необходимо максимизировать *целевую функцию*:

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \int_0^T q_{iN_i}(t)dt \to \max, \tag{4.1}$$

где $\delta_i = d_i - a_i$ — прибыль от реализации продукции вида i ($i = 1, ..., m$);

$q_{iN_i}(t)$ — производительность (интенсивность выхода готовой продукции) на последней операции по i-му виду выпускаемой продукции в момент времени t;

$[0, T]$ — период планирования.

При этом констатируется, что:

- прибыль, получаемая от реализации каждого вида продукции, измеряется в одних и тех же единицах;
- прибыль, получаемая от реализации любого вида продукции, не зависит от того, какое количество ресурса было выделено по другим видам продукции;

- общая прибыль состоит из прибылей по отдельным видам продукции.

Кроме того, должны быть выполнены *ограничения на объем используемых производственных ресурсов в каждый момент времени* и *балансовые ограничения на объем обработки по каждой операции* O_{ij}, которые могут быть записаны следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} q_{ij}(t)\alpha_{ij}^{l} \le c_l \quad \forall t \in [0,T], \quad l=\overline{1,M}; \tag{4.2}$$

$$\int_0^t q_{ij}(t)dt \le V_{ij}(0)+\int_0^t q_{i,j-1}(t)dt \quad \forall t \in [0,T], \quad i=\overline{1,m}; \; j=\overline{1,N_i}, \tag{4.3}$$

где $q_{ij}(t)$ — производительность на операции j по продукции вида i в момент времени t, $q_{i0}(t) \equiv U_i(t)$;

$V_{ij}(0)$ — объем незавершенного производства на операции O_{ij} в момент времени $t = 0$.

Кроме того, если заданы *ограничения на спрос по каждому виду продукции*, то появится еще одно ограничение вида

$$\int_0^T q_{iN_i}(t)dt \le b_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{4.4}$$

где b_i — объем спроса на продукцию вида i.

Решением задачи (4.1)–(4.4) является множество производительностей $q_{ij}(t)$ ($i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., N_i$), не нарушающих ограничений (4.2)–(4.4) и максимизирующих функцию (4.1). В таком виде задача может быть решена с использованием методов теории оптимального управления.

Динамика поступления *материально-сырьевых потоков* производства, заданная в задаче (4.1)–(4.4) непрерывными функциями времени $U_1(t)$, ..., $U_m(t)$, в реальных условиях часто определяется динамикой *финансовых потоков* предприятия (кредиты, средства, полученные от реализации продукции, внереализационные доходы предприятия и т.д.). В этом случае задача (4.1)–(4.4) несколько видоизменяется, а именно: на вход производственной системы, выпускающей m видов продукции, поступает поток финансовых ресурсов $U(t)$. Необходимо таким образом использовать эти деньги, закупая материально-сырьевые ресурсы, чтобы максимизировать целевую функцию (4.1) при ограничениях (4.2)–(4.4).

Будем считать, что цена единицы материально-сырьевых ресурсов вида i ($i = 1, ..., m$) есть величина β_i. Тогда финансовый поток

$U(t)$ необходимо разбить на m составляющих $U_1(t)$, ..., $U_m(t)$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{m} U_i(t) = U(t)$.

В этом случае интенсивность материально-сырьевых потоков будет задана величинами $U_1(t)/\beta_1$, $U_2(t)/\beta_2$, ..., $U_m(t)/\beta_m$. Обозначив $U_i(t)/\beta_i$ через $q_{i0}(t)$ ($i = 1, ..., m$), а также добавив к ограничениям (4.2)–(4.4) ограничение $\sum_{i=1}^{m} q_{i0}(t)\beta_i = U(t)$, получим задачу выбора оптимальной производственной программы предприятия в условиях динамического финансового потока, используемого для закупки материально-сырьевых ресурсов.

Учитывая сложность решения задачи (4.1)–(4.4) в общем виде, исследуем ее в условиях дискретизации входных и выходных потоков производственной системы. Далее будем полагать, что материально-сырьевые ресурсы поступают ежедневно на вход производственной системы в объемах U_{if} ($i = 1, ..., m$; $f = 1, ..., T$), где T — число дней в периоде планирования. Тогда **задача оптимизации производственной программы** с учетом ранее введенных обозначений может быть описана следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \sum_{t=1}^{T} q_{iN_i}^t \to \max, \tag{4.5}$$

$$V_{ij}(0) + \sum_{f=1}^{k} U_{if} \le \sum_{f=1}^{k} q_{ij}^f, \quad i = \overline{1,m}; \quad k = \overline{1,T}, \tag{4.6}$$

$$V_{ij}(0) + \sum_{t=1}^{k} q_{i,j-1}^t \ge \sum_{t=1}^{k} q_{ij}^t, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,N_i}; \quad k = \overline{1,T}, \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_i} q_{ij} \alpha_{ij}^l \le c_l, \quad l = \overline{1,M}, \tag{4.8}$$

$$b_i^1 \le \sum_{t=1}^{T} q_{iN_i}^t \le b_i^2, \quad i = \overline{1,m}, \tag{4.9}$$

где $q_{iN_i}^t$ — дневной объем выпуска готовой продукции на операции O_{iN_i} в день t;

b_i^1 — объем заказа на продукцию вида i;

b_i^2 — объем спроса на продукцию вида i.

Задача (4.5)–(4.9) является линейной относительно переменных q_{ij}^t и может быть решена методами линейной оптимизации, например, с помощью широко известного программного средства СИМПЛЕКС.

В данной ситуации можно также предположить, что $U_i(t)$ — это случайный процесс, т.е. материально-сырьевые ресурсы в объемах $U_i^1(t)$, ..., $U_i^m(t)$ поступают на вход производственной системы с вероятностями p_1, ..., p_m соответственно. В таком случае задача (4.5)–(4.9) является задачей стохастического программирования.

Размерность задачи линейного программирования (4.5)–(4.9) может оказаться довольно большой, если велики числа T, m и N_i, и следовательно, для ее эффективного решения в ограниченные сроки необходимо уменьшить размерность решаемой задачи. Это можно сделать следующим образом: сначала задача решается на каком-то коротком интервале времени Δt_1, а затем это решение переносится на все остальные интервалы времени Δt_2, ..., Δt_k, на которые разбивается период планирования $[0, T]$. Однако необходимо заметить, что данный метод может корректно использоваться только в том случае, если $\forall O_{ij}$ $(i = 1,..., m; j = 1,..., N_i)$ $\exists l$: $\alpha_{ij}^l > 0$ $\forall i, j$, т.е. существует тип производственного ресурса, который используется на каждой операции.

Вернемся к задаче (4.1)–(4.4). Далее будем полагать, что ограничение (4.4) отсутствует, $V_{ij}(0) > 0$, $\alpha_{ij}^l > 0$, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., N_i$; $l = 1, ..., M$. В этом случае для максимизации функционала (4.1) производственные ресурсы необходимо выделить в первую очередь на операции $O_{1N_1}, ..., O_{mN_m}$, т.е. на последние операции по каждому виду выпускаемой продукции. Таким образом, необходимо максимизировать целевую функцию

$$F = \sum_{i=1}^{m} \delta_i q_{iN_i} \to \max \tag{4.10}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} q_{iN_i} \alpha_{iN_i}^l \le c_l, \quad l = \overline{1, M}, \tag{4.11}$$

$$q_{iN_i} \ge 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{4.12}$$

Очевидно, что если интервал планирования $[0, T]$ достаточно короткий, то, решив задачу (4.10)–(4.12), мы определим оптимальное решение задачи (4.1)–(4.4) для указанного частного случая.

Если это не так, т.е. $T > \min \frac{V_{iN_i}(0)}{q_{iN_i}}, \quad i = 1,\ldots,m$, то *объем незавершенного производства на одной из последних операций будет исчерпан до наступления момента времени T*. Таким образом, решение задачи (4.10)–(4.12) перестает быть допустимым для любого момента $\tau^1 > \tau$, где $\tau = \min \frac{V_{iN_i}(0)}{q_{iN_i}}, \quad i = 1,\ldots,m$, и, следовательно, оно должно быть скорректировано.

Пусть $\min \frac{V_{iN_i}(0)}{q_{iN_i}}$ достигается на каком-либо виде l $(1 \le l \le m)$ выпускаемой продукции. После того как в момент времени τ^1 закончена обработка незавершенного производства на операции O_{lN_l}, для того чтобы в дальнейшем выпускать продукцию вида l, производственные ресурсы должны быть выделены и на операцию O_{lN_l}, и на операцию O_{lN_l-1}. Следовательно, **задача оптимальной загрузки оборудования** для этой ситуации будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i q_{iN_i} \to \max, \tag{4.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (q_{iN_i} \alpha_{iN_i}^k + q_{lN_l-1} \alpha_{lN_l-1}^k) \le c_k, \quad k = \overline{1, M}, \tag{4.14}$$

$$q_{iN_i} \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.15}$$

$$q_{lN_l} \le q_{lN_l-1}. \tag{4.16}$$

Далее сравниваем:

$$T - \tau^1 \le \min \left\{ \frac{V_{iN_i} - \tau^1 q_{iN_i}}{q_{iN_i}}; \frac{V_{lN_l-1}}{q_{lN_l-1}} \right\}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{4.17}$$

Если неравенство (4.17) выполняется, это означает, что *на одной из операций, на которую были выделены ресурсы производства, закончена обработка* и, следовательно, существует момент времени τ^2, на котором достигается минимум в правой части неравенства (4.17).

Приведенная схема работает до момента $\hat{\tau}$, когда обработка по какому-либо виду продукции (пусть это будет продукция k) не выйдет на первую операцию и при этом задел на этой операции равен нулю, т.е. *все материально-сырьевые ресурсы для продукции* *вида k обрабатываются «с колес»*. В этом случае по данному виду продукции выбираются такая производительность q_k и такой интервал времени Δt_k, чтобы удовлетворялись соотношения:

$$q_k \Delta t_k = \int_{\hat{\tau}}^{\hat{\tau}+\Delta t_k} U_k(t)dt,$$

$$\forall t \in \left[\hat{\tau}; \hat{\tau}+\Delta t_k\right] \quad q_k \Delta t_k \le \int_{\hat{\tau}}^{\hat{\tau}+\Delta t_k} U_k(t)dt.$$

По всем остальным видам продукции сохраняется прежняя схема распределения производственных ресурсов.

Продолжая процедуру итеративного решения задач линейного программирования, разобьем интервал времени $[0, T]$ на конечное число отрезков, на каждом из которых будет сохраняться одно и то же распределение производственных ресурсов, обеспечивающее при сделанных предположениях оптимальное решение задачи (4.1)–(4.4).

Необходимо отметить, что характер распределения производственных ресурсов на интервалах времени $[0, \tau^1]$, $[\tau^1, \tau^2]$, ..., $[\tau^{K-1}, \tau^K]$ зависит не от величины объема незавершенного производства на операциях O_{ij}, а от последовательности достижения минимумов в соотношениях вида

$$\min \frac{V_{ij}^k}{q_{ij}^k}, \quad i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,N_i}, \tag{4.18}$$

где V_{ij}^k — объем незавершенного производства на операции O_{ij} при k-й итерации решения задачи линейной оптимизации (4.10)–(4.12);

q_{ij}^k — соответствующая производительность при решении k-й задачи оптимизации.

Таким образом, при сохранении последовательности достижения минимумов на операциях в соотношении (4.18) для различных V_{ij} ($i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., N_i$) *меняются величины интервалов* $[0, \tau^1]$, $[\tau^1, \tau^2]$, ..., $[\tau^{K-1}, \tau^K]$, а их количество и распределение производственных ресурсов по операциям сохраняются.

Геометрическая интерпретация этого факта состоит в следующем. Целевая функция (4.10) при последовательном решении задач оптимального распределения ресурсов является убывающей кусочно-постоянной функцией времени, обозначим ее $F(t)$. Она имеет вид, представленный на рис. 4.2.

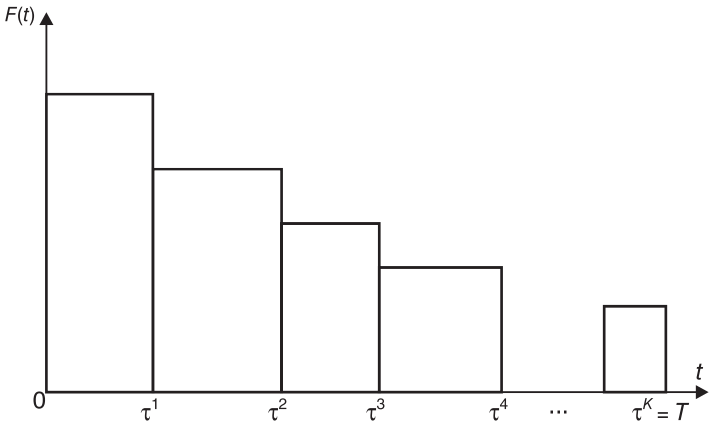

Рис. 4.2. График ступенчатой функции прибыли $F(t)$

Если сохраняется последовательность операций, на которых достигается минимум в соотношении (4.18), то график функции $F(t)$ при варьировании V_{ij} будет сохранять количество ступеней и их высоту, а изменяться будут только интервалы времени, на которых сохраняет постоянство функция $F(t)$.

Анализ устойчивости динамической модели

При прогнозировании материальных потоков производства $U_i(t)$ ($i = 1, ..., m$) и последующем планировании производственной программы необходимо учитывать неточность таких прогнозов и, следовательно, *влияние отклонений в поставках материальных ресурсов на финансовый результат работы предприятия*. Оценка такого влияния возможна при условии анализа устойчивости решения исходной задачи.

Пусть решением исходной задачи (4.1)–(4.4) являются производительности на каждой операции, заданные функциями $q_{ij}(t)$ ($i = 1, ..., m; j = 1, ..., N_i$), $t \in [0, T]$. Введем следующие определения.

Возмущенным потоком материальных ресурсов задачи (4.1)–(4.4) назовем поток $U_i^{\xi}(t) = U_i(t) + \xi_i(t)$ ($i = 1, ..., m$) при условии, что $\xi_i(t) \geq 0$ и существует хотя бы одно l ($1 \leq l \leq m$), для которого

$$\int_0^T \xi_l(t)dt > 0. \tag{4.19}$$

Задача (4.1)–(4.4) ***устойчива по решению***, если ее решения при невозмущенных $U_i(t)$ $(i = 1, ..., m)$ и возмущенных $U_i^{\xi}(t)$ $(i = 1, ..., m)$ потоках материальных ресурсов совпадают.

Рассмотрим **критерий устойчивости** по решению задачи (4.1)–(4.4). Пусть $q_{ij}(t)$ $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., N_i)$ — решение задачи (4.1)–(4.4) при потоках материальных ресурсов $U_i(t)$ $(i = 1, ..., m)$ на временно́м периоде $[0, T]$. Задача (4.1)–(4.4) устойчива по решению, если объем незавершенного производства $V_{iN_i}(T) > 0$ для всех i $(i = 1, ..., m)$ при невозмущенном потоке.

Доказательство критерия устойчивости следует из того факта, что возмущенный поток материальных ресурсов $U_i^{\xi}(t)$ приводит к увеличению запасов $V_{iN_i}^{\xi}(T)$ на первых операциях производственного процесса. С учетом того, что при невозмущенном потоке $U_i(t)$ $(i = 1, ..., m)$ эти запасы $V_{iN_i}(T)$ не были полностью использованы при выпуске конечной продукции, их увеличение не может привести к повышению маржинального дохода (4.1), а следовательно, и к изменению оптимального решения, заданного функциями $q_{ij}(t)$ $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., N_i)$.

Модель оптимизации структуры основных фондов многономенклатурного производства

Предположим, что при проектировании нового предприятия, которое будет выпускать m видов конечной продукции, необходимо определить объемы и виды закупаемого оборудования исходя из потребностей рынка на конечную продукцию на заданном временно́м интервале $[0, T]$ и ограниченности инвестиционных ресурсов W.

В качестве критерия оптимальности при выборе производственного оборудования, как и ранее, будем использовать суммарный маржинальный доход, полученный от реализации выпущенной продукции. С использованием ранее введенных обозначений постановка данной задачи состоит в следующем:

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i \int_0^T q_{iN_i}(t)dt \to \max, \tag{4.20}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_i} q_{ij}(t)\alpha_{ij}^{l} \le x_l, \quad l = \overline{1, M}; \quad x_l \in \mathbf{Z}; \quad x_l \ge 0, \tag{4.21}$$

$$\int_0^t q_{ij}(t')dt' \le V_{ij}(0) + \int_0^t q_{i,j-1}(t')dt' \quad \forall t \in [0,T], \tag{4.22}$$

$$\sum_{l=1}^{M} x_l \gamma_l \le W, \tag{4.23}$$

$$\int_0^T q_{iN_i}(t)dt \le b_i, \tag{4.24}$$

$$i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,N_i},$$

где x_l — количество единиц оборудования вида l, которое необходимо использовать в производственном процессе;

γ_l — цена единицы оборудования вида l.

Ограничение (4.24) определяет максимальный объем выпуска по каждому виду продукции.

Для решения задачи (4.20)–(4.24) могут быть использованы методы имитационного моделирования, основанные на эвристических соотношениях выбора вектора $x = (x_1, ..., x_M)$, задающего структуру производственного аппарата.

4.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Рассмотрим упрощенную схему бизнес-процессов для предприятия, выпускающего два вида продукции: столы и стулья. Выпуск каждого вида изделия требует обработки материальных ресурсов на следующих операциях:

1 — изготовление комплектующих из древесины;

2 — обработка комплектующих на электрорубанке;

3 — сверление крепежных отверстий с использованием электродрели;

4 — сборка конечного продукта.

Графически схема бизнес-процессов для двух видов конечной продукции (столы и стулья) может быть представлена следующим образом (рис. 4.3).

Будем считать, что в производственном процессе участвуют следующие виды оборудования: электропила — 1 единица; электрорубанок — 2 единицы; электродрель — 2 единицы.

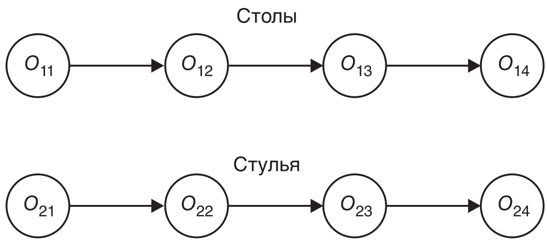

Рис. 4.3. Схема бизнес–процессов для производства двух видов продукции

Кроме того, малое предприятие, которое занимается выпуском мебели, использует труд пяти наемных рабочих. Таким образом, вектор ресурсов $c = (c_1, ..., c_m)$ в нашем случае имеет следующий вид: $c = (1, 2, 2, 5)$.

Объемы незавершенного производства и материальных ресурсов на каждой операции заданы следующим образом:

$$V_{11} = 55;\ V_{12} = 50;\ V_{13} = 40;\ V_{14} = 20;$$

$$V_{21} = 70;\ V_{22} = 60;\ V_{23} = 50;\ V_{24} = 30.$$

Маржинальный доход при выпуске одного стола составляет 1,6 тыс. руб., при выпуске одного стула — 1 тыс. руб. ($\delta_1 = 1{,}6$; $\delta_2 = 1$). Производительность рабочих на сборочных операциях такова: один рабочий за смену может собрать 4,4 стола или 6,4 стула.

Тогда **оптимизационная задача загрузки персонала предприятия на сборочных операциях** состоит в следующем:

$$\begin{aligned}&1{,}6\cdot 4{,}4\cdot x_1 + 1\cdot 6{,}4\cdot x_2 \to \max,\\ &x_1 + x_2 \le 5,\\ &x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\end{aligned}$$

где x_1 — количество рабочих, занятых производством столов;
x_2 — количество рабочих, занятых производством стульев.

Решим графически эту оптимизационную задачу. Для этого перепишем целевую функцию в виде

$$7{,}04x_1 + 6{,}4x_2 \to \max.$$

Далее рассмотрим, может ли быть маржинальный доход равен 50, т.е.

$$7{,}04x_1 + 6{,}4x_2 = 50.$$

Пусть $x_1 = 0$, тогда $x_2 = 50/6{,}4 = 7{,}8$. Пусть $x_2 = 0$, тогда $x_1 = 50/7{,}04 = 7{,}1$.

Рассмотрим графическую интерпретацию возможности получения такого маржинального дохода (рис. 4.4; ОДР — область допустимых решений).

Из полученного рисунка видно, что маржинальный доход в 50 единиц при заданных условиях получить нельзя. В то же время, перемещая параметрическое семейство прямых $7{,}04x_1 + 6{,}4x_2 = A$ по направлению к началу координат, получим следующее оптимальное решение исходной задачи: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Значение маржинального дохода будет равно $7{,}04 \cdot 5 = 35{,}2$.

Учитывая *ограниченность незавершенного производства на операции сборки стола*, рассчитаем, в течение какого времени рабочие должны заниматься сборкой стола. Учитывая, что сменная производительность пяти рабочих равна $4{,}4 \cdot 5 = 22$ стола, получим, что на этой сборочной операции они будут задействованы в течение $20/22 \approx 0{,}9$ смены. Далее, для того чтобы осуществлять выпуск столов, требуется выполнять также операцию сверления крепежных отверстий, необходимых для сборки стола. Будем полагать, что на сверление крепежных отверстий для стола рабочий затрачивает

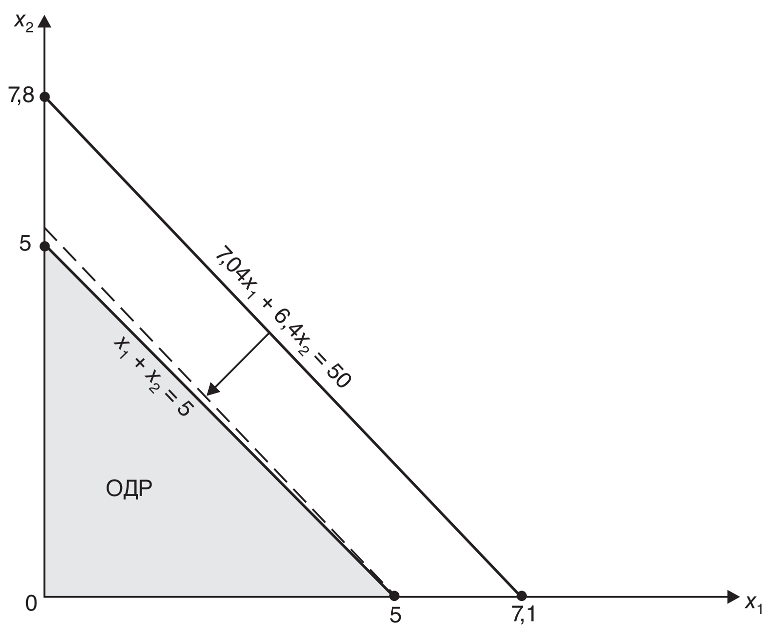

Рис. 4.4. Графическая интерпретация возможности получения маржинального дохода в 50 единиц

30 мин, или 0,06 смены. Для сборки одного стола рабочему требуется 1/4,4 = 0,23 смены. С учетом затрат на сверление отверстий затраты времени на сборку стола составляют 0,23 + 0,06 = 0,29 смены. Следовательно, производительность одного рабочего при выпуске столов составит 1/0,29 = 3,4 стола за смену. Поэтому оптимальная целевая функция в этой ситуации будет иметь вид

$$1{,}6 \cdot 3{,}4 \cdot x_1 + 1 \cdot 6{,}4 \cdot x_2 \to \max \qquad (4.25)$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 \le 5, \qquad (4.26)$$

$$0{,}06 \cdot 3{,}4 \cdot x_1 \le 2, \qquad (4.27)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (4.28)$$

Здесь неравенство (4.27) задает *ограничение на производительность электродрели*.

Решим графически оптимизационную задачу (4.25)–(4.28). Перепишем целевую функцию в виде

$$5{,}44x_1 + 6{,}4x_2 \to \max.$$

Приравняем значение целевой функции к 40 и получим:

$$5{,}44x_1 + 6{,}4x_2 = 40.$$

Если $x_1 = 0$, то $x_2 = 40/6{,}4 = 6{,}25$. Если $x_2 = 0$, то $x_1 = 40/5{,}44 = 7{,}8$.

Графически ограничения оптимизационной задачи и функция $5{,}44x_1 + 6{,}4x_2 = 40$ выглядят следующим образом (рис. 4.5).

При перемещении множества параметрических прямых $5{,}44x_1 + 6{,}4x_2 = A$ по направлению к началу координат получим оптимальное решение задачи (4.25)–(4.28): $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Значение маржинального дохода будет равно $6{,}4 \cdot 5 = 32$. Таким образом, все рабочие должны заниматься сборкой стульев начиная с момента времени $t \ge 0{,}9$. С учетом того, что сменная производительность рабочих при сборке стульев составляет $30/(6{,}4 \cdot 5) = 0{,}94$, через 0,9 + 0,94 = 1,84 смены закончится сборка стульев на операции O_{24}.

Далее будем предполагать, что подготовка крепежных отверстий для стула занимает 24 мин. Получим, что сборка стула с учетом потраченного времени на сверление крепежных отверстий составит 1/6,4 + 1/24 = 0,2 смены. Следовательно, количество стульев, которое может собрать рабочий, с учетом затрат на операции O_{23}

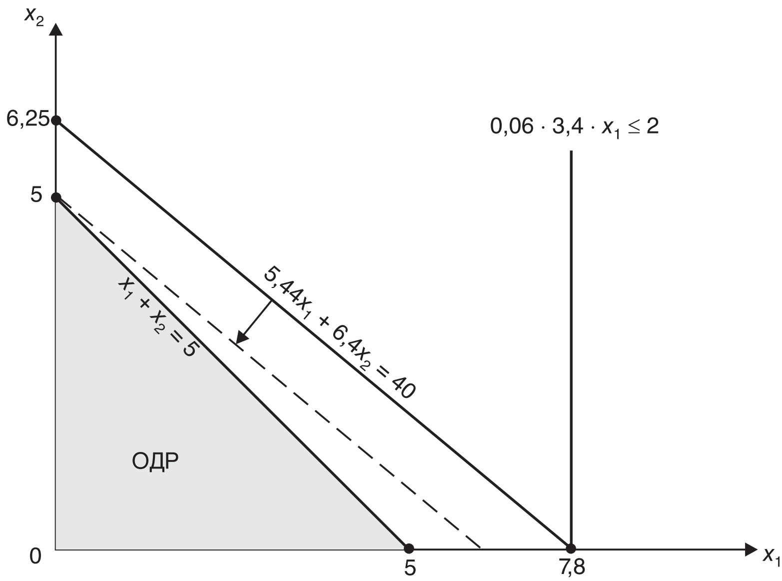

Рис. 4.5. Графическое отображение системы ограничений задачи (4.25)–(4.28)

равно 1/0,2 = 5. Поэтому целевая функция оптимизационной задачи будет иметь следующий вид:

$$1{,}6 \cdot 3{,}4 \cdot x_1 + 1 \cdot 5 \cdot x_2 \to \max. \tag{4.29}$$

Ограничения оптимизационной задачи распределения ресурсов производства имеют следующий вид:

$$x_1 + x_2 \le 5, \tag{4.30}$$

$$0{,}06 \cdot 3{,}4 \cdot x_1 + 0{,}05 \cdot 5 \cdot x_2 \le 2, \tag{4.31}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{4.32}$$

Решим графически задачу (4.29)–(4.32), приравняв значение целевой функции к 30 (рис. 4.6).

Из графика видно, что оптимальным будет решение $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. С учетом того, что объем незавершенного производства на операции O_{13} равен 40, сборка столов начиная с момента времени $t \ge 1{,}84$ будет продолжаться в течение 40/(3,4 · 5) = 2,3 смены. Таким образом, диаграмма интенсивности получения маржинальной прибыли $F(t)$ будет иметь вид, представленный на рис. 4.7.

Величина маржинальной прибыли на временно́м интервале $[0, T] = [0; 4{,}14]$ равна площади затененного многоугольника, изображенного на рис. 4.7.

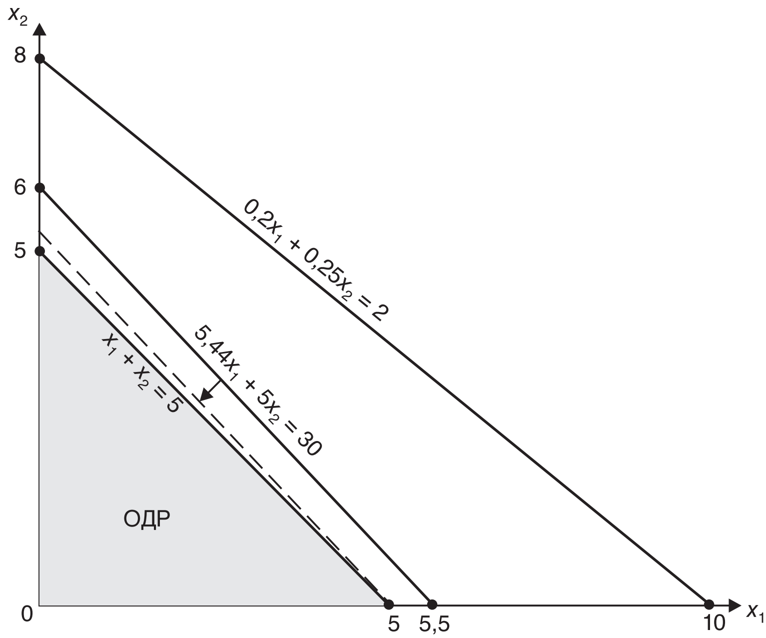

Рис. 4.6. Графическое решение задачи (4.29)–(4.32)

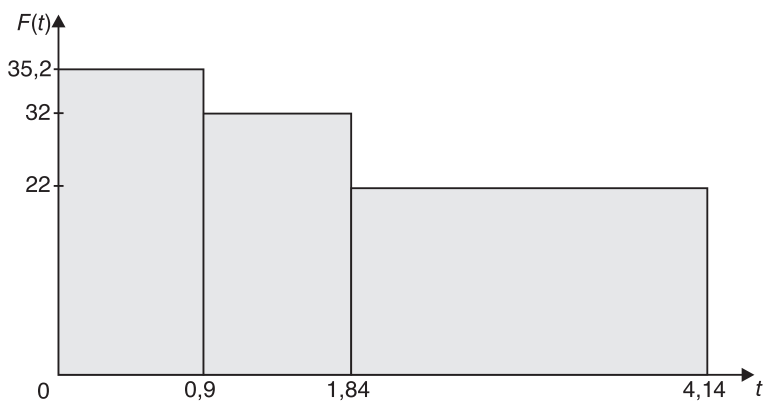

Рис. 4.7. Диаграмма интенсивности получения маржинальной прибыли $F(t)$

Мы получили оптимальное распределение производственных ресурсов для первых 4,14 производственной смены. Аналогичным образом расчеты могут быть продолжены до момента времени, когда будет использован весь объем незавершенного производства на операциях O_{11} и O_{21}.

Раздел 2
ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ В ЛОГИСТИКЕ СКЛАДИРОВАНИЯ

ГЛАВА 5
ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКТА СТРОИТЕЛЬСТВА И ЭКСПЛУАТАЦИИ СКЛАДА

5.1. ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКТА СТРОИТЕЛЬСТВА И ЭКСПЛУАТАЦИИ СКЛАДА

Вопросы эффективности работы склада достаточно подробно изучены отечественными и зарубежными исследователями [25, 46]. Как правило, задача оценки эффективности является многокритериальной и использует следующие показатели: минимум логистических издержек при приеме, грузопереработке и хранении поступающего потока грузов; максимальный объем продаж; максимальная прибыль при реализации складируемых товаров; расширение рынка сбыта; максимизация капитализации компании и др. Поэтому при реализации проекта строительства и эксплуатации склада правомерно использовать **методы многокритериальной оптимизации** [37], суть которых заключается в следующем.

На первом этапе среди всех вариантов проекта выбираются так называемые *Парето-оптимальные*, или *эффективные*.

На втором этапе среди множества Парето-оптимальных вариантов выбирается *единственный*. **Схемы выбора** могут быть различными, например:

1. Каждой скалярной целевой функции ставится в соответствие *«вес» критерия*, заданный в виде положительного числа. Чем важнее для лица, принимающего решение (ЛПР), критерий, тем выше его вес. Далее максимизируется вместо исходной вектор-функции $F = (f_1(x), ..., f_n(x))$ скалярная функция $\vartheta(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$ на множестве Парето-оптимальных решений. Здесь λ_i — вес i-го критерия.

2. Все критерии ранжируются по степени важности. Сначала на множестве эффективных решений определяется оптимальное решение по самому важному критерию. Если это решение не единственно, решается оптимизационная задача для второго по важности критерия при условии, что на оптимальном решении значение первой целевой функции не будет меньше, чем при решении первой задачи, и т.д. Очевидно, что по данной методике будет решено не более n задач скалярной оптимизации.

Если же при решении l-й задачи ($l \leq n$) будет получено единственное решение, то оно и будет выбрано в качестве оптимального для исходной многокритериальной задачи.

3. Решается задача определения максимума для наиболее важной целевой функции $f_1(x)$ в векторном критерии на множестве эффективных решений при условии, что значения остальных целевых функций будут не меньше чем заданные числа $C_2, C_3, ..., C_n$.

Недостаток этого подхода состоит в следующем: значения $C_2, C_3, ..., C_n$ могут оказаться такими, что исходная задача будет неразрешимой. В этой ситуации применяют методы корректировки значений $C_2, C_3, ..., C_n$ [46].

Среди **показателей эффективности проекта строительства и эксплуатации склада** выделим следующие четыре:

- чистый дисконтированный доход;
- индекс доходности;
- внутренняя норма доходности;
- время окупаемости проекта.

Суть этих показателей и методы их расчета будут приведены в главе 6.

На предварительной (предынвестиционной) фазе проекта строительства и эксплуатации собственного склада необходимо определить такие его параметры, как:

- количество необходимых складских площадей;
- разнообразие грузовых перевозчиков;
- количество и качество работников склада;
- ставки заработной платы;
- стоимость земельного участка;
- возможность последующего расширения;
- структура налогов;
- стоимость строительства;
- расходы на коммуникационные услуги;
- стоимость привлеченного капитала на финансовом рынке;
- налоговые льготы.

Потребности в складских площадях могут быть определены с использованием методики, предложенной в [25]. В то же время, если потоки поступающих на склад грузов и грузов, уходящих со склада, нестационарны, задача определения необходимой складской площади существенно усложняется.

Пусть $\eta_i(t)$ — интенсивность поступления грузов i-го вида на склад, а $q_i(t)$ — интенсивность оттока этого вида груза со склада. Тогда объем $V_i(t)$ груза вида i на складе в момент времени t определяется как решение следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \eta_i(t) - q_i(t), \quad i = \overline{1,k},$$

где k — число видов грузов.

Отсюда

$$V_i(t) = V_i(0) + \int_0^t \left[\eta_i(t') - q_i(t')\right] dt'.$$

Соответственно, площадь, занимаемая i-м видом груза в момент t, определяется как $V_i(t)n_i$, где n_i — количество единиц груза вида i. В этом случае объем, необходимый для всех видов груза в момент времени t, вычисляется следующим образом:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{k} V_i(t) n_i.$$

Если значение $\Delta V = \max V(t) - \min V(t)$, $t \in [0, T]$, невелико, то емкость склада E выбирается следующим образом:

$$E = \max V(t), \quad t \in [0, T]$$

(здесь $[0, T]$ — период эксплуатации склада).

Если же ΔV достаточно большое, то такой выбор емкости склада приведет к тому, что склад будет не полностью загружен в определенные периоды его эксплуатации. В этом случае необходимо предусмотреть возможность предоставления складских площадей в аренду другим пользователям.

Если выбрать емкость склада исходя из соотношения

$$E = \frac{1}{2}\left[\max V(t) + \min V(t)\right], \quad t \in \left[0, T\right],$$

то в отдельные моменты склад может быть недозагружен, а в отдельные — его площадей может оказаться недостаточно. В этом случае необходимо предусмотреть не только возможность предоставления складских помещений в аренду, но и возможность дополнительного использования площадей склада общего пользования.

С учетом стоимости оплаты услуг для склада общего пользования и дополнительной прибыли за счет сдачи части склада в аренду *емкость склада* может быть определена в результате решения детерминированной оптимизационной задачи на минимум суммарных издержек. В ситуации, когда грузопотоки склада не только нестационарны, но и стохастичны, задача определения емкости склада становится еще более сложной. После того как емкость склада определена, а также заданы все параметры, связанные с его строительством и эксплуатацией, можно перейти к анализу эффективности проекта.

5.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА СТРОИТЕЛЬСТВА И ЭКСПЛУАТАЦИИ СКЛАДА

Существует ряд методик оценки эффективности инвестиционных проектов [3, 22], основанных на единой методологической базе и отличающихся условиями применимости и предметными областями. Методика, наиболее адекватная современным российским условиям, изложена в Методических рекомендациях по оценке эффективности инвестиционных проектов (вторая редакция, № ВК 477 от 21.06.1999). Представленный ниже материал основывается на данном документе как наиболее методологически полном, экономически актуальном и авторитетном.

Эффективность инвестиционного проекта — это категория, отражающая соответствие проекта целям и интересам его участников. В связи с этим необходимо оценивать как эффективность проекта в целом, так и эффективность участия в проекте каждого из его участников.

Эффективность проекта в целом оценивается в целях определения потенциальной привлекательности проекта для возможных участников и поиска источников финансирования. Она включает в себя социально-экономическую и коммерческую эффективность проекта.

Эффективность участия в проекте определяется с целью проверки реализуемости проекта и включает в себя региональную и народнохозяйственную, отраслевую и бюджетную эффективность.

В числе наиболее важных **принципов оценки эффективности проектов** можно выделить следующие:

- рассмотрение проекта на протяжении всего его жизненного цикла (оценка эффективности проекта должна осуществляться при разработке инвестиционного предложения, обоснования инвестиций и технико-экономического обоснования (ТЭО) проекта, а также в ходе реализации проекта в виде экономического мониторинга в рамках управления стоимостью проекта);
- моделирование денежных потоков;
- сопоставимость условий различных проектов (или вариантов проекта);
- принцип положительности и максимума эффекта;
- учет фактора времени;
- учет только предстоящих затрат и поступлений;
- сравнение состояний «с проектом» и «без проекта»;
- учет всех наиболее существенных последствий проекта;
- учет разного состава участников проекта;
- многоэтапность оценки;
- учет влияния на эффективность проекта потребности в оборотном капитале;
- учет влияния инфляции и возможности использования при реализации проекта нескольких валют (многовалютность);
- учет (в количественной форме) влияния неопределенности и риска, сопровождающих реализацию проекта.

При оценке состояний «с проектом» и «без проекта» могут использоваться экономико-математические модели.

5.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ АРЕНДЫ СКЛАДСКИХ ПОМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим пример расчета затрат на аренду складских помещений.

☐ Крупная фирма — импортер бытовой электротехники постоянно нуждается в аренде складских помещений. Во втором квартале текущего года, в соответствии с запланированными поставками из-за рубежа, потребности в складских площадях составят: в апреле — 30 тыс. м^3; в мае — 40 тыс. м^3; в июне — 25 тыс. м^3. Арендодатель предлагает свои площади, состоящие из блоков по 100 м^3. Стоимость аренды складских помещений зависит от срока, на который заключается договор. Она составляет 10; 8 и 6 долл. за один кубический метр в месяц для одно-, двух- и трехмесячных договоров соответственно. Оплата должна производиться в начале каждого первого по договору месяца за весь срок аренды.

В соответствии со своими финансовыми возможностями фирма в предстоящем квартале может выделить на арендные платежи не более 400 тыс. долл. в апреле, 300 тыс. в мае и 200 тыс. в июне.

Требуется:

1) составить план аренды, минимизирующий затраты фирмы по оплате складских площадей;

2) оценить диапазон эффективности решений, сравнив наилучший вариант аренды, обеспечивающий минимальные издержки, с «наихудшим», при котором затраты будут максимальными;

3) выяснить, что произойдет, если снять финансовые ограничения, и сколько удастся сэкономить на аренде в этом случае.

Для решения данной задачи сформулируем следующую экономико-математическую модель. Обозначим через x_{ij} площадь, включаемую в договор аренды сроком на i месяцев, который заключен в начале j-го месяца. Тогда, например, x_{22} — это площадь, арендуемая по двухмесячному договору, который заключен во 2-м месяце (мае), x_{13} — это площадь, арендуемая по одномесячному договору, который заключен в 3-м месяце (июне), и т.д.

Сведем всю имеющуюся информацию в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Исходные данные

Тип договора	*Апрель*	*Май*	*Июнь*	*Арендная ставка, долл./м³ в месяц*
Одномесячный	x_{11}	x_{12}	x_{13}	10
Двухмесячный	x_{21}	x_{22}	—	8
Трехмесячный	x_{31}	—	—	6
Потребность в площадях, тыс. м³	30	40	25	
Финансовые возможности, тыс. долл.	400	300	200	

Прочерки в таблице означают, что в соответствующем месяце договор не может быть заключен. Например, в начале июня заключать договоры аренды сроком на два или три месяца не имеет смысла, так как арендные отношения прекращаются через месяц. В то же время в этот период можно заключить договор сроком на один месяц.

Следует также иметь в виду, что двухмесячный договор аренды, заключенный в апреле, действует два месяца — в апреле и мае, а заключенный в мае — в мае и июне. Трехмесячный договор, заключенный в апреле, действует в течение всех трех месяцев.

План аренды — это набор значений переменных x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, показывающих, какую площадь (тыс. м^3) необходимо арендовать в каждом месяце и по каким договорам (какой продолжительности).

Подсчитаем суммарные затраты фирмы на аренду, если будет принят план x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{31}. Тогда с учетом ставок арендной платы получаем

$$Z = (x_{11} + x_{12} + x_{13}) \cdot 10 + (x_{21} + x_{22}) \cdot 8 \cdot 2 + x_{31} \cdot 6 \cdot 3,$$

или после несложных преобразований

$$Z = 10(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 16(x_{21} + x_{22}) + 18x_{31}.$$

Размер площадей, арендуемых в апреле, согласно плану составит $x_{11} + x_{21} + x_{31}$. Так как эта площадь должна удовлетворить потребности фирмы, то

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 30.$$

Суммарная площадь, которая будет в распоряжении фирмы во втором месяце (мае), состоит из следующих элементов:

x_{12} — площади, арендуемой по одномесячному договору, заключенному на май;

$(x_{21} + x_{22})$ — площадей, снятых в аренду по двухмесячным договорам, заключенным в апреле и мае;

x_{31} — площади, снятой в аренду по трехмесячному договору, заключенному в апреле.

Ее размер должен удовлетворять потребностям фирмы, следовательно,

$$x_{12} + (x_{21} + x_{22}) + x_{31} \geq 40.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что для третьего месяца (июня)

$$x_{13} + x_{22} + x_{31} \geq 25.$$

Выясним теперь, сколько понадобится средств для реализации выбранного плана аренды, и сопоставим их с финансовыми возможностями фирмы.

В первом месяце для оплаты договоров аренды потребуется $x_{11} \cdot 10 + x_{21} \cdot 8 \cdot 2 + x_{31} \cdot 6 \cdot 3 = 10x_{11} + 16x_{21} + 18x_{31}$ тыс. долл. Эта сумма не должна превышать имеющиеся возможности. Следовательно,

$$10x_{11} + 16x_{21} + 18x_{31} \leq 400.$$

Для второго и третьего месяцев получаем соответственно:

$$10x_{12} + 16x_{22} \le 300,$$

$$10x_{13} \le 200.$$

Объединяя результаты, получаем следующую модель линейного программирования:

$$Z = 10(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 16(x_{21} + x_{22}) + 18x_{31} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 30, \\ x_{12} + (x_{21} + x_{22}) + x_{31} \ge 40, \\ x_{13} + x_{22} + x_{31} \ge 25, \\ 10x_{11} + 16x_{21} + 18x_{31} \le 400, \\ 10x_{12} + 16x_{22} \le 300, \\ 10x_{13} \le 200. \end{cases}$$

Кроме того, все переменные должны быть неотрицательными и целочисленными. Условие целочисленности связано с тем, что площади сдаются в аренду блоками по 100 м^3. Поэтому ни одна из переменных, измеряемых в кубических метрах, не может быть нецелым числом, равным, например, 7,12 тыс. м^3.

Задача оптимизации заключается в отыскании такого плана аренды, при котором суммарные затраты фирмы по найму складских помещений будут минимальными, а сам план будет удовлетворять системе ограничений.

После решения оптимизационной задачи получены следующие ответы на поставленные вопросы.

1. Оптимальный план аренды склада следующий: апрель — 17 тыс. м^3 по одномесячному договору, 2 тыс. м^3 по двухмесячному и 11 тыс. м^3 по трехмесячному договору; май — 22 тыс. м^3 по одномесячному и 5 тыс. м^3 по двухмесячному договору; июнь — 9 тыс. м^3 складских площадей по одномесячному договору.

При этом потребности фирмы в складских площадях будут удовлетворены полностью, финансовых средств хватит для оплаты договоров, а суммарные квартальные издержки на аренду будут минимальными и составят 790 тыс. долл.

2. Эффективность полученного оптимального плана можно оценить, решив задачу на максимум издержек.

Суммарные издержки для наихудшего из решений составят 898 тыс. долл. Тогда разница между наихудшим и наилучшим планами составит 898 – 790 = 108 тыс. долл. Этот диапазон может служить оценкой «эффективности» оптимального плана аренды.

3. Решение задачи для случая, когда не существует ограничений по средствам, выделяемым фирмой на аренду, приводит к суммарным издержкам, равным 630 тыс. долл. Такой план аренды мог бы сэкономить фирме 160 тыс. долл. ■

5.4. ОБЩАЯ СХЕМА ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКТА

Оценка эффективности проекта проводится в **три этапа**.

1. *Экспертная оценка общественной значимости проекта*. Общественно значимыми считаются крупномасштабные, народнохозяйственные и глобальные проекты.

2. *Расчет показателей эффективности проекта в целом*. Цель этого этапа — интегральная экономическая оценка проектных решений и создание необходимых условий для поиска инвестора. Для локальных проектов оценивается только их коммерческая эффективность. Если она оказывается приемлемой, рекомендуется переходить непосредственно ко второму этапу оценки. Для общественно значимых проектов оценивается в первую очередь их социально-экономическая эффективность. При неудовлетворительной оценке такие проекты не рекомендуются к реализации и не могут претендовать на государственную поддержку. Если же социально-экономическая эффективность оказывается достаточной, оценивается их коммерческая эффективность.

3. *Уточнение состава участников и определение финансовой реализуемости и эффективности участия в проекте каждого из них* (региональной и отраслевой эффективности, эффективности участия в проекте отдельных предприятий и акционеров, бюджетной эффективности и пр.). Этот этап оценки осуществляется после того, как разработана схема финансирования.

Объем исходной информации для расчета эффективности проекта зависит от стадии проектирования, на которой проводится оценка эффективности.

Исходные сведения должны включать:

а) *на всех стадиях*:

- цель проекта;
- характер производства, общие сведения о применяемой технологии, вид производимой продукции (работ, услуг);

- условия начала и завершения реализации проекта, продолжительность расчетного периода;
- сведения об экономическом окружении;

б) *на стадии инвестиционного предложения*:

- продолжительность строительства;
- объем капиталовложений;
- выручку и производственные издержки по годам реализации проекта;

в) *на стадии обоснования инвестиций* (с приведением соответствующих расчетов):

- объем инвестиций с распределением по времени и по технологической структуре (строительно-монтажные работы, оборудование и пр.);
- сведения о выручке от реализации продукции с распределением по времени и видам затрат;

г) *на стадии ТЭО* (или обоснования инвестиций, непосредственно предшествующего подготовке рабочих чертежей) — исходную информацию, представленную ниже, в полном объеме.

В соответствии с Методическими рекомендациями по оценке эффективности инвестиционных проектов **структура исходной информации для расчета эффективности** такова:

- сведения о проекте и его участниках;
- экономическое окружение проекта;
- сведения об эффекте от реализации проекта в смежных областях;
- денежный поток от инвестиционной деятельности;
- денежный поток от операционной деятельности;
- денежный поток от финансовой деятельности.

Общие сведения о проекте должны включать в себя:

- характер проектируемого производства, состав производимой продукции (работ, услуг);
- сведения о размещении производства;
- информацию об особенностях технологических процессов, о характере потребляемых ресурсов, системе реализации производимой продукции.

При оценке эффективности инвестиций для отдельных его участников необходима **дополнительная информация о составе и функциях этих участников**. Для тех из них, кто выполняет в проекте одновременно несколько разнородных функций, должны быть описаны все эти функции.

По тем участникам, которые на данной стадии расчетов уже определены, необходима информация об их производственном потенциале и финансовом состоянии.

Если проект предполагает создание нового юридического лица — акционерного предприятия, необходима предварительная информация о его акционерах и размере намечаемого акционерного капитала.

Для других участников проекта должны быть определены только их функции при реализации проекта.

В связи с тем что затраты и результаты каждого из участников зависят от характера взаимоотношений между ними, информация об участниках должна включать в себя и описание основных элементов организационно-экономического механизма реализации проекта.

Сведения об экономическом окружении проекта:

- прогнозная оценка общего индекса инфляции и прогноз абсолютного или относительного (по отношению к общему индексу инфляции) изменения цен на отдельные продукты (услуги) и ресурсы на весь период реализации проекта (табл. 5.2);
- прогноз изменения обменного курса валюты или индекса внутренней инфляции иностранной валюты на весь период реализации проекта;
- система налогообложения.

В расчетах эффективности рекомендуется учитывать также **влияние реализации проекта на деятельность сторонних предприятий и населения**, в том числе такое, как:

- изменение рыночной стоимости имущества граждан;
- снижение уровня розничных цен на отдельные товары и услуги;

Таблица 5.2

Сведения об инфляции

Номер шага	0	1	—
Длительность шага, годы или доли года			
Темп инфляции на шаге, или общий индекс инфляции, по отношению к базисному моменту на конец шага, % в год			
Индекс валютного курса или индекс внутренней инфляции иностранной валюты			
Темп, или индекс, роста цены на продукцию, основные средства, материальные и трудовые ресурсы и услуги по каждому из них в отдельности, % в год			

- изменение объемов производства продукции (работ, услуг) сторонними предприятиями;
- экономия времени населения на коммуникации и др.

Информация приводится в произвольной форме.

При оценке временны́х и финансовых затрат на предынвестиционной и инвестиционной фазах при реализации проекта строительства склада может быть использована табл. 5.3.

Эффективность проекта оценивается в течение *расчетного периода*, охватывающего временной интервал от начала проекта до его прекращения.

Расчетный период разбивается на шаги — отрезки, в пределах которых проводится агрегирование данных, используемых для оценки финансовых показателей. Шаги t определяются номера-

Таблица 5.3

Перечень этапов проекта строительства склада

Наименование этапа	*Стоимость*	*Продолжительность*
Предынвестиционная фаза		
Изучение и прогноз экономического развития региона, страны		
Формирование инвестиционного замысла. Разработка обоснования инвестиций, оценка жизнеспособности проекта		
Выбор и согласование места размещения склада		
Экспертиза и согласование проекта		
Предварительное решение		
Разработка плана проектных работ		
Задание на разработку ТЭО строительства склада		
Согласование, экспертиза и утверждение ТЭО строительства склада, выдача задания на проектирование		
Разработка, согласование, утверждение рабочей документации		
Отвод земли под строительство		
Разрешение на строительство		
Инвестиционная фаза		
Разработка оперативного плана строительства		
Разработка графиков работы машин и механизмов		
Выполнение строительно-монтажных работ		
Корректировка строительства		
Закупка складского оборудования и проведение монтажных работ оборудования		
Проведение пусконаладочных работ		
Сдача-приемка объекта		

ми (0, 1, ...). Время в расчетном периоде измеряется в годах или долях года и отсчитывается от фиксированного момента $t_0 = 0$, принимаемого за базисный. Продолжительность каждого шага может быть различной.

Денежный поток проекта — это зависимость от времени денежных поступлений и платежей при реализации порождающего его проекта, определяемая для всего расчетного периода.

На каждом шаге денежный поток характеризуется:

- *притоком*, равным размеру денежных поступлений (или результатов в стоимостном выражении) на этом шаге;
- *оттоком*, равным платежам на этом шаге;
- *сальдо* (активным балансом, эффектом), равным разности между притоком и оттоком.

Денежный поток обычно состоит из частичных потоков от отдельных видов деятельности (инвестиционной, операционной и финансовой).

Денежные потоки могут выражаться в текущих, прогнозных или дефлированных ценах в зависимости от того, в каких ценах выражаются на каждом шаге расчета их притоки и оттоки.

Текущими называются цены, заложенные в проект без учета инфляции, *прогнозными* — цены, ожидаемые (с учетом инфляции) на будущих шагах расчета, а *дефлированными* — прогнозные цены, приведенные к уровню цен фиксированного момента времени путем деления на общий базисный индекс инфляции.

ГЛАВА 6

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ В ЛОГИСТИКЕ СКЛАДИРОВАНИЯ

6.1. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ В ЛОГИСТИКЕ СКЛАДИРОВАНИЯ

Для современной российской экономики характерна активизация субъектов рынка в реальном секторе. В связи с этим необходимо разрабатывать адекватные методы управления большими потоками товаров, их хранением, транспортировкой, оптово-розничной реализацией. Поскольку интенсивность материальных и товарных потоков возрастает, нужно развивать и совершенствовать системы складирования. В этой ситуации потребитель складских услуг оказывается перед выбором: создавать собственный склад или пользоваться услугами уже существующего на тех или иных условиях.

Рассмотрим модели оптимизации эффективности проекта строительства и эксплуатации склада в условиях, когда критерием оптимального выбора его параметров будет либо *максимальная доходность склада за один период* (дисконтирование финансовых потоков не учитывается), либо *наибольшая чистая приведенная стоимость проекта* (с учетом дисконтирования финансовых потоков).

Однопериодная модель проекта строительства и эксплуатации склада

Сформулируем **задачу оптимизации параметров строящегося склада**, его объема (емкости), обеспечения необходимым оборудованием и перечня (набора) услуг на заданном временном интервале **без учета дисконтирования финансовых потоков**. Критерием оптимизации при выборе значений перечисленных параметров склада является *максимизации валовой прибыли* с учетом доходов по всем видам услуг за вычетом переменных и условно-постоянных издержек. Математически этот критерий задается следующим выражением:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_{ij}x_{ij}-Z_{\text{пост}}(V)\to\max, \tag{6.1}$$

где x_{ij} — объем услуг вида j для груза вида i ($i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$), предоставляемый складом;

a_{ij} — доходность услуги вида j для груза вида i ;

b_{ij} — переменные издержки для услуги вида j и груза вида i;

$Z_{\text{пост}}(V)$ — постоянные затраты, зависящие от вместимости (емкости) склада V, включая затраты на его строительство.

Издержки на складскую переработку одной тонны груза или одного условного поддона (c) определяются отношением суммарных годовых эксплуатационных расходов ($И_э$) к величине годового грузооборота (Q) склада [24]:

$$c=\sum И_э\big/Q.$$

Суммарные эксплуатационные расходы

$$\sum И_э = И_э^{зп} + И_э^{об} + И_э^{зд} + И_э^{эл} + И_э^{м},$$

где $И_э^{зп}$ — затраты на складские операции, связанные с заработной платой складского персонала;

$И_э^{об}$ — эксплуатационные расходы, зависящие от стоимости оборудования, занятого в грузопереработке, т.е. связанные с амортизацией, содержанием и ремонтом оборудования;

$И_э^{зд}$ — эксплуатационные расходы, зависящие от стоимости складских зданий и сооружений, т.е. связанные с их амортизацией, содержанием и ремонтом;

$И_э^{эл}$ — эксплуатационные расходы, связанные с электроэнергией, топливом;

$И_э^{м}$ — расходы на вспомогательные средства и материалы.

Объемно-временнóе ограничение на емкость склада имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\tau_{ij}\omega_{ij}\le TV, \tag{6.2}$$

где τ_{ij} — среднее время загрузки склада для услуги j и груза i;

ω_{ij} — емкость склада, необходимая при оказании услуги j для груза i;

V — объем (емкость) склада;

T — продолжительность рассматриваемого периода.

Должно выполняться следующее условие:

$$x_{ij} \le \nu_{ij}, \quad i = \overline{1, n}; \ j = \overline{1, m}, \tag{6.3}$$

где ν_{ij} — объем услуг вида j для груза вида i, предлагаемый на рынке услуг в период $[0, T]$.

Следующее неравенство представляет собой *ограничение на объем склада* при размещении оборудования:

$$\sum_{l=1}^{K} y_l o_l \le V, \tag{6.4}$$

где y_l — число единиц оборудования вида l;

o_l — объем склада, занимаемый единицей оборудования вида l.

Ограничение, накладываемое на мощность оборудования, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} t_{ij}^{l} \le y_l \theta_l, \quad l = \overline{1, K}, \tag{6.5}$$

где t_{ij}^{l} — время загрузки оборудования вида l, необходимое при оказании услуги вида j для груза вида i;

θ_l — время эффективного использования оборудования вида l на периоде $[0, T]$.

Неравенство, ограничивающее инвестиционные ресурсы, имеет вид

$$\sum_{l=1}^{K} y_l \gamma_l + V\alpha \le F, \tag{6.6}$$

где γ_l — стоимость единицы оборудования вида l;

α — стоимость единицы емкости склада;

F — объем инвестиционных ресурсов, выделенных на строительство склада.

Ограничения на неотрицательность и целочисленность переменных выглядят следующим образом:

$$V \ge 0; x_{ij} \ge 0; y_l \ge 0, \ y_l \in \mathbf{Z}; i = \overline{1, n}; \ j = \overline{1, m}; l = \overline{1, K}. \tag{6.7}$$

Многопериодная модель оптимизации NPV проекта

В ситуации, когда эксплуатация склада планируется на срок более одного года, **учет дисконтирования финансовых потоков** необходим, поэтому, определив норму (ставку) дисконтирования k, получим следующее обобщение задачи (6.1)–(6.7):

$$\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{ij}^{\tau}x_{ij}^{\tau}}{(1+k)^{\tau}}-\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{b_{ij}^{\tau}x_{ij}^{\tau}}{(1+k)^{\tau}}-\sum_{\tau=1}^{T}\frac{Z_{\text{пост}}^{\tau}(V)}{(1+k)^{\tau}}\to\max, \quad (6.8)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}^{\tau}\tau_{ij}^{\tau}\omega_{ij}^{\tau}\le T^{\tau}V, \quad (6.9)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}^{\tau}t_{ij}^{l\tau}\le y_l\theta^{l\tau}, \quad (6.10)$$

$$x_{ij}^{\tau}\le \nu_{ij}^{\tau}, \quad (6.11)$$

$$\sum_{l=1}^{K}y_l\gamma_l+V\alpha\le F, \quad (6.12)$$

$$V\ge 0;\ x_{ij}^{\tau}\ge 0;\ y_l\ge 0,\ y_l\in\mathbf{Z};\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ \tau=\overline{1,T};\ l=\overline{1,K}, \quad (6.13)$$

где T — число временны́х периодов жизненного цикла проекта;
a_{ij}^{τ} — доходность услуги j для груза вида i в период времени τ;
x_{ij}^{τ} — объем услуг вида j для груза вида i в период времени τ;
k — коэффициент (норма) дисконтирования;
b_{ij}^{τ} — переменные затраты на услугу вида j для груза вида i в период времени τ;
$Z_{\text{пост}}^{\tau}(V)$ — постоянные затраты на единицу вместимости склада с учетом стоимости строительных работ на временно́м периоде τ;
τ_{ij}^{τ} — время использования складского помещения при выполнении услуги вида j по i-му виду груза в период времени τ;
ω_{ij}^{τ} — объем склада, необходимый при оказании услуги вида j по i-му виду груза в период времени τ;
T^{τ} — продолжительность периода τ;
$t_{ij}^{l\tau}$ — время загрузки оборудования вида l при оказании услуги вида j для груза вида i в период времени τ;
$\theta^{l\tau}$ — время эффективного использования оборудования вида l на периоде времени τ;
ν_{ij}^{τ} — прогнозируемый объем услуг j-го вида для груза вида i в период времени τ.

Однопериодная модель проекта строительства и эксплуатации склада с учетом риска

Пусть маржа на услугу вида j для i-го груза, равная

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m},$$

является случайной величиной с заданным вероятностным распределением:

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & c_{ij}^{1} & — & p_1 \\ c_{ij} & \longrightarrow & c_{ij}^{2} & — & p_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & \searrow & c_{ij}^{M} & — & p_M \end{array}$$

Здесь $\sum\limits_{l=1}^{M} p_l = 1, \quad p_l \geq 0,\ l = \overline{1,M}.$

Тогда **однопериодная модель проекта строительства и эксплуатации склада с учетом риска** может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_{ij} x_{ij} - Z_{\text{пост}}(V) \to \max, \tag{6.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\tau_{ij}\omega_{ij} \leq TV, \tag{6.15}$$

$$x_{ij} \leq \nu_{ij}, \tag{6.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} t_{ij}^{l} \leq y_l \theta_l, \tag{6.17}$$

$$\sum_{l=1}^{K} y_l \gamma_l + V\alpha \leq F, \tag{6.18}$$

$$V \geq 0;\ x_{ij} \geq 0;\ y_l \geq 0,\ y_l \in \mathbf{Z};\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m};\ l = \overline{1,K}, \tag{6.19}$$

где $\bar{c}_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{M} c_{ij}^{l} p_l$ — математическое ожидание маржи по услуге вида j для груза вида i.

Обозначим суммарно возможные переменные затраты следующим образом:

$$Z_{\text{пер}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{b}_{ij} \nu_{ij},$$

где $\bar{b}_{ij}$ — ожидаемые затраты на услугу вида j по i-му виду груза.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}^2 \bar{x}_{ij}^2 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} \operatorname{cov}_{lk}^{pq}\, \bar{x}_{lk}\bar{x}_{pq} \le R_{\text{д}}, \quad lk \ne pq, \tag{6.20}$$

где σ_{ij}^2 — дисперсия ожидаемой доходности по j-й услуге для i-го вида груза;

$R_{\text{д}}$ — допустимый риск.

В выражении (6.20)

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij}\frac{\bar{b}_{ij}}{Z_{\text{пер}}}, \quad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m},$$

$$\operatorname{cov}_{lk}^{pq} = \sum_{i=1}^{M}\left(\bar{c}_{lk} - c_{lk}^{i}\right)\left(\bar{c}_{pq} - c_{pq}^{i}\right)p_i.$$

В задаче (6.14)–(6.20) *максимизируется ожидаемая доходность проекта* при ограничении на риск.

Аналогично, выбрав в качестве критерия *минимизацию риска* в условиях ограничений на ожидаемую доходность проекта, сформулируем следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}^2 \bar{x}_{ij}^2 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} \operatorname{cov}_{lk}^{pq}\, \bar{x}_{lk}\bar{x}_{pq} \to \min, \quad lk \ne pq, \tag{6.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_{ij} x_{ij} \ge Д_{\text{пр}}, \tag{6.22}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\tau_{ij}\omega_{ij} \le TV, \tag{6.23}$$

$$x_{ij} \le \nu_{ij}, \tag{6.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} t_{ij}^{l} \le y_l \theta_l, \tag{6.25}$$

$$\sum_{l=1}^{K} y_l \gamma_l + V\alpha \le F, \tag{6.26}$$

$$Z_{\text{пер}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{b}_{ij} \nu_{ij}, \tag{6.27}$$

$$V \ge 0; x_{ij} \ge 0; y_l \ge 0,\ y_l \in \mathbf{Z}; i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}; l = \overline{1,K}, \tag{6.28}$$

где $Д_{\text{пр}}$ — минимальная ожидаемая (приемлемая) доходность проекта.

6.2. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКТА СТРОИТЕЛЬСТВА И ЭКСПЛУАТАЦИИ СКЛАДА

Вернемся к задаче (6.1)–(6.7) и рассмотрим, как влияет изменение таких параметров модели, как суммарные переменные издержки и суммарная доходность проекта, на оптимальное решение задачи.

Обозначим через ξ уровень инфляции в долях и будем предполагать, что маржа c_{ij} по i-му виду груза и j-му виду услуг ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, где $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$) увеличивается линейно относительно инфляции следующим образом:

$$c_{ij}(\xi) = c_{ij} + m_{ij} c_{ij} \xi,$$

где m_{ij} — коэффициент, отражающий интенсивность роста маржи в зависимости от темпа инфляции: $m_{ij} \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$.

Для допустимого набора услуг x_{ij} задачи (6.1)–(6.7) введем функцию $f_{ij}(\xi)$ следующим образом:

$$f_{ij}(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (c_{ij} + m_{ij} c_{ij} \xi) x_{ij} - Z_{\text{пост}}(V).$$

Пусть имеется перечень допустимых услуг для задачи (6.1)–(6.7), удовлетворяющих ограничениям (6.2)–(6.7). Обозначим этот перечень через $\overline{X} = \left\{X^1, \ldots, X^p, \ldots, X^N\right\}$, где $X^p = X^p_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Пусть набор услуг X^l является оптимальным при $\xi = 0$.

Будем считать, что множество $\overline{X}$ упорядочено по возрастанию величины $(f_{ij}^{p}(\xi))'$, $p = 1, ..., N$, где $f_{ij}^{p}(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_{ij} + m_{ij}c_{ij}\xi)x_{ij}^{p} - Z_{\text{пост}}(V)$.

Пусть $l < N$, тогда рассмотрим $N - l$ уравнений вида

$$f_{ij}^{l}(\xi) = f_{ij}^{k}(\xi), \quad k = \overline{l+1, N}, \tag{6.29}$$

или в развернутой форме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_{ij} + m_{ij}c_{ij}\xi)x_{ij}^{l} - Z_{\text{пост}}(V) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_{ij} + m_{ij}c_{ij}\xi)x_{ij}^{k} - Z_{\text{пост}}(V),$$

откуда следует

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}^{k} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}^{l}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}c_{ij}x_{ij}^{l} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}c_{ij}x_{ij}^{k}}. \tag{6.30}$$

Каждое из уравнений (6.29) будет иметь единственное решение для любого $k = l + 1, ..., N$ в силу их линейности относительно ξ, и решение может быть получено по формуле (6.30).

Обозначим решение для уравнения вида $f_{ij}^{l}(\xi) = f_{ij}^{k}(\xi)$ через ξ^k $(k = l + 1, ..., N)$ и выберем $\xi = \min \xi^k$, $k = l + 1, ..., N$. Это ξ будет ***точкой перехода*** от одного оптимального пакета услуг к другому.

На рис. 6.1 это точка ξ, являющаяся граничным значением уровня инфляции, при которой остается оптимальным решение x_{ij}^{l}. При уровне инфляции $\xi' > \xi$ оптимальным будет какой-то другой пакет услуг, задаваемый матрицей x_{ij}^{k} $(k > l; i = 1, ..., n; j = 1, ..., m)$.

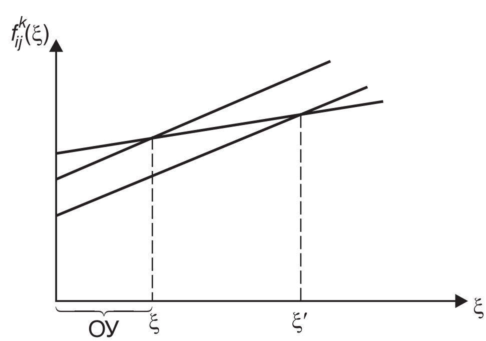

Рис. 6.1. Область устойчивости (ОУ) оптимального решения

Если $k < N$, то, аналогично описанной процедуре, можно вновь найти интервал изменения инфляции ($\xi' > \xi$), на котором будет оставаться оптимальным набор услуг, задаваемый матрицей услуг x_{ij}^{k}. Начиная с уровня инфляции $\xi > \xi^{k_1}$, оптимальным станет пакет услуг, задаваемый матрицей $x_{ij}^{k_1}$ ($k_1 > k$), и т.д.

Учитывая конечность наборов услуг, задаваемых множеством $\overline{X} = \left\{X^1, ..., X^p, ..., X^N\right\}$, а также то, что с ростом инфляции очередной оптимальный набор услуг находится на графике обязательно правее в списке всех возможных наборов услуг $\overline{X}$, можно сформулировать следующее **утверждение**.

Пусть возможные наборы услуг обработки грузопотока на складе заданы векторами $\overline{X} = \left\{X^1, ..., X^N\right\}$, которые упорядочены по возрастанию значений производных функции $f^k(\xi)$ для каждого набора услуг ($k = 1, ..., N$). Уровень инфляции ξ в долях может изменяться на интервале $(0, \infty)$. Тогда полубесконечный интервал изменения инфляции может быть разбит на конечное число отрезков таким образом, что при изменении инфляции в рамках одного отрезка о п т и м а л ь н ы м остается некоторый фиксированный набор услуг из множества $\overline{X}$. Число отрезков в указанном разбиении будет не более чем $N - l + 1$ (здесь l — номер набора услуг из множества $\overline{X}$, который является оптимальным при $\xi = 0$).

6.3. ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКТА СТРОИТЕЛЬСТВА И ЭКСПЛУАТАЦИИ СКЛАДА

Оценка чистой приведенной стоимости проекта

Чистая приведенная стоимость (NPV) проекта рассчитывается по формуле

$$NPV = \sum_{i=1}^{T} \frac{D_i - Z_i^{\text{об}}}{(1+k)^i}, \tag{6.31}$$

где T — жизненный цикл проекта;

D_i — доходы от эксплуатации склада в период времени i;

$Z_i^{\text{об}}$ — затраты, связанные с эксплуатацией и строительством склада в период времени i;

k — ставка дисконтирования финансовых потоков.

Реализация проекта происходит при выполнении условия $NPV > 0$.

Доходы от эксплуатации склада в период времени i определяются по следующей формуле:

$$D_i = (Ц_i - Z_i)\frac{c_i}{Z_i}Q_i, \tag{6.32}$$

где $Ц_i$ — цена реализации одной тонны груза (одного условного поддона), прошедшего обработку;

Z_i — логистические издержки и затраты на реализацию одной тонны груза (одного условного поддона);

c_i — издержки на складскую переработку одной тонны груза (одного условного поддона) в период времени i;

Q_i — грузооборот склада в период времени i.

В свою очередь,

$$Z_i = Z_i^{\text{себ}} + c_i + Z_i^{\text{тр}} + Z_i^{\text{р}},$$

где $Z_i^{\text{себ}}$ — себестоимость выпуска единицы продукции (одной тонны или одного условного поддона) в период времени i;

$Z_i^{\text{тр}}$ — средние издержки при транспортировке единицы груза в период времени i;

$Z_i^{\text{р}}$ — затраты, связанные с реализацией единицы груза в период времени i.

Затраты, связанные с эксплуатацией и строительством склада в период времени i, вычисляются по формуле

$$Z_i^{\text{об}} = Q_i c_i + Z_i^{\text{стр}}, \tag{6.33}$$

где $Z_i^{\text{стр}}$ — затраты на строительство склада в период времени i.

Оценка внутренней нормы доходности проекта

Внутренняя норма доходности r определяется исходя из следующего соотношения:

$$\sum_{i=1}^{T}\frac{D_i - Z_i^{\text{об}}}{(1+r)^i} = 0. \tag{6.34}$$

Доходы от эксплуатации склада D_i и затраты, связанные с его эксплуатацией и строительством, $Z_i^{\text{об}}$ вычисляются по формулам (6.32) и (6.33).

Оценка времени окупаемости проекта

Будем предполагать, что до строительства собственного склада фирма арендовала складское помещение и эта аренда будет продолжаться до момента времени τ, связанного с окончанием строительства собственного склада. Тогда задача заключается в определении такого объема грузооборота и, соответственно, такого момента времени T', при которых *затраты на строительство и эксплуатацию собственного склада* станут равны *затратам при аренде склада*.

Этот **объем грузооборота** определяется исходя из следующего соотношения:

$$\sum_{i=1}^{\tau}\frac{Z_i^{\text{стр}}}{(1+k)^i}+\sum_{i=1}^{\tau}\frac{Z_i^{\text{ар}}+Q_ic_i}{(1+k)^i}+\sum_{i=\tau}^{T'}\frac{Q_ic_i}{(1+k)^i}=\sum_{i=1}^{T'}\frac{Z_i^{\text{ар}}+Q_ic_i}{(1+k)^i}, \qquad (6.35)$$

где $Z_i^{\text{ар}}$ — затраты при аренде склада в период времени i.

Графически динамика изменения затрат на грузопереработку в этой ситуации выглядит следующим образом (рис. 6.2, *а*).

Если часть строящегося склада будет сдаваться в аренду, то **время окупаемости** T' определяется из соотношения

$$\sum_{i=1}^{\tau}\frac{Z_i^{\text{стр}}}{(1+k)^i}+\sum_{i=1}^{\tau}\frac{Z_i^{\text{ар}}+Q_ic_i}{(1+k)^i}+\sum_{i=\tau}^{T'}\frac{Q_ic_i}{(1+k)^i}-\sum_{i=\tau}^{T'}\frac{D_i^{\text{ар}}}{(1+k)^i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{T'}\frac{Z_i^{\text{ар}}+Q_ic_i}{(1+k)^i}, \qquad (6.36)$$

где $D_i^{\text{ар}}$ — доходы от сдачи складских площадей в аренду.

Динамика изменения затрат в этом случае будет выглядеть иначе (рис. 6.2, *б*).

Замечание 1. При расчете времени окупаемости проекта не учитывалась доходная часть финансовых потоков, поскольку предполагается, что грузооборот фирмы не зависит от того, какой склад она использует.

Замечание 2. Время окупаемости необходимо вычислять по разным вариантам строительства склада (с учетом его емкости и оснащения требуемым оборудованием), выбирая приемлемый как с точки зрения ограничений на инвестиционные ресурсы владельца, так и с точки зрения времени реализации проекта.

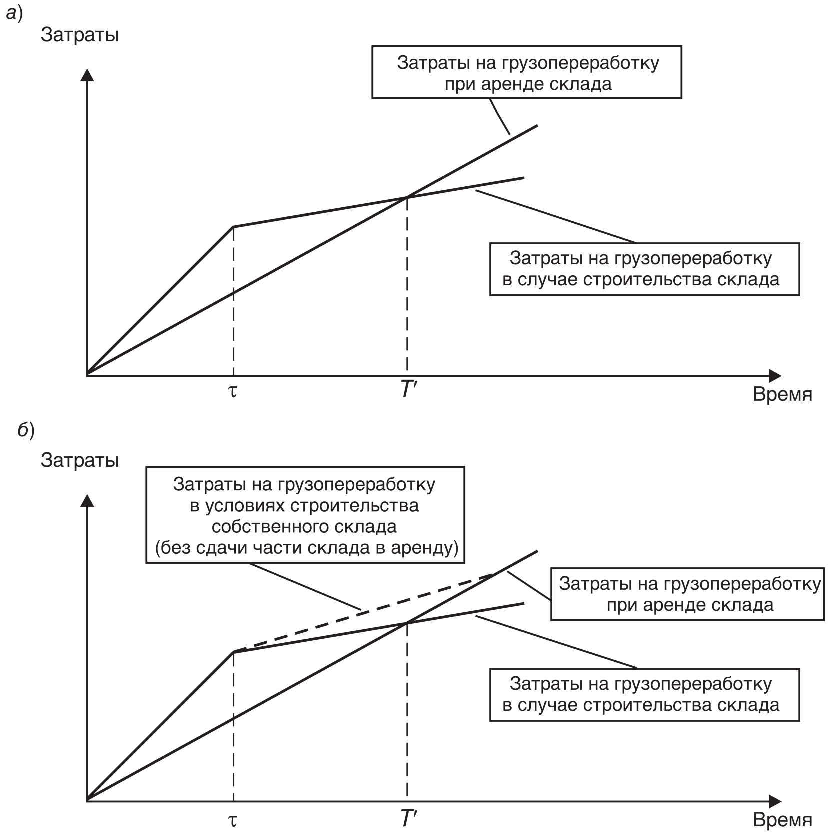

Рис. 6.2. Динамика изменения затрат на грузопереработку в случае строительства собственного склада без учета (*а*) и с учетом (*б*) доходов от сдачи склада в аренду

6.4. ПРИМЕРЫ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ В МОДЕЛЯХ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ

Рассмотрим практическое применение описанных моделей оптимизации на примере строительства склада, который будет использоваться для хранения собственной продукции компании *А* и предоставления складских услуг сторонним организациям.

Многопериодная модель оптимизации NPV проекта

Для привлечения клиентов и обеспечения полного использования складских мощностей тарифы на услуги в первый год эксплуатации комплекса предлагается снизить на 10% по отношению к ставкам в последующие годы. Исходные данные для оптимизации NPV приведены в табл. 6.1–6.9.

Базовая ставка дисконтирования — 14%.

Жизненный цикл проекта насчитывает 11 лет («нулевой» год строительства и оснащения складского комплекса плюс 10 лет эксплуатации).

Таблица 6.1

Тарифы по оплате услуг складирования

Наименование услуги	*Единица измерения*	*Тариф на единицу, долл., с НДС*		*Количество единиц*	*Предполагаемый доход, долл./год, с НДС*	
		Год 1	Годы 2–10 (ежегодно)		Год 1	Годы 2–10 (ежегодно)
Ответственное хранение	Поддоно-место (п/м)	126,2 (0,35 в день)	140,2 (0,38 в день)	16 200	2 044 440	2 271 240
	$м^3$	73,03* (0,20 в день)	81,13* (0,22 в день)	27 994		
Механизированная разгрузка и первичная приемка	Грузопакет	3,02	3,36	259 200	782 784	870 912
	$м^3$	1,75	1,94	447 898		
Ручная разгрузка и первичная приемка	$м^3$	4,5	5	111 974	503 883	559 870
Комплектация целыми грузопакетами и механизированная погрузка	Грузопакет	3,02	3,36	64 800	195 696	217 728
	$м^3$	1,75	1,94	111 974		
Комплектация транспортной тарой, пакетирование и механизированная погрузка на поддонах	$м^3$	3,94	4,38	279 936	1 102 948	1 226 120
Комплектация транспортной тарой и ручная погрузка	$м^3$	4,5	5	167 962	755 829	839 810
Оформление товаро-сопроводительных документов	Заказ	5,04	5,6	27 994	141 090	156 766
Итого годовой доход (с НДС)					5 526 670	6 142 446
Итого годовой доход (без НДС)					4 683 619	5 205 463
Итого годовой доход (без НДС) на 1 $м^3$ груза					8,37	9,30

* Тариф на 1 $м^3$ груза рассчитан путем деления значений из предыдущей строки таблицы на 1,728 (объем одного поддона с грузом).

Основной составляющей себестоимости логистических услуг, предоставляемых складом, является заработная плата операционного персонала.

Предположим, что 30% фонда заработной платы основного производственно-складского персонала приходится на сдельную оплату труда, т.е. зависит от величины обработанного за период грузопотока.

Таблица 6.2

Переменные затраты в расчете на 1 м^3 обработанного груза

Услуга	*Переменные затраты, долл./м^3*
Разгрузка механизированная	0,06
Разгрузка ручная	0,11
Комплектация грузопакетами	0,29
Комплектация коробами, пакетирование и механизированная погрузка	0,52
Комплектация коробами и ручная погрузка	0,58
Ответственное хранение	0
Оформление документов	0

Указанные в табл. 6.2 переменные затраты одинаковы на протяжении с первого по десятый год жизни проекта.

Таблица 6.3

Постоянные затраты, долл., на 1 м^2 площади склада

Год	*Налог на имущество (2,2%)*	*Затраты от инвестиционной деятельности*	*Доходы от инвестиционной деятельности (продажи основных средств по остаточной стоимости) без НДС*	*Постоянная часть эксплуатационных издержек*	*Итого*	*Итого на 1 м^3*
0	0	–13 002 336	0	0	–13 002 336	–765
1	–232 438	0	0	–1 422 606	–1 655 044	–97
2	–217 247	0	0	–1 422 606	–1 639 853	–96
3	–205 594	–75 600	542	–1 422 606	–1 703 258	–100
4	–193 933	0	0	–1 422 606	–1 616 539	–95
5	–201 837	–2 219 280	275 298	–1 422 606	–3 568 425	–210
6	–207 627	–75 600	542	–1 422 606	–1 705 291	–100
7	–193 141	0	0	–1 422 606	–1 615 747	–95
8	–180 776	0	0	–1 422 606	–1 603 382	–94
9	–169 122	–75 600	542	–1 422 606	–1 666 786	–98
10	–160 106	0	7 153 000	–1 422 606	5 570 288	328

Площадь склада составляет 17 000 м^2 (с подсобными и вспомогательными помещениями).

При оптимизации NPV нужно учесть и *налог на прибыль*, который рассчитывается по формуле

$$\text{НП} = 0{,}24 \times \left(\begin{matrix}\text{Доход}\\ \text{от предостав-}\\ \text{ленных услуг}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Общие эксплуата-}\\ \text{ционные затраты}\\ \text{(постоянные}\\ \text{и переменные)}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{Амортизаци-}\\ \text{онные}\\ \text{отчисления}\end{matrix} \right).$$

Амортизационные отчисления по годам распределены равномерно и составляют 702 166 долл. в год начиная с первого года.

Поскольку оптимизация NPV проводится для базового варианта, предполагающего, что склад будет задействован частично для обработки собственного грузопотока компании, а частично для оказания услуг сторонним организациям, в расчетах по каждому году необходимо учесть *экономию издержек, связанную с перемещением собственного товара на новый склад*. Указанная ежегодная экономия равна 1 256 512 долл.

Продолжительность одного периода — 1 год (365 дней для ответственного хранения, 300 дней для остальных услуг).

Таблица 6.4

Площадь и время использования складского помещения при оказании услуг

Услуга	*Площадь, занимаемая 1 м^3 груза, м^2*	*Время использования склада, дни*
Разгрузка механизированная	0,56	1
Разгрузка ручная	0,69	1
Комплектация грузопакетами	0,56	1
Комплектация коробами, пакетирование и механизированная погрузка	0,69	1
Комплектация коробами и ручная погрузка	0,69	1
Ответственное хранение	0,33	15
Оформление документов	0	1

Таблица 6.5

Площадь операционных зон для оказания услуг

Услуга	*Название зоны склада*	*Площадь общая, м^2*	*Площадь для коммерческого использования, м^2*
Разгрузка механизированная	Зоны разгрузки и приемки	1440	1253
Разгрузка ручная			
Комплектация грузопакетами	Зона комплектации, экспедиции, отправки, зона отгрузки	2189	1904
Комплектация коробами, пакетирование и механизированная погрузка			
Комплектация коробами и ручная погрузка			
Ответственное хранение	Зона хранения	10 968	9542
Итого		14 597	12 699

Таким образом, общая площадь операционных зон склада (помещений основного производственного назначения) равна **14 597 м^2** (из них **12 699 м^2** используются для предоставления услуг, а **1898 м^2** — для обработки собственного грузопотока компании).

Таблица 6.6

Время загрузки оборудования при оказании услуг

Услуга	*Вид оборудования*	*Время загрузки, ч/м^3*
Разгрузка механизированная	ЭП или ЭТ	0,021
	ЭШ	0,033
Разгрузка ручная	ЭП или ЭТ	0,021
	ЭШ	0,033
	ГТ	0,03
Комплектация грузопакетами	ЭШ	0,033
	ЭП или ЭТ	0,04
Комплектация коробами, пакетирование и механизированная погрузка	КЭТ	0,12
	ЭТ или ЭП	0,04
	Пакетоформировочная машина	0,02
Комплектация коробами и ручная погрузка	КЭТ	0,12
	ЭТ или ЭП	0,04
	ГТ	0,03

Примечание: ГТ — гидравлическая тележка; КЭТ — комплектовочная электротележка; ЭП — электропогрузчик; ЭТ — электротележка; ЭШ — электроштабелер.

В качестве оборудования для услуги «Ответственное хранение» используются полочные стеллажи. На одном поддономесте (п/м) в ячейке стеллажа хранится один грузопакет (1,728 м^3). Средний срок хранения партии груза, поступающей на склад, — 15 дней.

Таблица 6.7

Число единиц оборудования каждого вида

Оборудование	*Общее количество*	*Количество единиц для предоставления услуг*
ЭТ	15	13
ЭП	5	4
ЭШ	9	8
КЭТ	20	17
ГТ	21	18
Пакетоформировочная машина	8	7
Полочный стеллаж	23 250 п/м	20 250 п/м

Время эффективного использования оборудования:

а) ЭТ, ЭП, ГТ, ЭШ, КЭТ: 300 дней · 16 ч · 0,9 (коэффициент использования) = **4320 ч/год**;

б) полочные стеллажи: 365 дней в году круглосуточно.

Поскольку спрогнозировать объемы услуг в данном случае невозможно, расчеты представлены исходя из максимальной емкости единовременного хранения склада (см. табл. 6.8).

Таблица 6.8

Емкость единовременного хранения склада

Услуга	*Максимальный объем услуг, м^3/год*
Разгрузка механизированная	**559 872***
Разгрузка ручная	
Комплектация грузопакетами	**559 872****
Комплектация коробами, пакетирование и механизированная погрузка	
Комплектация коробами и ручная погрузка	
Ответственное хранение	16 200 п/м (**27 994 м^3**) (единовременно **559 872 м^3 в год**)
Оформление документов	27 994 заказа

* Суммарно по двум видам разгрузки.

** Суммарно по трем видам комплектации и отгрузки.

Таблица 6.9

Стоимость оборудования

Оборудование	*Стоимость единицы, долл., с НДС*
ЭТ	17 000
ЭП	30 000
ЭШ	68 000
КЭТ	25 000
ГТ	400
Пакетоформировочная машина	6600
Полочный стеллаж	30 за 1 п/м

Стоимость единицы площади склада составляет 480 долл./$м^2$ (напомним, что общая площадь — 17 000 $м^2$).

Максимальный объем ресурсов для инвестирования — 16,8 млн долл.

Однопериодная модель строительства и эксплуатации склада с учетом риска

Будем использовать следующее соотношение:

$$\text{Маржа } (c) = \text{Доход } (a) - \text{Переменные затраты } (b).$$

Данные о переменных затратах по разным услугам приведены в табл. 6.2, а постоянные затраты полагаем равными 1 655 044 долл. Предположим, что случайной величиной является доход (тариф) на услугу (табл. 6.10). (Заранее предсказать точные тарифы, которые обеспечат полную загрузку склада, трудно.)

Таблица 6.10

Тарифы на услугу, долл./$м^3$ в день

Вероятность	*Ответственное хранение*	*Механизированная разгрузка*	*Ручная разгрузка*	*Комплектация грузопакетами и механизированная погрузка*	*Комплектация транспортной тарой и механизированная погрузка*	*Комплектация транспортной тарой и ручная погрузка*	*Оформление документов*
0,2	0,2	1,77	4,54	1,77	3,98	4,54	5,09
0,3	0,25	2,12	5,46	2,12	4,78	5,46	6,1
0,08	0,22	1,89	4,86	1,89	4,26	4,86	5,45
0,12	0,26	2,27	5,83	2,27	5,12	5,83	6,54
0,12	0,16	1,5	3,86	1,5	3,38	3,86	4,33
0,18	0,18	1,8	4,64	1,8	4,06	4,64	5,19

Введем следующие обозначения объема услуг, оказываемых на складе:

x_1 — ответственное хранение;
x_2 — механизированная разгрузка и первичная приемка;
x_3 — ручная разгрузка и первичная приемка;
x_4 — комплектация грузопакетами и механизированная погрузка;
x_5 — комплектация транспортной тарой, пакетирование и механизированная погрузка;
x_6 — комплектация транспортной тарой и ручная погрузка;
x_7 — оформление товаросопроводительных документов.

Используя исходные данные из табл. 6.1–6.9, можем сформировать **многопериодную модель оптимизации NPV проекта**. Согласно формуле (6.8) целевая функция будет выглядеть так:

$$\sum_{\tau=1}^{10}\sum_{i=1}^{7}\frac{a_i^{\tau}x_i^{\tau}}{(1+0,14)^{\tau}}-\sum_{\tau=1}^{10}\sum_{i=1}^{7}\frac{b_i^{\tau}x_i^{\tau}}{(1+0,14)^{\tau}}-\sum_{\tau=1}^{10}\frac{Z_{\text{пост}}^{\tau}}{(1+0,14)^{\tau}}\to\max. \quad (6.37)$$

Ограничение по объему склада (6.9) для наших исходных значений (см. табл. 6.4) будет следующее:

$$\begin{aligned}&0,33x_1/365+(0,56x_2+0,69x_3+0,56x_4+0,69x_5+\\&+0,69x_6)/300\le 12\,699.\end{aligned} \quad (6.38)$$

Ниже приведем ограничения по времени работы для всех видов оборудования (см. табл. 6.6). По формуле (6.10) имеем

$$\begin{cases}\text{ЭТ (ЭП)}:\ 0,021x_2+0,021x_3+0,04x_4+0,04x_5+\\ \qquad\qquad +0,04x_6\le 4320\cdot 17,\\ \text{ЭШ}:\ 0,033x_2+0,033x_3+0,033x_4\le 4320\cdot 8,\\ \text{ГТ}:\ 0,03x_3+0,03x_6\le 4320\cdot 18,\\ \text{КЭТ}:\ 0,12x_5+0,12x_6\le 4320\cdot 17,\\ \text{Пакетоформировочная}\\ \text{машина}:\ 0,02x_5\le 4320\cdot 7.\end{cases} \quad (6.39)$$

По формуле (6.11) получаем несколько уравнений для объемов прогнозируемых услуг (неравенства были намеренно преобразованы в равенства для достижения максимальной загруженности складского помещения и, следовательно, получения максимальной прибыли):

$$\begin{cases} x_1 = 27\,994, \\ x_2 + x_3 = 559\,872, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 559\,872, \\ x_7 = 27\,994. \end{cases} \quad (6.40)$$

$$x_i \geq 0.$$

П р и м е ч а н и е. В нашем случае площадь склада изначально известна и остается неизменной на протяжении всего периода использования, поэтому постоянные затраты $Z^{\tau}_{\text{пост}}$ не зависят от емкости склада и ограничение (6.12) не будет иметь места.

В силу того что тарифы на ручную разгрузку и погрузку значительно выше, чем на аналогичные механизированные услуги (см. табл. 6.10), при достижении максимума целевой функции (дохода) механизированные разгрузка и погрузка (x_2 и x_5 соответственно) становятся заведомо невыгодными услугами с математической точки зрения и обнуляются. Однако с рыночной точки зрения склад должен предоставлять весь перечень услуг, требуемый рынком, поэтому, чтобы исключить нулевые значения искомых переменных, необходимо ввести дополнительные уравнения.

Выберем три варианта дополнительных ограничений для переменных x_3 и x_6. В первом случае услуги «Ручная разгрузка и первичная приемка» и «Комплектация транспортной тарой и ручная погрузка» будут составлять не более 50% от суммарного объема услуг (559 872 м^3/год), что можно записать таким образом:

$$\begin{cases} x_3 \leq 279\,936, \\ x_6 \leq 279\,936. \end{cases} \quad (6.41)$$

Во втором случае указанные услуги (ручная погрузка и разгрузка) ограничим 30% общего объема, а в третьем — 10%:

$$\begin{cases} x_3 \leq 167\,962, \\ x_6 \leq 167\,962; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \leq 55\,987{,}2, \\ x_6 \leq 55\,987{,}2. \end{cases}$$

Используя программный модуль «Поиск решения» пакета Excel, получим результаты решения задачи (6.37)–(6.41), приведенные в табл. 6.11.

Таблица 6.11

Результаты расчетов по оптимизации NPV проекта для различных вариантов

Вариант	*Значение целевой функции*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	27 820 200,78	27 994	279 936	279 936	0	279 936	279 936	27 994
2	25 720 919,26	27 994	391 910	167 962	0	391 910	167 962	27 994
3	23 621 619,00	27 994	503 885	55 987	0	503 885	55 987	27 994

Пользуясь ранее введенными обозначениями, можем сформулировать **однопериодную модель проекта строительства и эксплуатации склада с учетом риска** для тех же исходных данных.

В данной задаче c_i обозначает маржу на услугу x_i. На основании вероятностного распределения тарифов (см. табл. 6.10) получим значения $\overline{c}_i$ (табл. 6.12).

Таблица 6.12

Математическое ожидание маржи по различным услугам

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\overline{c}_i$	78,62	1,92	4,93	1,92	4,32	4,93	5,52

Теперь можно сформулировать целевую функцию (6.14), значение которой станет приемлемой доходностью $Д_{\text{пр}}$ в *задаче по нахождению минимума риска* (6.21)–(6.28):

$$\sum_{i=1}^{7} \overline{c}_i x_i - 1\,655\,044 \to \max. \qquad (6.42)$$

Ограничения (6.38)–(6.41), сформулированные при решении многопериодной задачи, действительны и для однопериодной модели.

Решая задачу (6.42), (6.38)–(6.41), получаем

$$Д_{\text{пр}} = \mathbf{4\,793\,580{,}76\ долл.}$$

Прежде чем перейти к формированию второй задачи по нахождению минимального значения риска, необходимо ввести дополнительные обозначения:

$\overline{x}_i$ — усредненное значение x_i по переменным затратам;

σ_i^2 — дисперсия ожидаемой доходности по услуге x_i — и провести некоторые расчеты (табл. 6.13).

Таблица 6.13

Средние затраты и дисперсия доходности по каждой услуге

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\bar{x}_i$	0	0,0384	0,0043	0,1599	0,0305	0,0139	0
σ_i^2	165,3109	0,0610	0,3852	0,1829	0,7065	0,9018	0,4527

Ковариационная матрица для средней маржи $\bar{c}_i$:

$$\begin{pmatrix} 1127,49 & 4,37 & 11,21 & 4,37 & 9,88 & 11,23 & 12,55 \\ 4,37 & 0,09 & 0,23 & 0,11 & 0,25 & 0,7 & 0,9 \\ 11,21 & 0,23 & 0,59 & 0,27 & 0,59 & 0,67 & 0,63 \\ 4,37 & 0,11 & 0,27 & 0,22 & 0,6 & 0,48 & 0,25 \\ 9,88 & 0,25 & 0,59 & 0,6 & 0,86 & 0,97 & 0,56 \\ 11,23 & 0,7 & 0,67 & 0,48 & 0,97 & 1,1 & 0,63 \\ 12,55 & 0,9 & 0,63 & 0,25 & 0,56 & 0,63 & 0,71 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция для наших значений согласно формуле (6.21) представлена ниже:

$$\sum_{i=1}^{7} \sigma_i^2 \bar{x}_i^2 + \sum_{l=1}^{7} \sum_{p=1}^{7} \mathrm{cov}_{lp}\, \bar{x}_l \bar{x}_p \to \min. \qquad (6.43)$$

Ограничение (6.22) с учетом наших данных (см. табл. 6.12) преобразуется так:

$$78,62x_1 + 1,92x_2 + 4,93x_3 + 1,92x_4 + 4,32x_5 + 4,93x_6 + \\ + 5,52x_7 \geq 4\,793\,580,76. \qquad (6.44)$$

Решая задачу (6.43), (6.44), (6.38)–(6.40), получаем значение целевой функции, равное **0,0173**, и следующие объемы складских услуг (**27 994**; **526 127**; **33 745**; **487 401**; **51 564**; **20 907**; **27 994**).

Оценка устойчивости в нашем случае сводится к определению решения однопериодной модели (6.1)–(6.7) для тарифов первого года эксплуатации склада и для тарифов последующих (девяти) лет, так как тарифы первого года ниже на 10%. Результаты решения двух указанных задач будут отличаться только значением целевой функции: для первого года максимальный доход составляет **3 781 049,82 долл.**, для остальных лет максимальный ежегодный доход равен **4 479 773, 54 долл.** Объемы оказываемых услуг и в первой и во второй задачах одинаковые и представляют собой вектор (**27 994**; **279 936**; **279 936**; **0**; **279 936**; **279 936**; **27 994**). Это обстоятельство позволяет утверждать, что задача является устойчивой к изменению цен на услуги и при темпе роста инфляции в 10% оптимальным будет оставаться один и тот же набор объемов услуг.

ГЛАВА 7
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ФАЗЫ ПРОЕКТА В ЛОГИСТИКЕ

При анализе эффективности проекта одним из важных его показателей является *продолжительность инвестиционной фазы*. В частности, она определяет время, за которое может быть создано предприятие, производящее продукцию или оказывающее услуги, реализация которых обеспечит окупаемость проекта. Например, таким проектом может быть проект строительства и эксплуатации склада. С учетом ограниченности жизненного цикла выпускаемой продукции и оказываемых услуг инвестор заинтересован в с о к р а щ е н и и инвестиционной фазы, при этом увеличивается временной интервал, на котором предприятие может эффективно функционировать.

Успешное выполнение всех действий, относящихся к инвестиционной фазе, зависит от эффективности планирования, благодаря которому можно определить такие параметры, как продолжительность каждого контролируемого элемента проекта, потребность в трудовых, материальных, технических и финансовых ресурсах, сроки поставки сырья и материалов. Планирование позволяет реализовать проект в заданный срок с минимальной стоимостью в рамках установленных затрат ресурсов.

Рассмотрим задачи оптимизации инвестиционной фазы проекта при различных условиях и типах ограничений.

7.1. ОДНОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ФАЗЫ ПРОЕКТА

Для подавляющего большинства инвестиционных проектов на фазе предынвестиционного анализа для инвестора важен такой показатель, как *время его реализации*.

Общая постановка задачи состоит в следующем. Пусть необходимо выполнить проект, состоящий из n этапов, технологическая последовательность выполнения которых задана ациклическим ориентированным графом $G(m, n)$, где m — число дуг графа, n — число вершин. Для выполнения этапа i проекта должны быть выделены ресурсы нескладируемого вида в объеме $a_i = (a_{i1}, ..., a_{im})$. Прерывать выполнение этапа до его полного завершения нельзя.

Напомним, что *нескладируемыми ресурсами* являются оборудование, станки, механизмы, транспортные средства, трудовые ресурсы и др., т.е. все виды ресурсов, которые многократно используются при выполнении различных этапов проекта и после завершения очередного этапа передаются для использования на последующих.

Задан также общий объем нескладируемых ресурсов всех видов, которые используются исполнителями проекта, $b = (b_1, ..., b_m)$.

Кроме того, известно время выполнения каждого из этапов t_i ($i = 1, ..., n$). Каждый этап i должен осуществляться непрерывно в течение времени t_i при условии, что на него выделены ресурсы в объеме $a_i = (a_{i1}, ..., a_{im})$ и все предшествующие ему согласно ориентированному графу $G(m, n)$ этапы уже выполнены.

Необходимо выбрать такую последовательность выполнения всех этапов проекта, которая не нарушала бы технологических ограничений, заданных графом $G(m, n)$, и ограничений на объем используемых ресурсов в каждый момент времени t реализации проекта, а также была бы минимальной по продолжительности.

Данная задача принадлежит к классу NP-полных задач. Точными методами решения подобных дискретных оптимизационных задач является, в частности, метод ветвей и границ.

Рассмотрим **метод ветвей и границ** применительно к решению данной задачи.

Шаг 1. *Вычисление нижней оценки целевой функции задачи.* Рассмотрим формулу вычисления нижней оценки для трех случаев.

1. Ресурсами являются станки (или приборы), и для выполнения одного этапа необходим один станок. Всего станков M. Тогда нижняя оценка, в случае если есть изолированные вершины, вычисляется по формуле

$$T_{\text{н}} = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ t_i, S_{\text{кр}}, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} t_i \right\}, \tag{7.1}$$

где $S_{\text{кр}}$ — длина критического пути графа $G(m, n)$.

Суть нижней оценки состоит в том, что время выполнения проекта не может быть меньше, с одной стороны, продолжительности критического пути, так как все этапы, входящие в этот путь, должны выполняться последовательно и не допускается выполнения двух различных этапов в один и тот же момент времени, а с другой — продолжительности такого плана реализации проекта, когда все станки (приборы) непрерывно работают в течение всего времени реализации проекта, т.е. плана, продолжительность которого $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} t_i$.

2. Для выполнения каждого этапа необходимо a_i ($1 \le a_i \le M$) единиц ресурсов (оборудования, транспортных единиц, обслуживающего персонала и т.п.). В этой ситуации нижняя оценка вычисляется так:

$$T_{\text{н}} = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ t_i, S_{\text{кр}}, \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} t_i a_i \right\}. \tag{7.2}$$

3. В общем случае, т.е. когда $a_i = (a_{i1}, ..., a_{im})$, нижняя оценка может быть вычислена таким образом:

$$T_{\text{н}} = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ t_i, S_{\text{кр}}, \max_{j=\overline{1,m}} \frac{1}{b_j}\sum_{i=1}^{n} t_i a_{ij} \right\}. \tag{7.3}$$

Шаг 2. *Вычисление верхней оценки целевой функции.* Верхняя оценка вычисляется путем построения какого-либо допустимого плана реализации проекта, и продолжительность этого плана выбирается в качестве верхней оценки $T_{\text{в}}$.

Если выполняется равенство $T_{\text{н}} = T_{\text{в}}$, то решение задачи получено — им будет тот план, который соответствует верхней оценке $T_{\text{в}}$. В противном случае переходят к шагу 3.

Шаг 3. *Построение очередного допустимого плана выполнения проекта и вычисление нижней текущей оценки.* В процессе построения этого плана после завершения очередного этапа проекта вычисляется нижняя текущая оценка $T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau)$:

$$T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau) = \tau + \max_{\substack{i=\overline{1,n} \\ l=\overline{1,k}}} \left\{ t_i^{\tau}, S_l^{\tau}, \max_{j=\overline{1,m}} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\tau} a_{ij} \right\}, \tag{7.4}$$

где τ — момент завершения какого-либо этапа проекта;
k — число путей в графе $G(m, n)$;
t_i^{τ} — продолжительность этапа i с учетом его частичного или полного выполнения к моменту времени τ (в последнем случае полагаем $t_i^{\tau} = 0$);

S_l^{τ} — продолжительность пути S_l к моменту времени τ с учетом полного или частичного выполнения этапов, входящих в путь S_l.

Если оказалось, что $T_{н}^{тек}(\tau) \geq T_{в}$, то построение текущего плана прекращают ввиду его неперспективности и переходят на начало шага 3, т.е. выбирают новый вариант построения плана. В случае если $T_{н}^{тек}(\tau) < T_{в}$, выбирают очередной этап для выполнения, выделяют для него ресурсы и в момент завершения τ^1 ($\tau^1 > \tau$) какого-либо этапа проекта вычисляют $T_{н}^{тек}(\tau^1)$. При построении плана реализации проекта возможна одна из альтернатив: либо для какого-то τ^* окажется, что $T_{н}^{тек}(\tau^*) \geq T_{в}$, либо будет построен новый план реализации проекта продолжительностью $T < T_{в}$. В последнем случае значение $T_{в}$ полагают равным T и переходят к анализу очередного варианта реализации проекта.

Оптимальное решение будет получено, либо когда $T_{в}$ станет равным $T_{н}$, либо когда анализ всех допустимых вариантов построения плана исчерпан. В качестве оптимального и в том и в другом случае выбирается *план, соответствующий последнему значению верхней границы $T_{в}$*.

Рассмотрим теперь **пример решения задачи оптимизации времени выполнения проекта**.

□ Будем предполагать, что последовательность выполнения этапов проекта задана ориентированным ациклическим графом $G(m, n)$ следующего вида (рис. 7.1).

Пусть вершины графа соответствуют *этапам проекта*, а дуги отражают *технологическую последовательность их выполнения*.

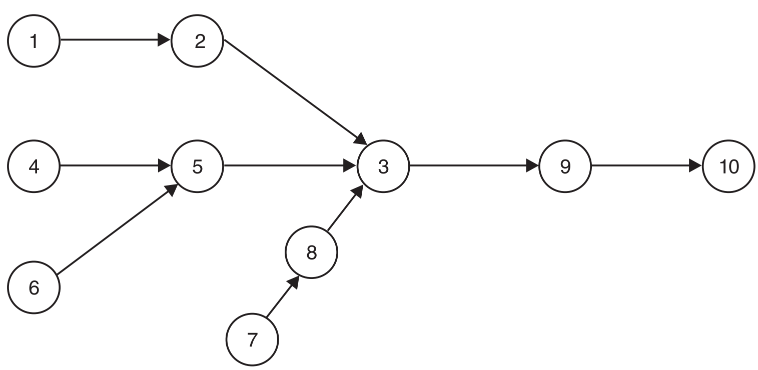

Рис. 7.1. Ориентированный граф, задающий технологическую последовательность выполнения этапов проекта

Не уменьшая общности, можно сказать, что продолжительность каждого этапа проекта совпадает с его номером и для выполнения каждого этапа проекта необходим один исполнитель, т.е. $a_i = 1$ ($i = 1, \dots, 10$), число исполнителей равно двум ($b = 2$).

Вычислим продолжительности путей графа. В путь S_1 входят этапы 1, 2, 3, 9, 10, и, следовательно, его длина равна 25. Аналогично $S_2 = 31$, $S_3 = 33$, $S_4 = 37$. Следовательно, $S_{\text{кр}} = S_4 = 37$.

Определим сумму продолжительностей всех этапов проекта:

$$\sum_{i=1}^{10} t_i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55. \tag{7.5}$$

Затем вычислим $T_{\text{н}}$ по формуле

$$T_{\text{н}} = \max\left\{S_{\text{кр}}, \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{10} t_i\right\} = \max\left\{37, \frac{55}{2}\right\} = 37. \tag{7.6}$$

Далее, следуя описанию метода ветвей и границ, вычислим верхнюю оценку $T_{\text{в}}$, для чего определяем некоторое допустимое решение (допустимый план выполнения всех этапов проекта). Выберем в качестве этого решения последовательность выполнения этапов, изображенную графически на диаграмме Гантта (рис. 7.2). **Диаграмма Гантта** представляет собой двумерную систему координат, в которой по горизонтальной оси фиксируется время, а по вертикальной — номер исполнителя (станка, прибора, машины и т.п.). Пронумерованные дуги на диаграмме Гантта отражают динамику выполнения этапов проекта.

Продолжительность выполнения проекта по этому плану (решению) равна 41. Следовательно, $T_{\text{в}} = 41$. Так как $T_{\text{н}} < T_{\text{в}}$, переходим к анализу следующего варианта выполнения проекта. Выберем, например, этап 6 и этап 7 в качестве исходных элементов для выполнения. Тогда в момент $\tau = 6$ завершится выполнение этапа 6; на диаграмме Гантта эта ситуация отразится следующим образом (рис. 7.3).

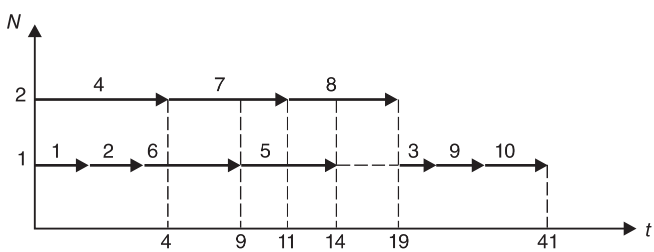

Рис. 7.2. Диаграмма Гантта для первого допустимого плана реализации этапов проекта

Рис. 7.3. Диаграмма Гантта для второго допустимого плана после завершения этапа 6

По формуле (7.4) вычислим $T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau)$ при $\tau = 6$:

$$T_{\text{н}}^{\text{тек}}(6) = \tau + \max\left\{S_i', \frac{1}{b}\sum_i t_i'\right\} = 6 + \max\left\{25, 31, 27, 31, \frac{43}{2}\right\} =$$
$$= 6 + 31 = 37. \tag{7.7}$$

Так как $T_{\text{н}}^{\text{тек}}(6) < T_{\text{в}}$, выбираем следующий этап для выполнения. Пусть это будет этап 4. Тогда в момент времени $\tau = 7$ завершится выполнение этапа 7; отметим эту ситуацию на диаграмме Гантта (рис. 7.4). Вновь вычислим $T_{\text{н}}^{\text{тек}}(7)$ по формуле (7.4):

$$T_{\text{н}}^{\text{тек}}(7) = 7 + \max\left\{25, 30, 27, 30, \frac{41}{2}\right\} = 37. \tag{7.8}$$

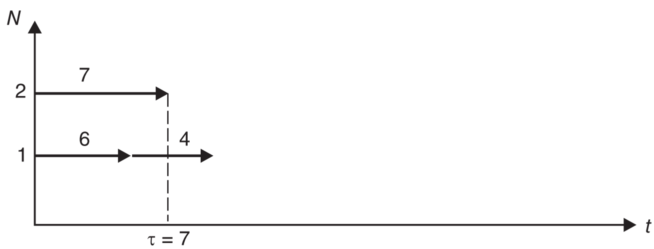

Рис. 7.4. Диаграмма Гантта для второго допустимого плана на момент окончания этапа 7

Далее продолжаем анализ этого и других допустимых решений согласно схеме, приведенной на рис. 7.5. ■

Учитывая большие затраты вычислительных ресурсов при решении NP-полных задач, для рассматриваемой задачи можно применить, например, **усеченный метод ветвей и границ**. Для использования такой схемы необходимо определить точность, с которой пользователь хотел бы получить приближенное решение. После

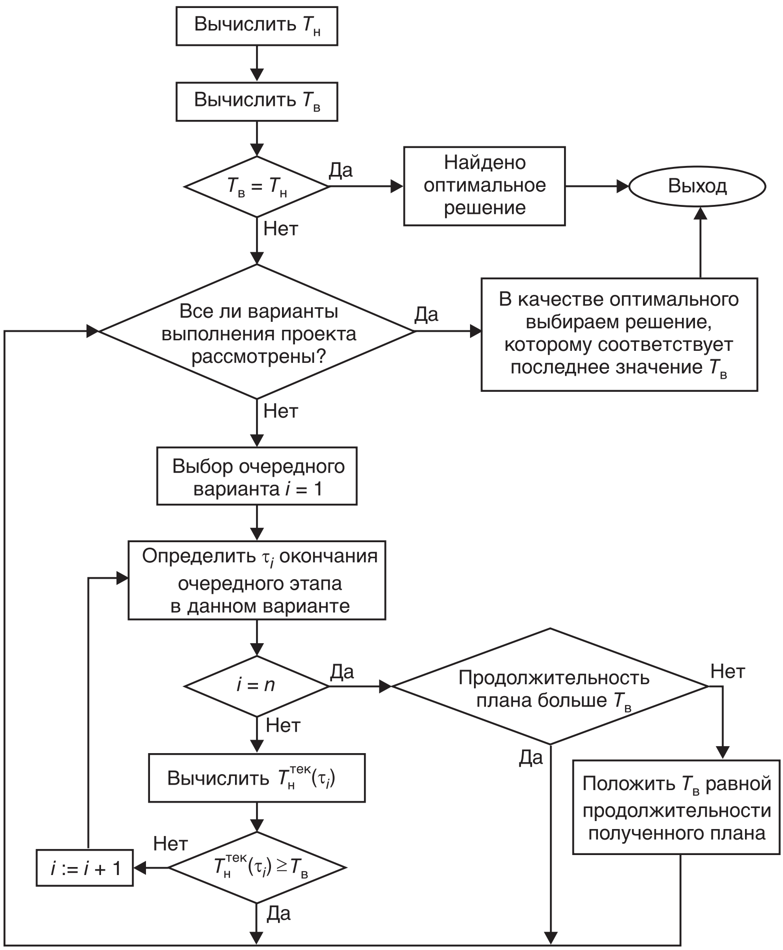

Рис. 7.5. Логическая схема метода ветвей и границ для оптимизации инвестиционной фазы проекта

этого в ходе решения задачи анализируется не все дерево вариантов проекта: анализ продолжается лишь до тех пор, пока не будет выполняться неравенство

$$\frac{T_в - T_н}{T_в} \cdot 100 \leq K. \tag{7.9}$$

Здесь $T_в$ — п о с л е д н е е значение верхней оценки; $T_н$ — значение нижней оценки; K — требуемая относительная точность решения в процентах.

7.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ФАЗЫ ПРОЕКТА С УЧЕТОМ СТОИМОСТИ РАБОТ

В параграфе 7.1 были рассмотрены методы оптимизации продолжительности проекта по критерию минимума времени выполнения всех работ (этапов) проекта. В некоторых случаях *продолжительности выполнения работ* могут быть сокращены либо за счет применения дополнительных ресурсов, либо за счет сверхурочной загрузки бригад, выполняющих работы проекта. И в первом и во втором случае можно сократить инвестиционную фазу проекта за счет дополнительного финансирования, объем которого, вообще говоря, ограничен.

Алгоритм сокращения продолжительности отдельных работ таков: в первую очередь рассматривается исполнитель, чьи работы являются критическими, далее выбирается та из его работ, у которой цена за сокращение длительности работы на единицу времени минимальна, и именно продолжительность этой работы сокращается.

Сокращение длительности этой работы происходит до тех пор, пока не произойдет одно из событий:

1) лимит сокращения продолжительности данной работы исчерпан;

2) критическими стали работы еще одного исполнителя;

3) финансовые ресурсы для сокращения продолжительности работ исчерпаны.

Если произошло событие 3, то работа алгоритма закончена.

Если произошло событие 2, то выделяется еще один исполнитель, работы которого критичны, определяется работа, сокращение которой требует минимальных затрат, и финансовые ресурсы выделяются пропорционально для этих двух исполнителей.

Если реализуется событие 1, то для данного исполнителя определяется следующая по эффективности работа и выделяются финансы для ее сокращения. Работа алгоритма продолжается до тех пор, пока не будут использованы все финансовые ресурсы, направленные на минимизацию продолжительности работ, или не будут исчерпаны лимиты сокращения продолжительности для каждой работы.

Рассмотрим **пример использования предлагаемого алгоритма**.

☐ Пусть проект состоит из семи этапов и все этапы независимы, т.е. $G(m, n) \equiv G(0, 6)$. Длительности этапов могут меняться в интервале $t_i \in [d_i, D_i]$ ($i = 1, \ldots, 7$) и $t_i = D_i$, если нет дополнительных затрат на реализацию работы i. Если необходимо изменить продолжительность работы i, т.е. сделать так, чтобы $t_i < D_i$ ($i = 1, ..., 7$), то потребуются следующие финансовые затраты (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Финансовые затраты на сокращение продолжительности работ проекта

Номер работы	1	2	3	4	5	6	7
Стоимость сокращения продолжительности работы на единицу времени	7	3	2	5	6	1	4

Будем считать, что бюджет проекта, используемый для сокращения работ, равен 15 единицам. Интервалы возможной продолжительности работ заданы следующим образом:

$$t_1 \in [0{,}5;\ 1];\quad t_2 \in [1;\ 2];\quad t_3 \in [2;\ 3];\quad t_4 \in [1;\ 4];$$
$$t_5 \in [4;\ 5];\quad t_6 \in [3;\ 6];\quad t_7 \in [5;\ 7].$$

Все работы проекта выполняют два исполнителя (две бригады), и для каждой работы используется одна бригада.

Пусть исходный план реализации проекта (без сокращения продолжительностей работ) задан следующей диаграммой Гантта (рис. 7.6).

Исходная продолжительность инвестиционной фазы проекта равна 15.

Рассмотрим **последовательность сокращения работ проекта**.

Шаг 1. Критическими являются работы, выполняемые первым исполнителем. Наиболее эффективным является сокращение работы 3 (стоимость сокращения — 2 единицы). Продолжительность инвестиционной фазы станет равной 14 единицам, остаток финансовых средств $F_1 = 15 - 2 = 13$.

Шаг 2. Критическими остаются работы, выполняемые первым исполнителем. Сокращаем продолжительность работы 7 на одну единицу, так как работу 3 сократить уже нельзя. Продолжитель-

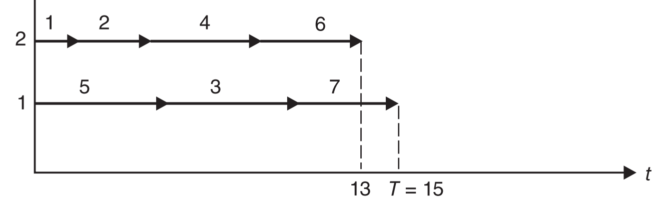

Рис. 7.6. Диаграмма Гантта при отсутствии финансирования на сокращение работ

ность инвестиционной фазы проекта станет равной 13 единицам, остаток финансовых средств $F_2 = 13 - 4 = 9$.

Шаг 3. Продолжительность работ, выполняемых первым исполнителем, совпадает с продолжительностью работ, выполняемых вторым исполнителем, и равна 13. Следовательно, для дальнейшего сокращения продолжительности инвестиционной фазы проекта необходимо сокращать работы как первого, так и второго исполнителя. Следуя описанию метода, выбираем работы 6 и 7. Суммарные финансовые затраты на их сокращение равны $1 + 4 = 5$. Продолжительность инвестиционной фазы проекта равна 12 единицам, остаток финансовых ресурсов $F_3 = 9 - 5 = 4$.

Шаг 4. Дальнейшее уменьшение продолжительности инвестиционной фазы может быть осуществлено за счет сокращения работ 5 и 6. Чтобы уменьшить продолжительность этих работ на одну единицу, необходимо $6 + 1 = 7$ единиц финансовых ресурсов, в то время как остаток финансовых средств $F_3 = 4$. Следовательно, пропорционально используем эти деньги для одинакового сокращения продолжительности работ 5 и 6, т.е. составим пропорцию $\frac{4-x}{x} = \frac{6}{1}$, откуда $4 - x = 6x$ и $x = {}^4/_7$. Следовательно, продолжительность инвестиционной фазы проекта стала равна $12 - {}^4/_7 = 11{}^3/_7$. При этом на сокращение работы 6 затратили ${}^4/_7$ единицы финансовых ресурсов, а на сокращение работы 5 — соответственно $3{}^3/_7$. Все финансовые ресурсы использованы и оптимальное решение при заданных начальных условиях получено. ■

7.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ФАЗЫ ПРОЕКТА ПРИ МЯГКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ

На практике нередки ситуации, когда технологическая последовательность выполнения работ, заданная ориентированным графом, носит не обязательный, а рекомендательный характер. Другими словами, она может нарушаться, однако это приводит либо к увеличению стоимости работ, либо к увеличению их продолжительности, либо к тому и другому одновременно. Например, при строительстве производственного здания вначале рекомендуется подвести все подземные коммуникации, а затем асфальтировать прилегающую территорию. Можно сделать все в обратном порядке, но при этом стоимость и продолжительность работ возрастут.

Заметим, что обычные ж е с т к и е ограничения на последовательность выполнения работ можно свести к р е к о м е н д а т е л ь н ы м ограничениям, если ввести сильное увеличение стоимости работ и их продолжительности при нарушении технологической последовательности выполнения. Технологические зависимости рекомендательного характера будем называть *мягкими*.

☐ Рассмотрим следующую **задачу**. Пусть имеется проект, состоящий из n работ, последовательность выполнения которых задается матрицей $A = (a_{ij})$, $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., n$, при этом если $a_{ij} = 1$, то, для того чтобы выполнить работу i, рекомендуется предварительно выполнить работу j, и $a_{ij} = 0$ в противном случае, т.е. когда безразлично, выполнена или нет работа j. Иными словами, вектор $a_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ — это вектор, состоящий из нулей и единиц, и единица на j-м месте вектора a_i означает, что работу j рекомендуется выполнить до начала выполнения работы i.

Например, если $a_i = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$, то, прежде чем выполнить работу i, рекомендуется выполнить работы 2 и 5.

Вектору a_i ($i = 1, ..., n$) соответствует двумерная матрица $B = (b_{il})$, $i = 1, ..., n$; $l = 1, 2$. При этом:

- если $a_{ij} = 0$, то $b_{i1} = 0$ и $b_{i2} = 0$;
- если $a_{ij} = 1$, то $b_{i1} = \tau_{ij}$, а $b_{i2} = z_{ij}$.

Здесь τ_{ij} задает увеличение длительности работы i, если она будет выполняться до выполнения работы j; z_{ij} — дополнительные затраты на выполнение работы i, если она начала выполняться до того, как полностью завершена работа j.

Например, если $a_i = (0, 1, 0, 0, 1)$, то

$$b_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{i2} & 0 & 0 & \tau_{i5} \\ 0 & z_{i2} & 0 & 0 & z_{i5} \end{pmatrix}.$$

Здесь τ_{i2} и τ_{i5} — увеличение длительности работы i, если она начнет выполняться до того, как будет закончена работа 2 и 5 соответственно. Если обе эти работы не будут завершены до начала выполнения работы i, то ее продолжительность возрастет на величину $\tau_{i2} + \tau_{i5}$. Аналогично увеличивается стоимость выполнения работы i при нарушении рекомендуемых зависимостей. ■

Рассмотрим **метод решения задачи минимизации инвестиционной фазы проекта при нарушении мягких ограничений**.

Критерием оптимальности, как и ранее, будем считать *время завершения инвестиционной фазы проекта*. Кроме рекомендуемых ограничений на последовательность выполнения работ, будем учитывать финансовые ограничения, связанные с затратами при нарушении мягких зависимостей при выполнении работ.

Для решения этой задачи будем использовать **традиционную схему метода ветвей и границ**.

Шаг 1. *Вычисление нижней границы оптимальной продолжительности инвестиционной фазы проекта*. Для этого снимаем все ограничения на последовательность выполнения работ, т.е. заменяем ориентированный граф $G(m, n)$, задающий рекомендуемую последовательность выполнения работ, на граф $G(0, n)$ и решаем задачу минимизации времени завершения инвестиционной фазы с использованием, например, метода, изложенного в параграфе 7.1. Нижней границей будем считать продолжительность полученного плана. Обозначим ее через $T_{\text{н}}$.

Шаг 2. *Вычисление верхней оценки оптимальной продолжительности инвестиционной фазы проекта*. В качестве верхней оценки выбираем продолжительность оптимального плана при соблюдении всех рекомендуемых ограничений, заданных исходным ориентированным графом $G(m, n)$. Для этого также может быть использован метод, изложенный в параграфе 7.1. Обозначим величину верхней оценки через $T_{\text{в}}$.

Шаг 3. *Вычисление текущих нижних оценок при формировании плана реализации инвестиционной фазы проекта*. На этом шаге алгоритма рассматриваются все возможные варианты выполнения инвестиционной фазы проекта (при этом допускается нарушение рекомендуемых зависимостей) с вычислением текущих нижних оценок $T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau)$ и $F_{\text{тек}}(\tau)$ в каждый момент времени, связанный с окончанием очередной работы проекта, по формулам:

$$T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau) = \tau + \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ t_i, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} t_i' \right\};$$

$$F_{\text{тек}}(\tau) = \sum_{i,j \in \Omega} z_{ij},$$

где t_i' — продолжительность работы i с учетом ее выполнения до момента времени τ;

M — число исполнителей;

Ω — множество нарушений рекомендуемой последовательности работ;

z_{ij} — дополнительные финансовые затраты, если работу i начали выполнять до завершения работы j.

Далее происходит проверка выполнения условий:

$$T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau) \geq T_{\text{в}}; \tag{7.10}$$

$$F_{\text{тек}}(\tau) > F, \tag{7.11}$$

где F — лимит дополнительных финансовых затрат, связанных с нарушением мягких ограничений.

Если в ы п о л н я е т с я хотя бы одно из этих неравенств, то дальнейшее формирование текущего плана прекращается. Если оба неравенства н е в ы п о л н я ю т с я, то выбирается невыполненная работа, для нее выделяется исполнитель и вычисляется очередной момент времени τ^1 ($\tau^1 > \tau$), в который завершается одна из работ. Далее вычисляются $T_{\text{н}}^{\text{тек}}(\tau^1)$ и $F_{\text{тек}}(\tau^1)$ и проверяется выполнение условий (7.10) и (7.11). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет отбракован формируемый план либо не будет получено допустимое решение, продолжительность которого $T^* < T_{\text{в}}$. В этом случае полагаем, что $T_{\text{в}} = T^*$, и переходим к формированию нового решения.

Работа алгоритма заканчивается, когда все варианты формирования допустимых решений рассмотрены, и в качестве о п т и м а л ь н о г о выбирается решение, которое соответствует *последнему (минимальному) значению* $T_{\text{в}}$.

Рассмотрим применение предложенного метода для **решения задачи минимизации времени выполнения проекта при мягких зависимостях работ**.

□ Пусть рекомендуемая последовательность выполнения работ проекта задана следующим ориентированным графом $G(m, n)$ (рис. 7.7).

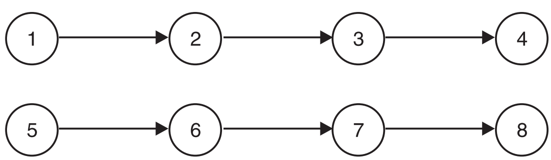

Рис. 7.7. Ориентированный граф, задающий последовательность выполнения работ проекта

Продолжительность каждой работы $t_i = 1$ ($i = 1, 2, ..., 8$). Каждая работа выполняется одним исполнителем, общее количество исполнителей равно 4. Затраты, связанные с нарушением выполнения рекомендуемой последовательности работ, лимитированы суммой $F = 10$. Матрица $A = (a_{ij})$, задающая последовательность выполнения работ для этой ситуации, такова:

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

Затраты, связанные с нарушением рекомендуемой последовательности выполнения работ, равны $z_{21} = z_{31} = z_{32} = z_{41} = z_{42} = z_{43} = z_{65} = z_{75} = z_{76} = z_{85} = z_{86} = z_{87} = 5$.

Увеличение продолжительности работ, связанное с нарушением мягких ограничений, задано следующим образом: $\tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{32} = \tau_{41} = \tau_{42} = \tau_{43} = \tau_{65} = \tau_{75} = \tau_{76} = \tau_{85} = \tau_{86} = \tau_{87} = 0{,}5$.

Рассмотрим **алгоритм решения задачи** для заданных исходных данных.

Шаг 1. Вычисляем н и ж н ю ю границу для оптимального решения задачи. Учитывая, что при снятии всех рекомендуемых ограничений на последовательность выполнения работ оптимальное значение продолжительности равно 2, получаем $T_н = 2$. Соответствующая диаграмма Гантта решения приведена на рис. 7.8.

Шаг 2. Вычисляем в е р х н ю ю границу для оптимального решения задачи. Оптимальное решение задачи при соблюдении всех рекомендуемых ограничений задается следующей диаграммой Гантта (рис. 7.9).

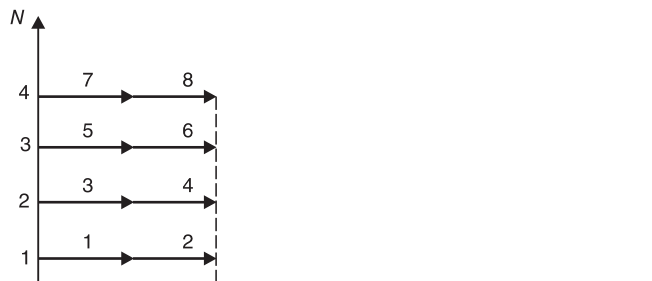

Рис. 7.8. Диаграмма Гантта в условиях отсутствия технологических ограничений на последовательность выполнения работ

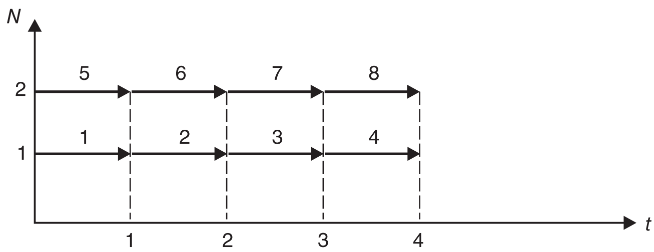

Рис. 7.9. Оптимальное решение в задаче минимизации инвестиционной фазы проекта с учетом рекомендуемых ограничений на последовательность выполнения работ

Продолжительность этого плана равна 4, следовательно, $T_{в} = 4$.

Шаг 3. Вычисляем текущие оценки. Формируем новый план выполнения работ проекта (рис. 7.10).

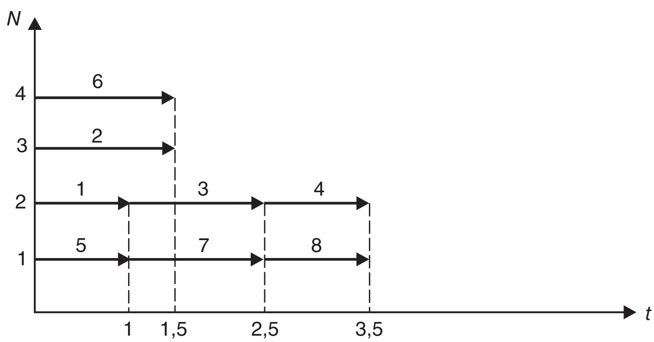

Рис. 7.10. Диаграмма Гантта при игнорировании рекомендуемых технологических ограничений на последовательность выполнения работ

В момент времени $\tau = 1$ (выполнены работы 1 и 5) вычисляем текущие оценки данного плана:

$$T_{н}^{тек}(1) = 1 + \max\{1, (4 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5)/4\} = 2,5 < 4 = T_{в};$$

$$F_{тек}(1) = 5 + 5 = 10 = F.$$

Так как ограничения (7.10) и (7.11) не выполняются, переходим к моменту времени $\tau = 1,5$. К этому моменту выполнены работы 6 и 2. Вычислим значения $T_{н}^{тек}(1,5)$ и $F_{тек}(1,5)$:

$$T_{н}^{тек}(1,5) = 1,5 + \max\{1, 4/4\} = 2,5 < 4 = T_{в};$$

$$F_{тек}(1,5) = 5 + 5 = 10 = F.$$

Ограничения (7.10) и (7.11) не выполняются, следовательно, продолжаем анализировать этот план. Вычисляем значения $T_н^{тек}(\tau)$ и $F_{тек}(\tau)$ на момент времени $\tau = 2{,}5$, когда завершены работы 7 и 3:

$$T_н^{тек}(2{,}5) = 2{,}5 + \max\{1,\ 2/4\} = 3 < 4 = T_в;$$

$$F_{тек}(2{,}5) = 5 + 5 = 10 = F.$$

Ограничения (7.10) и (7.11) также не выполняются. Следовательно, продолжаем формировать план и вычисляем момент времени завершения работ 4 и 8. Легко видеть, что это время $\tau = 3{,}5$. Следовательно, сформирован план, продолжительность которого $T^* = 3{,}5 < 4 = T_в$. Согласно описанию метода присваиваем $T_в$ значение 3,5 и переходим к формированию следующего допустимого плана. ■

ГЛАВА 8

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ФАЗЫ ПРОЕКТА

8.1. АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Мы рассмотрели задачу минимизации времени реализации проекта в условиях детерминированности всех исходных данных и, в частности, при фиксированных продолжительностях этапов проекта. На практике же часто встречаются ситуации, когда такой параметр, как продолжительность выполнения того или иного этапа, не может быть определен точно, в лучшем случае может быть дана только интервальная его оценка.

Рассмотрим возможные подходы к анализу данной ситуации.

Пусть длительность каждого этапа i ($i = 1, \ldots, n$) проекта может принимать любое значение t из интервала $[t_i^1, t_i^2]$. Поскольку задача планирования выполнения проекта является общей задачей теории расписаний, анализ влияния на оптимальный план (расписание) выполнения проекта изменения значений исходных параметров выполняется в рамках исследования устойчивости задачи. Далее этапы проекта будем называть *работами*.

Учитывая сделанные замечания, рассмотрим **задачу оптимального планирования выполнения проекта** в следующей постановке.

Пусть имеется множество работ $d_1, \ldots, d_n$, последовательность выполнения которых задана ациклическим орграфом G, у которого отсутствуют транзитивные дуги, поэтому каждой работе d_i может быть поставлено в соответствие множество работ $R_i = \{d_{R_i}\}$, в которое входят те и только те работы, которые должны быть выполнены прежде, чем может быть начата работа d_i.

Каждая работа характеризуется интервалом длительности выполнения $[t_i^1, t_i^2]$. Продолжительность работы d_i может быть любым числом из интервала $[t_i^1, t_i^2]$.

Ресурсы, необходимые для выполнения работы d_i, задаются вектором $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$, где a_{ij} — количество ресурсов j, необходимых для выполнения работы i ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$).

Общий объем ресурсов, который может привлекаться к выполнению работ, задается вектором $b = (b_1, ..., b_m)$.

Ресурсы, необходимые для каждой из работ, используются многократно, т.е. после завершения одной работы они могут быть переданы для выполнения других работ из множества невыполненных. Прерывание работ не допускается, т.е., если работа начата, она должна выполняться до полного завершения.

Выполнение работ происходит по допустимому расписанию, которое определяется следующим образом.

Допустимым расписанием выполнения работ $d_1, ..., d_n$ назовем набор множеств работ $X_1, ..., X_k$ и набор интервалов времени $[\tau_1^1, \tau_2^1]$, ..., $[\tau_1^k, \tau_2^k]$ длиной $T_1, ..., T_k$ соответственно такие, что в интервале времени $[\tau_1^i, \tau_2^i]$ выполняются работы только из множества X_i ($i = 1, ..., k$; $k \le n$). При этом должны соблюдаться следующие ограничения:

1) к работе d_i можно приступить только в том случае, если выполнены все работы множества R_i (отметим, что последовательность выполнения работ может быть задана также матрицей R размерности $n \times n$);

2) общий объем используемых ресурсов в каждый момент времени интервалов $[\tau_1^i, \tau_2^i]$ не должен превышать значения b_j ($j = 1, ..., m$);

3) все работы d_i $(1, ..., n)$ должны непрерывно выполняться в течение времени t_i, где t_i — продолжительность работы d_i.

Задача составления оптимального расписания заключается в том, чтобы для каждого вектора длительности работ $t \in \prod_{i=1}^{n} \left[t_i^1, t_i^2 \right]$ $(t_i^1 \ge 0)$ найти *расписание минимальной длины*. Обозначим через P n-мерный параллелепипед $P \in \prod_{i=1}^{n} \left[t_i^1, t_i^2 \right]$. Тогда **задача отыскания минимального по длительности расписания** для каждого $t \in P$ $(t = (t_1, ..., t_n))$ может быть сформулирована следующим образом.

Для каждого $t \in P$ найти минимум функционала $\sum_{l=1}^{k} T_l$, т.е.

$$\sum_{l=1}^{k} T_l \to \min, \tag{8.1}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} X_l^i a_{ij} \le b_j, \quad j = \overline{1,m}; \quad l = \overline{1,k}, \tag{8.2}$$

$$\sum_{l=1}^{n} X_l^i T_l c_l^i \geq t_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{8.3}$$

Если $X_l^i \neq 0$, то

$$\sum_{\mu=1}^{l-1} X_\mu^i T_\mu c_\mu^i \geq t_\alpha, \quad i = \overline{1, n} \tag{8.4}$$

для всех $d_\alpha \in R_i$, и, кроме того,

$$T_l \geq 0, \quad l = \overline{1, k}, \tag{8.5}$$

где T_l — величина интервала времени $[\tau_1^i, \tau_2^i]$.

Здесь $t \in P$ $(t = (t_1, ..., t_n))$ задает длительность работ, для которых находится оптимальное расписание, а X_l^i и c_l^i принимают следующие значения:

$$X_l^i = \begin{cases} 1, \text{ если в } l\text{-й интервал времени выполняется работа } d_i; \\ 0, \text{ если работа } d_i \text{ в этом интервале не выполняется;} \end{cases}$$

$$c_l^i = \begin{cases} 1, \text{ если существуют такие } k_1, k_2, \text{ что } k_1 + k_2 \leq 1 \text{ и} \\ \quad \sum_{j=k_1}^{k_1+k_2} X_j^i T_j \geq t_i, \text{ при этом } X_j^i = 1 \text{ для всех } k_1 \leq j \leq k_1 + k_2; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Прежде чем перейти к описанию метода решения поставленной задачи, докажем **вспомогательное утверждение**. Зафиксируем какой-либо вектор $t \in P$, задающий длительность выполнения работ.

Среди всех допустимых расписаний задачи (8.1)–(8.5) рассмотрим те, которые могут быть получены по следующей схеме. При первом назначении работ на выполнение выделим все подмножества работ, которые могут выполняться на интервале $[\tau_1^1, \tau_2^1]$, не нарушая ресурсных ограничений и ограничений на последовательность работ. Пусть векторы $X_1^1, ..., X_{k_1}^1$ соответствуют этим подмножествам работ так, что

$$X_{ji}^1 = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-я работа вошла в подмножество } j; \\ 0, \text{ если } i\text{-я работа не вошла в подмножество } j. \end{cases}$$

Введем отношение частичного порядка на множестве векторов $\{X_1^1, ..., X_{k_1}^1\}$. Будем считать, что $X_j^1 \geq X_l^1$, если $X_{ji}^1 \geq X_{li}^1$ $(i = 1, ..., n)$.

Заданное отношение частичного порядка разбивает множество векторов $\{X_1^1, ..., X_{k_1}^1\}$ на классы, в каждом из которых существует *максимальный элемент*. Оставим среди множества векторов $\{X_1^1, ..., X_{k_1}^1\}$ только максимальные элементы и выберем какой-либо из них, допустим X_p^1. Среди работ, соответствующих ненулевым координатам вектора X_p^1, выберем такую работу d_{p_1}, у которой *время выполнения* минимально. Положим $T_1 = t_{p_1}$ и будем считать, что работа d_{p_1} выполнена. После этого перейдем к построению совокупности векторов $\{X_1^2, ..., X_{k_2}^2\}$, соответствующих множеству работ, готовых к выполнению после завершения работы d_{p_1}.

Выбирая один из максимальных элементов, находим минимальную по продолжительности работу d_{p_2} с учетом ее возможного выполнения на предыдущем шаге. Будем считать $T_2 = t'_{p_2}$, где $t'_{p_2} = t_{p_2}$, если $X_{pp_2}^2 = 0$, и $t'_{p_2} = t_{p_2} - t_{p_1}$, если $X_{pp_2}^2 = 1$.

Через k ($k \le n$) шагов получим некоторое *допустимое расписание задачи* (8.1)–(8.5). Рассмотрев все возможные варианты выбора максимальных элементов на всех этапах построения допустимого расписания, получим множество допустимых расписаний, которое назовем ***базовым множеством расписаний***.

Каждое базовое расписание может быть представлено следующим образом. Сопоставим каждому вектору X_i, задающему множество выполняемых работ на интервале $[\tau_1^i, \tau_2^i]$, номер N_i самой короткой работы среди работ, соответствующих ненулевым координатам вектора X_i, учитывая при этом время выполнения этих работ на интервалах $[\tau_1^1, \tau_2^1], ..., [\tau_1^{i-1}, \tau_2^{i-1}]$. Получим, что множество векторов X_i и номеров N_i ($i = 1, ..., k$) однозначно определяет *допустимое базовое расписание*.

Значение функционала (8.1) рассчитывается по формуле

$$\sum_{i=1}^{k} T_i = \sum_{i=1}^{k} t'_{N_i},$$

где t'_{N_i} — продолжительность работы d_{N_i} с учетом ее возможного выполнения на этапах 1, ..., $i - 1$.

Если в задаче (8.1)–(8.5) интервалы времени $[t_i^1, t_i^2]$ таковы, что $t_i^1 = t_i^2$ для всех $i = 1, ..., n$, то получена *задача оптимального распределения ресурсов с фиксированным временем выполнения работ*. В силу построения среди базовых расписаний будет хотя бы одно расписание минимальной длины.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 8.1. Длина оптимального расписания задачи (8.1)–(8.5) при фиксированном времени выполнения работ может быть представлена как $\sum_{i=1}^{n} x_i t_i$, где $x_i \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Пусть $X_1, ..., X_k$ — векторы оптимального расписания. Построим разбиение всех работ на k классов $L_1, ..., L_k$ следующим образом: $d_i \in L_j$, если $X_{ji} = 1$ $(i = 1, ..., k)$. Сопоставим оптимальному расписанию орграф G, заданный следующим образом:

- если $d_i \in L_1$, то $R_i = \varnothing$ $(i = 1, ..., n)$;
- если $d_i \in L_\mu$ и для d_i еще не построено R_i, то проверяем, существует ли k_1:

$$\sum_{j=\mu}^{\mu+k_1} X_{ji} T_j \geq t_i; \quad X_{ji} = 1. \tag{8.6}$$

В случае если (8.6) выполняется, то в множество R_i войдет работа $d_{N_{\mu-1}}$, где $N_{\mu-1}$ — номер кратчайшей работы для вектора $X_{\mu-1}$. Если $\mu - 1 = 1$, то в R_i войдет только работа $d_{N_{\mu-1}}$, в противном случае в R_i войдут еще и все работы множества $R_{N_{\mu-1}}$. В построенный орграф, учитывающий ресурсные ограничения, будет входить исходное множество работ $d_1, ..., d_n$, и длина критического пути будет равна продолжительности соответствующего базового расписания. Лемма доказана.

Рассмотрим **свойства допустимых расписаний** задачи (8.1)–(8.5) для случая, когда время выполнения работ d_i заключено в интервалах $[t_i^1, t_i^2]$ $(i = 1, ..., n)$.

Выберем какую-либо точку $t \in P$ и построим для нее систему базовых расписаний $\{A_1, ..., A_N\}$. Пусть $A_{k'}$ — одно из базовых расписаний, которому соответствует набор векторов $\left\{X_1^{k'}, ..., X_k^{k'}\right\}$ и набор номеров работ $\left\{N_1^{k'}, ..., N_k^{k'}\right\}$. Отметим, что для работы $d_{N_1}^{k'}$ выполняется одно из условий:

1) $t_{N_1^{k'}}^1 = \min\limits_{i:x_{1i}^{k'} \neq 0} t_i^1 = t_{\min 1}^1$;

2) $\left[t_{N_1^{k'}}^1, t_{N_1^{k'}}^2\right] \bigcap \left[t_{\min 1}^1; t_{\min 1}^2\right] \neq \varnothing$,

где $\min 1$ — номер работы с минимальной левой границей.

Выберем все остальные работы:

$$\left[t^1_{\min 1};t^2_{\min 1}\right]\bigcap_{i:\,x^{k'}_{1i}\neq 0}\left[t^1_i,t^2_i\right]\neq\varnothing. \qquad (8.7)$$

Включим в множество M_1 те работы, которые удовлетворяют условию (8.7), и работу $d_{\min 1}$. Нетрудно видеть, что для всякого $t \in P$ кратчайшими среди работ, соответствующих ненулевым координатам вектора X^1_1, могут быть только те работы, которые принадлежат множеству M_1.

Выберем какую-либо работу $d_k \in M_1$ и «назначим» ее самой короткой работой. Тогда очевидно, что длительность остальных работ должна быть такой, что $t^1_i \geq t_k^1$ для всех $d_i \in M_1$ $(1 \leq i \leq n)$. Поэтому преобразуем t^1_i по формуле

$$t^{1'}_i = \max_{d_i\in M_1}\left\{t^1_k,t^1_i\right\}.$$

С другой стороны, понятно, что если d_k — кратчайшая работа, то t_k^2 не может быть больше любого из t^2_i $(d_i \in M_1)$:

$$t^{2'}_k = \min_{d_i\in M_1} t^2_i; \qquad (8.8)$$

$$t^{2'}_i = t^2_i, \quad d_i \in M_1. \qquad (8.9)$$

После того как работа d_k будет выполнена, интервалы, задающие длительность работ d_i, для которых $X^1_{1i} \neq 0$, будут удовлетворять следующим условиям:

$$t^1_i = \max_{d_i\in M_1}\left\{0, t^1_i - t^2_k\right\}; \qquad (8.10)$$

$$t^2_i \leq t^2_i - t^1_k, \quad d_i \in M_1. \qquad (8.11)$$

Будем считать t^1_i и t^2_i равными правым частям в выражениях (8.10) и (8.11). Сформируем далее *множество максимальных векторов*, характеризующих возможность выполнения остальных работ орграфа G после того, как завершена работа d_k, и выберем один из них: X_2^k. Затем аналогично тому, как это было сделано ранее, формируем *множество кратчайших работ* M_2, назначаем кратчайшую работу и преобразовываем интервалы $[t^1_i, t^2_i]$ $(i\colon X^k_{2i} \neq 0)$. Когда все работы будут выполнены, получим *допустимое решение* для всех точек $t \in P$, удовлетворяющих системе неравенств:

$$t'_{k_l} \leq t'_{i_l}, \quad l = \overline{1,n};\ i_l\colon\ X^l_{i_l} = 1, \qquad (8.12)$$

где X^l — вектор ($X_i^l = \{0, 1\}$, $i = 1, ..., n$), у которого ненулевые координаты соответствуют работам, выполняемым после завершения $(l-1)$-й работы.

При этом

$$t'_{k_l} = \begin{cases} t_{k_l}, & \text{если работа } d_{k_l} \text{ не выполнялась} \\ & \text{на интервале } [\tau_1^{l-1}, \tau_2^{l-1}]; \\ t_{k_l} - \sum\limits_{i=l-1-m_l}^{l-1} t'_{k_i}, & \text{если работа } d_{k_l} \text{ выполнялась} \\ & \text{на интервале } [\tau_1^{l-1}, \tau_2^{l-1}]; \end{cases}$$

$$t'_{i_l} = \begin{cases} t_{i_l}, & \text{если работа } d_{i_l} \text{ не выполнялась} \\ & \text{на интервале } [\tau_1^{l-1}, \tau_2^{l-1}]; \\ t_{i_l} - \sum\limits_{i=l-1-m_l}^{l-1} t'_{k_i} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь m_l — число интервалов, предшествующих интервалу $[\tau_1^l, \tau_2^l]$, на которых выполнялась работа d_{k_l} или d_{i_l}; k_l — номер кратчайшей работы, выполняемой на интервале i ($i \leq l-1$).

Рассмотрев все возможные варианты назначения кратчайших работ из множества $M_1, ..., M_n$ при фиксированном способе выбора максимальных векторов, получим такое *множество базовых расписаний*, что каждое из расписаний остается допустимым для всех точек многогранника, полученного из исходного параллелепипеда добавлением системы ограничений (8.12). Этот результат можно сформулировать в виде леммы.

Лемма 8.2. Пусть необходимо выполнить работы, последовательность которых задана орграфом G и длительность d_i может изменяться в интервалах $[t_i^1, t_i^2]$, $i = 1, ..., n$. Тогда существует конечный набор базовых расписаний $\{A_1, ..., A_N\}$ и разбиение параллелепипеда P системой гиперплоскостей на многогранники $B_1, ..., B_N$ такое, что:

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_i = P$;

2) для любого многогранника B_i существует такое базовое расписание $A_i \subseteq \{A_1, ..., A_N\}$, что оно остается допустимым для всех точек $t \in B_i$.

Непосредственно используя лемму 8.2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 8.1. Для любого орграфа G, задающего последовательность выполнения работ, и любого параллелепипеда P продолжительностей работ задачи (8.1)–(8.5) существует множество гиперплоскостей, проходящих через начало координат и разбивающих параллелепипед P на конечное число многогранников, и множество таких допустимых расписаний $\{A_1, ..., A_N\}$, что каждому многограннику B_i $(i = 1, ..., N)$ взаимно однозначно соответствует некоторое допустимое расписание $A_i \subseteq \{A_1, ..., A_N\}$, которое остается оптимальным для всех точек многогранника B_i.

Доказательство. Как было показано ранее, при фиксированном времени выполнения работ для каждого базового расписания можно построить такой орграф G' из работ исходного орграфа G, что длина базового расписания будет равна длине критического пути орграфа G. Построим для базового расписания A_i соответствующий орграф G_i', отображающий последовательность выполнения работ по расписанию A_i. Пусть $D_1^i, ..., D_{N_i}^i$ — все пути орграфа G_i', соответствующего базовому расписанию A_i. Тогда среди путей $D_1^i, ..., D_{N_i}^i$ существует по крайней мере один критический путь D_k^i, такой, что для точки $t \in B_i$ длина расписания A_i равна $\sum_{j \in D_k^i} t_j$.

Интервал изменения длины пути D_k^i, а значит, и интервал изменения длины расписания $[T_i^1, T_i^2]$ могут быть оценены, если будут вычислены максимум и минимум функционала

$$\sum_{j \in D_k^i} t_j \tag{8.13}$$

при ограничениях:

$$c^i t \le V; \tag{8.14}$$

$$t \ge 0, \tag{8.15}$$

где $t = (t_1, ..., t_n)$; c^i — матрица ограничений размерности $k \times n$; $V = (V_1, ..., V_k)$.

Неравенства (8.14), (8.15) задают многогранник B_i.

Пусть $[T_i^1, T_i^2]$ $(i = 1, ..., N)$ — верхнее и нижнее значения соответствующего базового расписания A_i на многограннике B_i. Определим для заданного разбиения величины $T_{\min}^1$ и $T_{\min}^2$ по формулам

$$T_{\min}^1 = \min_{i=\overline{1,N}} T_i^1; \quad T_{\max}^2 = \max_{i=\overline{1,N}} T_i^2.$$

Рассмотрев все возможные разбиения параллелепипеда P на систему многогранников $\{B_1, ..., B_{N_i}\}$, $i = 1, ..., L_2$, где L_2 — количество разбиений при всех возможных вариантах выбора максимальных векторов на всех этапах построения допустимого расписания, получим **возможность попарно сравнивать значения расписаний** на общей части многогранников B_i. На каждом шаге l ($1 \le l \le n$) построения допустимого базового расписания при новом разбиении параллелепипеда P можем оценить снизу значение этого расписания.

Пусть $D_1, ..., D_k$ — все пути орграфа G, задающего последовательность выполнения работ. Вычислим минимум следующего выражения:

$$\min \sum_{i \in D'_j} t_i = T_j, \quad j = \overline{1, k}$$

при ограничениях:

$$c^i t \ge 0; \;\; t \ge 0, \tag{8.16}$$

где D'_j — невыполненные работы пути D_j;

c^i — матрица ограничений размерности $k \times n$;

k — количество ограничений, полученных за l шагов построения базового расписания.

Ограничения (8.16) задают построенный многогранник при составлении базового расписания.

Обозначим $T_{\min} = \min\limits_{j=\overline{1,k}} T_j$. Если окажется, что $\sum\limits_{i=1}^{l-1} t_i^1 T_{\min} \ge T_{\max}^2$, где t_i^1 — нижняя оценка на этапах $1, ..., l-1$, то прекращаем дальнейшее построение допустимого расписания, так как оно заведомо хуже составленного ранее.

После того как построено очередное разбиение, на пересечении многогранников можно **оценить длину нового допустимого расписания и составленного ранее**, при этом возможны следующие случаи:

1) интервалы длительности допустимых расписаний н е п е р е с е к а ю т с я;

2) интервалы длительности п е р е с е к а ю т с я.

В первом случае на пересечении многогранников задается то *допустимое расписание, у которого верхняя оценка времени выполнения всех работ ниже*.

Во втором случае проводится дополнительная разделяющая гиперплоскость вида

$$\sum_{i \in A_{\text{н}}} t_i = \sum_{i \in A_{\text{ст}}} t_i, \qquad (8.17)$$

где в левой части равенства (8.17) стоит сумма длительностей работ соответствующего критического пути для н о в о г о, а в правой части — для с т а р о г о, ранее полученного допустимого расписания. Таким образом, мы разделили гиперплоскостью (8.17) общую часть многогранников для решения $A_{\text{н}}$ и $A_{\text{ст}}$ на два многогранника и поставили каждому из них в соответствие решения $A_{\text{н}}$ и $A_{\text{ст}}$.

После того как будут выбраны все возможные максимальные векторы при построении допустимых расписаний, получим такое разбиение параллелепипеда P на многогранники $B_1, \ldots, B_{N_i}$, что каждому многограннику B_i будет поставлено в соответствие расписание A_i, которое является наилучшим среди базовых допустимых расписаний для всех $t \in B_i$, и поэтому оно будет о п т и м а л ь н ы м для этих точек.

Далее многогранники, полученные при разбиении, о котором говорится в теореме 8.1, будем называть ***многогранниками устойчивости оптимальных решений***.

8.2. СВОЙСТВА ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим некоторые свойства разбиений, полученных в теореме 8.1.

Лемма 8.3. Пусть для орграфа G и параллелепипеда возможных продолжительностей работ P существует разбиение на такие многогранники B_i ($i = 1, \ldots, N$), что каждому многограннику соответствует некоторое оптимальное для всех точек B_i решение A_i ($i = 1, \ldots, N$). Тогда, если $t \notin P$ ($t = (t_1, \ldots, t_n)$) и существует такое $\lambda > 0$, что $\lambda t \in P$, и такое $A_k \subseteq \{A_1, \ldots, A_N\}$, что A_k является оптимальным расписанием для точки λt, расписание A_k будет оптимальным и для точки t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы 8.3 следует из того факта, что если в орграфе G с фиксированной длительностью выполнения работ и оптимальным расписанием A время выполнения всех работ умножить на одну и ту же константу $c > 0$, то расписание A останется оптимальным для орграфа G, продолжительность работ которого ct_i ($i = 1, ..., n$), где t_i — первоначальная продолжительность работ.

Предположим, что продолжительность всех работ d_i ($i = 1, ..., n$) изменяется в интервале $[0, t_i^2]$ ($i = 1, ..., n$), т.е. параллелепипед $P^0 = [0, t_1^2] \times [0, t_2^2] \times ... \times [0, t_n^2]$ в качестве одной из своих вершин содержит начало координат. Тогда разбиение на многогранники устойчивости оптимальных решений обладает свойствами, описываемыми следующей леммой.

Лемма 8.4. Пусть для некоторого множества работ $d_1, ..., d_n$, последовательность выполнения которых задана орграфом G, существует разбиение параллелепипеда P^0 множеством гиперплоскостей $\{\Gamma_1^0, ..., \Gamma_M^0\}$ на многогранники устойчивости B_i ($i = 1, ..., N$) оптимальных решений $\{A_1, ..., A_N\}$. Тогда это решение обладает следующими свойствами:

1. Для любого другого параллелепипеда P' множество гиперплоскостей $\{\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{M'}\}$, разбивающее параллелепипед на многогранники устойчивости оптимальных решений, таково, что
$$\{\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{M'}\} \subseteq \{\Gamma_1^0, ..., \Gamma_M^0\}.$$
2. Для каждого $t \notin P^0$ ($t_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$) существует решение $A_k \subseteq \{A_1, ..., A_N\}$, которое является оптимальным для точки t.
3. Среди множества оптимальных решений $\{A_1, ..., A_N\}$ существуют такие, которые будут оптимальны для всех орграфов работ G', полученных из G удалением любого конечного числа работ.

Доказательство. Утверждение 1 леммы следует из того, что:

а) при построении всех возможных разбиений параллелепипеда P на многогранники B_i ($i = 1, ..., N_i$) и соответствующих систем допустимых решений на каждом шаге построения какого-либо допустимого расписания на роль короткой работы будут претендовать все работы, выполненные на соответствующем интервале времени;

б) любые два допустимых расписания A_k и A_l, каждое из которых остается допустимым для всех точек многогранников B_k и B_l, в качестве нижней оценки времени выполнения всех работ имеют нуль.

Докажем теперь утверждение 2 леммы.

Выберем λ по формуле

$$\lambda = \min_{i=\overline{1,n}} \frac{t_i^2}{t_i}.$$

Тогда точка $\lambda t \in P$. Из леммы 8.3 следует, что в этом случае для точки t существует оптимальное расписание из системы оптимальных расписаний $\{A_1^0, ..., A_M^0\}$.

Утверждение 3 леммы является следствием того факта, что при разбиении параллелепипеда P на многогранники устойчивости оптимальных решений среди множества расписаний $\{A_1^0, ..., A_M^0\}$ существуют оптимальные расписания для всех точек параллелепипеда P, в том числе и для его граничных точек.

Пусть в орграф, задающий последовательность выполнения работ $d_1, ..., d_n$, входят пути $S_1, ..., S_k$. Определим понятие параллельно выполняемых работ.

Назовем работы d_i и d_q ***параллельно выполняемыми***, если они не входят в один и тот же путь орграфа G.

Следующая лемма описывает **свойства оптимальных расписаний при некоторых специальных ограничениях** на параллелепипед P, задающий длительность выполняемых работ.

Лемма 8.5. Пусть орграф G работ $d_1, ..., d_n$ задан матрицей R и объем ресурсов $b = (b_1, ..., b_m)$ настолько велик, что любые две параллельно выполняемые работы могут совершаться одновременно. Тогда для любой работы d_l ($l = 1, ..., n$) существует параллелепипед P, задающий длительности работ, для всех точек которого оптимальным будет любое базовое расписание, обладающее тем свойством, что в каждый момент времени выполняется работа из критического пути орграфа G.

Доказательство. Построим параллелепипед P_l следующим образом. Для всех работ d_i ($i \neq l$) зададим произвольно интервалы выполнения работ $[t_i^1, t_i^2]$. Для работы d_l выберем t_l^1 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$t_l^1 > \sum_{i \neq l}^{n} t_i^2, \quad \text{а} \quad t_l^2 = t_l^1 + \alpha,$$

где $\alpha > 0$.

Нетрудно видеть, что для всех $t \in P_l$ критическими могут быть только пути, в которые вошла работа d_l. Так как $T_{A_{\text{опт}}} \geq T_{\text{кр}}$, где

$T_{A_{\text{опт}}}$ — длина оптимального расписания, если на каждом этапе построения базового расписания выделять ресурсы в первую очередь работам критического пути, то по условию леммы $T_{A_{\text{опт}}} = T_{\text{кр}}$, что и доказывает утверждение леммы.

Рассмотрим еще один подход для **получения многогранников устойчивости оптимальных решений**, когда длительности выполнения работ *меняются на параллелепипеде P*.

Пусть фиксировано $t' \in P$. Рассмотрим некоторое допустимое базовое решение задачи (8.1)–(8.5), когда длительности выполнения работ равны $t' = (t'_1, ..., t'_n)$. Как было показано ранее, любое базовое решение может быть представлено как набор векторов $\{X_1, ..., X_k\}$, каждому из которых поставлена в соответствие работа d_{li} ($l = 1, ..., k$), являющаяся самой короткой среди работ, соответствующих ненулевым координатам вектора X_l. Каждому базовому расписанию может быть поставлена в соответствие система неравенств (8.12). Если построить систему неравенств для всех базовых решений точки t' и взять их объединение, то получим многогранник M^*, на котором система базовых решений остается такой же, как и для точки t'.

На многограннике M^* могут быть определены интервалы $[T_1^1, T_1^2], ..., [T_N^1, T_N^2]$ системы базовых расписаний $\{A_1, ..., A_N\}$. Выберем среди них

$$T_{\min}^1 = \min_{i=\overline{1,N}} T_i^1.$$

Отбросим все A_k ($1 \le k \le N$), для которых $[T_k^1, T_k^2] \cap [T^1_{\min}, T^2_{\min}] = \varnothing$.

Остальные базовые расписания $\{A_1, ..., A_{N_1}\}$ ($N_1 \le N$) будут принимать оптимальные значения на некоторых точках многогранника M^*.

Пусть многогранник M^* задан системой неравенств:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} t_i \le b_j, \quad j = \overline{1, m_1};$$
$$t_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда для решения $A_k \subseteq \{A_1, ..., A_{N_1}\}$ многогранник устойчивости оптимального решения A_k задается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} t_i \le b_j, \quad j = \overline{1, m_1}; i = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} t_i \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} t_i, \quad j = \overline{1, N_1}; j \ne k,$$

$$t_i \ge 0,$$

где $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} t_i$ задает линейный функционал базового расписания A_j.

Описанная процедура позволяет получить многогранник устойчивости M' оптимального решения по заданной точке $t' \in P$, и расписание A' остается оптимальным для всех точек $t \in M'$. Таким образом, можно строить многогранники устойчивости оптимальных решений, не делая полного разбиения параллелепипеда P на такие многогранники.

Рассмотрим случай **разбиения на многогранники устойчивости оптимальных решений**, если время выполнения работ *изменяется на множестве, заданном ограничениями вида*

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} t_i \le b_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \tag{8.18}$$

$$t_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{8.19}$$

Пусть $G_1, ..., G_k$ — вершины многогранника, заданного неравенствами (8.18) и (8.19), координаты которых соответственно равны $G_1 = (G_1^1, ..., G_1^n), ..., G_k = (G_k^1, ..., G_k^n)$.

Построим параллелепипед P с вершинами:

$$t_i^1 = \min_{l=\overline{1,k}} G_i^l, \quad i = \overline{1, n}; \tag{8.20}$$

$$t_i^2 = \max_{l=\overline{1,k}} G_i^l, \quad i = \overline{1, n}. \tag{8.21}$$

Этот параллелепипед будет содержать в себе многогранник, заданный неравенствами (8.18) и (8.19).

Для решения задачи разбиения на многогранники устойчивости для случая, когда время выполнения работ меняется на множестве, заданном неравенствами (8.18) и (8.19), можно сделать разбиение на многогранники устойчивости оптимальных решений для параллелепипеда, заданного формулами (8.20) и (8.21), и после этого для каждой системы неравенств, задающих многогранник, добавить ограничения (8.18).

Пусть длительность выполнения работ изменяется на многограннике P, заданном неравенствами (8.18) и (8.19). Рассмотрим следующую задачу: среди точек многогранника P найти такую, для которой значение оптимального расписания было бы не больше, чем для всех других точек многогранника P. Назовем эту точку ***точкой глобального оптимума*** задачи (8.1)–(8.5). Если многогранник P является параллелепипедом $P=\prod_{i=1}^{n}\left[t_i^1,t_i^2\right]$, то решение этой задачи дается следующей леммой.

Лемма 8.6. Вершина параллелепипеда P, удовлетворяющая условию $t_i = t_i^1$, является точкой глобального оптимума для задачи (8.1)–(8.5) с нефиксированным временем выполнения работ.

Доказательство. Предположим, что существует $t' \neq t$ и $A'_{t'} < A_t$, где A_t и $A'_{t'}$ — значения оптимальных расписаний для точек t и t'. Тогда среди координат точки $t' = (t'_1, \ldots, t'_n)$ существует $t'_j > t_j$ $(1 \leq j \leq n)$, а для всех остальных i $(i = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$ $t'_i \geq t_i$. Это означает, что, увеличив продолжительность работы d_j, мы сократим длину оптимального расписания. Полученное противоречие и доказывает утверждение леммы.

В случае если многогранник M, заданный неравенствами (8.18) и (8.19), не является параллелепипедом, *точка глобального оптимума* может быть определена следующим образом. Сначала многогранник M разбивается на многогранники устойчивости оптимальных решений M_i $(i = 1, \ldots, N)$, где N — количество многогранников, полученных при разбиении, и пусть f_i $(i = 1, \ldots, N)$ — линейные функционалы, соответствующие оптимальному решению A_i для многогранника M_i. Далее для каждого M_i решается задача минимизации функционала f_i на многограннике и затем определяется

$$\min_{i=\overline{1,N}} f_i^{\min}, \tag{8.22}$$

где $f_i^{\min}$ — минимум функционала f_i на многограннике M_i.

Точка $t \in M$, на которой будет выполняться (8.22), будет точкой глобального оптимума.

Теорема 8.2. Пусть длительность выполняемых работ заключена в многограннике M, заданном неравенствами (8.18) и (8.19). Тогда точка глобального оптимума является граничной точкой многогранника M.

Для доказательства теоремы 8.2 покажем справедливость следующих вспомогательных лемм.

Лемма 8.7. Пусть задан орграф G, отражающий последовательность выполнения работ с фиксированной продолжительностью t, и существует базовое оптимальное расписание $A_{\text{опт}}$ для работ орграфа G. Тогда если длительности всех работ умножить на $c > 0$, то оптимальное расписание сохранится и $T'_{A_{\text{опт}}} = cT_{A_{\text{опт}}}$, где $T_{A_{\text{опт}}}$ — длина оптимального расписания для работ длительностью t_i, а $T'_{A_{\text{опт}}}$ — длина оптимального расписания для работ со временем выполнения ct_i $(i = 1, ..., n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы очевидно. Геометрически это означает, что если $A_{\text{опт}}$ — оптимальное расписание для точки t, то оно будет оптимально и для всех точек прямой, проходящей через начало координат и точку t.

Лемма 8.8. Если в орграфе G с фиксированными длительностями работ время выполнения всех работ уменьшить на величину $\varepsilon > 0$, то длина оптимального расписания уменьшится не менее чем на ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем среди работ d_i $(i = 1, ..., n)$ работу с максимальной продолжительностью $d_{\max}$, время выполнения всех работ разделим на величину $c = \dfrac{t_{\max}}{t_{\max} - \varepsilon}$:

$$t'_i = \frac{t_i}{c}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Из леммы 8.7 следует, что оптимальное расписание при этом не изменится.

Пусть $\sum\limits_{i \in D_k} t_i$ — время оптимального расписания для орграфа работ G с продолжительностью работ t_i, а $\sum\limits_{i \in D_k} t'_i$ — с продолжительностью t'_i; при этом D_k — критический путь в орграфе, соответствующий продолжительности оптимального расписания.

Оценим, как изменилась продолжительность работ по сравнению с t_i $(i = 1, ..., n)$:

$$t_i - t'_i = t_i - \frac{t_i(t_{\max} - \varepsilon)}{t_{\max}} = \frac{t_i \varepsilon}{t_{\max}} \le \varepsilon.$$

Оценим, как изменилось время оптимального расписания:

$$\sum_{i \in D_k} t_i - \sum_{i \in D_k} t'_i \leq \sum_{i \in D_k} t_i - \sum_{i \in D_k} \frac{t_i(t_{\max} - \varepsilon)}{t_{\max}} = \frac{\varepsilon \sum\limits_{i \in D_k} t_i}{t_{\max}}.$$

Так как $\sum\limits_{i \in D_k} t_i \geq t_{\max}$, то $\dfrac{\sum\limits_{i \in D_k} t_i}{t_{\max}} \geq \varepsilon$.

Уменьшим теперь продолжительность всех работ t_i на величину $\dfrac{\varepsilon(t_{\max} - t_i)}{t_{\max}} \geq 0$. Получим для всех работ $t'_i = t_i - \varepsilon$. Так как при сокращении времени выполнения работ длина оптимального расписания не увеличивается, то отсюда следует утверждение леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 8.2. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и поэтому точка глобального оптимума $t = (t_1, ..., t_n)$ является внутренней. Тогда можно подобрать такое ε, что $t'_i = t_i - \varepsilon \in M$; следовательно, по лемме 8.8 длина оптимального расписания для точки $t' = (t'_1, ..., t'_n)$ меньше, чем для точки $t = (t_1, ..., t_n)$, что противоречит первоначальному предположению.

ГЛАВА 9

АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ В ЛОГИСТИКЕ

9.1. ЗАДАЧИ, АЛГОРИТМЫ, СЛОЖНОСТЬ

Анализируя методы решения задач управления ограниченными ресурсами в логистике (таких, например, как выбор оптимальной производственной программы или минимизация инвестиционной фазы проекта строительства склада), разработчик алгоритмов решения часто убеждается в том, что не удается предложить ничего лучшего, чем полный перебор всех вариантов. В том случае, если более эффективного решения дискретной оптимизационной задачи не существует, говорят, что *задача труднорешаема*.

К сожалению, доказать, что задача труднорешаема, часто не менее трудно, чем найти эффективные алгоритмы ее решения. Даже выдающиеся теоретики оказывались беспомощными в попытках получить подобное доказательство для часто встречающихся трудных задач.

Тем не менее в этой главе будут предложены подходы, позволяющие найти достойный выход из положения. Эти подходы предусматривают доказательство того, что та или иная задача так же трудна, как и большое число других задач, признанных очень трудными и не поддающихся решению в течение многих лет. Методы этих доказательств изложены в теории так называемых NP-полных задач.

Используя эти подходы и методы, можно доказать NP-полноту задачи о выпуске новой продукции и таким образом установить ее эквивалентность всем другим задачам этого класса. Однако проблема решения задачи после выявления ее NP-полноты не исчезает; наоборот, работа над ней только начинается. Знание же этого факта дает важную информацию о том, какие методы окажутся наиболее перспективными. В этом случае не следует пытаться разработать эффективный точный алгоритм, лучше сосредоточить внимание на получении иных, более скромных результатов. Например, можно попытаться разработать эффективные алгоритмы, позволяющие решать различные частные случаи поставленной общей задачи. Можно также заняться отысканием алгоритма, хотя и не гарантирующего быстрого решения во всех случаях, однако работающего быстро в большинстве ситуаций. И наконец, можно «ослабить» постановку задачи, потребовав при разработке алгоритма проектирования нового вида продукции выполнения не всех требований к характеристикам продукции, а только части из них. Иными словами, основное предназначение теории NP-полных задач состоит в том, чтобы помочь разработчикам алгоритмов, направив их усилия на выбор таких подходов к решению задач, которые вероятнее всего приведут к практически полезным алгоритмам.

Далее будем использовать такие понятия, как «труднорешаемые задачи» и «эквивалентные по сложности задачи», а также некоторые другие термины.

Вначале рассмотрим понятие «задача». Под ***массовой задачей*** (или просто ***задачей***) будем понимать некоторый общий вопрос, на который необходимо дать ответ. Обычно задача содержит несколько параметров, или свободных переменных, конкретные значения которых не определены.

Массовая задача называется ***задачей П***, если она определяется следующей информацией:

1) общим списком всех ее параметров;

2) формулировкой тех свойств, которым должно удовлетворять решение задачи.

Индивидуальная задача I может быть получена из массовой, если всем параметрам задачи П присвоить конкретные значения.

В качестве примера рассмотрим **классическую задачу коммивояжера**. Параметры этой задачи состоят из конечного набора «городов» $C = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$ и расстояний $d\,(C_i, C_j)$ между каждой парой городов (C_i, C_j) из C. *Решение задачи* — это такой упорядоченный набор $<C\pi(1), C\pi(2), ..., C\pi(m)>$ заданных городов, который минимизирует величину

$$\sum_{i=1}^{m-1} d\left(C\pi(i), C\pi(i+1)\right) + d\left(C\pi(m), C\pi(1)\right).$$

Это выражение дает *длину маршрута*, который начинается в городе $C\pi(1)$, проходит последовательно через все города и возвращается в $C\pi(1)$ непосредственно из последнего города $C\pi(m)$.

☐ Индивидуальная задача коммивояжера, указанная на рис. 9.1, задается следующим образом: $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)$;

$$d(C_1, C_2) = 10, \qquad d(C_1, C_3) = 5,$$
$$d(C_2, C_4) = 9, \qquad d(C_2, C_3) = 6,$$
$$d(C_1, C_4) = 9, \qquad d(C_3, C_4) = 3.$$

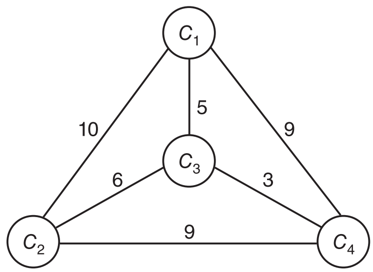

Рис. 9.1. Графическая интерпретация задачи коммивояжера

Последовательность $<C_1, C_2, C_4, C_3>$ представляет собой решение задачи, поскольку соответствующий маршрут имеет минимально возможную длину, равную 27. ■

Под ***алгоритмом*** будем понимать общую выполняемую шаг за шагом процедуру решения задачи. Для определенности будем считать, что эта процедура записана на одном из формальных языков программирования. Будем говорить, что алгоритм р е ш а е т массовую задачу П, если он применим для любой индивидуальной задачи I из П и обязательно дает решение задачи I. Отметим здесь следующее: нельзя говорить о том, что алгоритм «решает» задачу коммивояжера, если он не выдает маршрут минимальной длины хотя бы для какой-то одной индивидуальной задачи.

В большинстве случаев с учетом размерности решаемых задач исследователя интересует наиболее эффективный алгоритм решения. Понятие эффективности связано со всеми вычислительными ресурсами, необходимыми для работы алгоритма. Однако под *«самым эффективным алгоритмом»* понимается самый быстрый, так как именно быстродействие определяет пригодность конкретного алгоритма для практики.

Время работы алгоритма удобно выражать в виде функций от одной переменной, характеризующей размер индивидуальной задачи, т.е. объем входных данных, требуемых для описания этой задачи. Такой подход удобен, так как в дальнейшем сравнительная сложность задачи будет оцениваться через ее размеры. Часто размер задачи определяется неформально. Например, для определения размера в задаче коммивояжера используется число городов. Кроме числа городов в этой задаче важно учитывать расстояния между m городами, которые представляют собой $m(m-1)/2$ чисел. Чтобы учесть все факторы, влияющие на время решения задачи, необходимо дать описание индивидуальной задачи, которое можно рассмотреть как некоторую цепочку символов, выбранных из конечного входного алгоритма.

Далее будем полагать, что с каждой массовой задачей связана некоторая фиксированная ***схема кодирования***, которая отображает индивидуальные задачи в соответствующей цепочке символов. *Входная длина* индивидуальной цепочки задачи I из II определяется как число символов в цепочке, полученной применением к задаче I схемы кодирования для массовой задачи II. Именно это число, т.е. входная длина, и используется в качестве формальной характеристики размера индивидуальной задачи.

□ Например, реализуемые конкретные задачи о коммивояжере можно описать с помощью алфавита $\{C,[,],/,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, при этом задача на рис. 9.1 может быть закодирована цепочкой символов вида: C[1] C[2] C[3] C[4]//10/5/9//6/9//3.

Аналогичным образом могут быть закодированы и более сложные индивидуальные задачи. При такой кодирующей схеме индивидуальная задача о коммивояжере на рис. 9.1 имеет длину 32. ■

Временна́я сложность алгоритма отражает требуемые для его работы затраты времени. Это функция, которая каждой входной длине ставит в соответствие максимальное (по всем индивидуальным задачам длины n) время, затрачиваемое алгоритмом на решение индивидуальных задач этой длины.

9.2. ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ТРУДНОРЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ

Различные алгоритмы имеют различную временну́ю сложность, и выяснение того, какие алгоритмы «достаточно эффективны», а какие совершенно неэффективны, всегда будет зависеть от конкретной ситуации. В настоящее время теоретики, занимающиеся разработкой и анализом алгоритмов, предлагают выделять среди всего множества алгоритмов полиномиальные и экспоненциальные.

Будем говорить, что функция $f(n)$ есть $O(g(n))$, если существует константа C, такая, что $|f(n)| \le C|g(n)|$ для всех значений $n \ge 0$.

Полиномиальным (или алгоритмом полиномиальной временно́й сложности) называется алгоритм, у которого временна́я сложность равна $O(P(n))$, где $P(n)$ — некоторая полиномиальная функция, а n — входная длина.

Алгоритмы, временна́я сложность которых не поддается такой оценке, называются ***экспоненциальными***.

Различие между двумя указанными типами алгоритмов становится особенно заметно при решении задач большого размера. Таблица 9.1 позволяет сравнить скорости роста нескольких типичных полиномиальных и экспоненциальных функций.

Различие между полиномиальными и экспоненциальными алгоритмами становится еще более явным, если проанализировать, как влияет увеличение быстродействия компьютера на время работы алгоритмов. В табл. 9.2 показано, насколько увеличатся размеры задач, решаемых за один час машинного времени, если благодаря совершенствованию технологий быстродействие компьютера возрастет в 100 или 1000 раз по сравнению с современными. Заметим, что для функции $f(n) = 2^n$ увеличение скорости вычисления в 1000 раз приводит к тому, что размер наибольшей задачи, решаемой за один час, возрастает только на 10, в то время как для функции $f(n) = n^5$ — почти в 4 раза.

Эти таблицы демонстрируют причину, по которой полиномиальные алгоритмы обычно считаются более предпочтительными, чем экспоненциальные. Разделение полиномиальных и экспоненциальных алгоритмов является отправной точкой в определении труднорешаемых и NP-полных задач.

По мнению многих исследователей, полиномиальные алгоритмы, как правило, являются *«хорошими»* с точки зрения их быстро-

Таблица 9.1

Скорость роста некоторых полиномиальных и экспоненциальных функций

Функция временно́й сложности	*Размерность задач*					
	10	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*
n	0,00001 с	0,00002 с	0,00003 с	0,00004 с	0,00005 с	0,00006 с
n^2	0,001 с	0,004 с	0,0009 с	0,0016 с	0,0025 с	0,0036 с
n^3	0,001 с	0,008 с	0,027 с	0,064 с	0,125 с	0,216 с
n^5	0,1 с	3,2 с	24,3 с	1,7 мин	5,2 мин	13,0 мин
2^n	0,001 с	1,0 с	17,9 мин	12,7 дня	35,7 лет	366 столетий
3^n	0,059 с	58 мин	6,5 лет	3855 столетий	$2 \cdot 10^8$ столетий	$1,3 \cdot 10^{13}$ столетий

Таблица 9.2

Увеличение размеров наибольшей задачи, решаемой за 1 час, в зависимости от быстродействия компьютеров

Функция временно́й сложности	*На современных компьютерах*	*На компьютерах, в 100 раз более быстрых*	*На компьютерах, в 1000 раз более быстрых*
n	N_1	$100\ N_1$	$1000\ N_1$
n^2	N_2	$10\ N_2$	$31{,}6\ N_2$
n^3	N_3	$4{,}64\ N_3$	$10\ N_3$
n^5	N_4	$2{,}5\ N_4$	$3{,}98\ N_4$
2^n	N_5	$N_5 + 6{,}64$	$N_5 + 9{,}97$
3^n	N_6	$N_6 + 4{,}19$	$N_6 + 6{,}29$

действия. В то же время экспоненциальные алгоритмы не являются таковыми и чаще всего представляют собой варианты полного перебора. Существует распространенное мнение, согласно которому задача не считается «хорошо решаемой» до тех пор, пока для нее не получен полиномиальный алгоритм.

Задачу будем называть ***труднорешаемой***, если для ее решения не существует полиномиального алгоритма. Попытка построить полиномиальный алгоритм бывает успешной лишь тогда, когда удается более глубоко проникнуть в суть решаемой задачи.

Необходимо отметить, что различие между «эффективными» (полиномиальными) и «неэффективными» (экспоненциальными) алгоритмами в пользу эффективных проявляется лишь при больших значениях n. В противном случае это различие принимает совсем иной характер. Например, сравнивая функции $f_1(n) = 2^n$ и $f_2(n) = n^5$ (см. табл. 9.1), видим, что для $n \le 20$ функция $f_1(n)$ ведет себя лучше.

Более того, известны экспоненциальные алгоритмы, хорошо зарекомендовавшие себя на практике. Дело в том, что временна́я сложность определена нами как мера поведения алгоритма в наихудшем случае и тот факт, что какой-то алгоритм имеет временну́ю сложность порядка 2^n, означает лишь то, что решение по крайней мере одной индивидуальной задачи размера n требует времени порядка 2^n. На самом деле может оказаться, что большинство индивидуальных задач требует для своего решения значительно меньше времени. Так, симплекс-метод имеет экспоненциальную временну́ю сложность, но многочисленные примеры подтверждают, что он хорошо работает на практике. Еще один пример: алгоритмы ветвей и границ успешно решают «задачу о рюкзаке» (такого вида задачи будут изучаться в параграфе 11.1, когда будет рассматриваться проблема выбора оптимального портфеля ценных бумаг), и поэтому многие исследователи считают ее «хорошо решаемой», хотя алгоритмы ветвей и границ имеют экспоненциальную оценку сложности. Примеры «хорошего» поведения экспоненциальных алгоритмов, к сожалению, достаточно редки, поэтому, хотя экспоненциальные алгоритмы известны для многих задач, немногие из них можно использовать при решении задач большой размерности.

Даже при условии успешной работы экспоненциальных алгоритмов попытки найти для соответствующих задач полиномиальные алгоритмы не прекращаются. В действительности сам факт успешного применения экспоненциальных алгоритмов дает основание предположить, что они каким-то образом выявляют некоторые существенные особенности решаемых задач и что более глубокое их исследование может привести к дальнейшему улучшению методов.

В настоящее время пока не известны удовлетворительные объяснения, почему эти алгоритмы работают успешно, и неизвестно также, как прогнозировать хорошую работу того или иного экспоненциального алгоритма при решении практических задач.

С другой стороны, полиномиальные алгоритмы позволяют делать такие прогнозы, поскольку полиномиальные функции значительно более адекватно оценивают время работы алгоритмов. Хотя алгоритмы, имеющие временну́ю сложность типа n^{100} или $n^2 \cdot 10^{99}$, не могут считаться эффективными с практической точки зрения, естественно возникающие «полиномиальные задачи» обычно требуют для своего решения (в самом худшем случае) времени порядка n^2 или n^3, причем коэффициенты полиномов не слишком велики. Алгоритмы, обладающие такими оценками, можно считать «эффективными».

Наше определение труднорешаемой задачи оказывается, по существу, независимым от конкретной схемы кодирования и модели компьютера, используемого для определения временно́й сложности.

Рассмотрим сначала **схемы кодирования**. Предположим, например, что решаемая задача определена на графе $G(V, E)$, где V — множество вершин, E — множество ребер и каждое ребро понимается как неупорядоченная пара вершин. Условия этой задачи могут быть описаны либо списками всех вершин и ребер, либо с помощью матрицы инциденций графа, либо составлением для каждой вершины так называемого списка соседей — списка всех вершин, имеющих с данной общее ребро (табл. 9.3).

Таблица 9.3

Схемы кодирования графа

Схема кодирования	*Цепочка символов (слово)*	*Длина*
Список вершин и ребер	$V[1]$ $V[2]$ $V[3]$, $V[4]$ ($V[1]$ $V[2]$)	27
Список соседей	($V[2]$) ($V[1]$ $V[3]$) ($V[2]$) ( )	24
Строки матрицы инциденций	0100/1010/0010/0000	19

Эти схемы кодирования для одного и того же города могут дать входы разной длины. Однако легко сравнить, что получаемые входы отличаются друг от друга не более чем «полиномиальным образом», т.е. любой алгоритм, имеющий полиномиальную временнýю сложность при одной из этих схем кодирования, будет также обладать полиномиальной временнóй сложностью при остальных схемах. Оценим длины схем кодирования для графа, различные способы кодирования которого представлены в табл. 9.3, с помощью табл. 9.4.

Таблица 9.4

Длина схем кодирования для графа из табл. 9.3

Схема кодирования	*Нижняя оценка*	*Верхняя оценка*
Список вершин	$4V + 10e$	$4V + 10e + (V + 2e)\lg V$
Список соседей	$2V + 8e$	$2V + 8e + 2e\lg V$
Матрица инциденций	$V^2 + V - 1$	$V^2 + V - 1$

Здесь использованы обозначения: длина $|V| = V$; $|E| = e$. Поскольку $e < V^2$, эти оценки показывают, что длины входов отличаются друг от друга не более чем «полиномиальным образом».

Формально трудно определить понятие *разумности кодирования*, хотя следующие два условия охватывают важные требования, связанные с этим понятием.

1. Код любой индивидуальной задачи I должен быть *сжатым*, т.е. он не должен содержать избыточной информации или символов.
2. Числа, входящие в условие задачи I, должны быть представлены в *двоичной системе счисления* (или десятичной, или восьмеричной, или иметь другое основание, но только не единицу).

Если ограничиться рассмотрением только тех схем кодирования, которые удовлетворяют этим условиям, то ответ на вопрос, является ли данная задача труднорешаемой, не будет зависеть от схемы кодирования.

Аналогичные замечания можно сделать относительно **выбора модели компьютера**. Все известные в настоящее время компьютеры (например, одно- и многоленточные машины Тьюринга, машины с произвольным доступом памяти) эквивалентны относительно полиномиальной временно́й сложности, что показано в табл. 9.5.

Таблица 9.5

Временна́я сложность алгоритов моделирования машины *B*

Моделируемая машина B	*Моделирующая машина A*		
	1МТ	*КМТ*	*МПД*
Машина Тьюринга с одной лентой (1МТ)	—	$O(T(n))$	$O(T(n)) \lg T(n)$
Машина Тьюринга с K лентами (КМТ)	$O(T^2(n))$	—	$O(T(n)) \lg T(n)$
Машина произвольного доступа (МПД)	$O(T^3(n))$	$O(T^2(n))$	—

Здесь показано время, требуемое машине A для моделирования алгоритма сложности $T(n)$ на машине B. При дальнейшем исследовании проблемы можно ожидать, что любая другая разумная модель вычислительной машины будет эквивалентна по сложности перечисленным моделям.

Труднорешаемые задачи

После обсуждения формального содержания понятия «труднорешаемая задача» рассмотрим современное состояние знаний об этих задачах.

Вначале охарактеризуем различия между следующими **двумя аспектами труднорешаемости**:

1) для решения задачи требуется экспоненциальное время;

2) искомое решение настолько велико, что не может быть представлено в виде выражения, длина которого была бы ограничена полиномом от длины входа.

Вторая ситуация может возникнуть, например, если в задаче коммивояжера в качестве дополнительного параметра фигурирует число B и требуется найти все маршруты, длина которых не превосходит B. Сначала нужно построить индивидуальную задачу коммивояжера, в которой имеется экспоненциальное число маршрутов, длина которых не превосходит B. Для этого достаточно найти максимальное расстояние между парой городов $d(C_k, C_l)$ и далее умножить это число на количество городов m. Тогда, положив $B = md(C_k, C_l)$, получим искомую задачу. Следовательно, в этой ситуации не существует алгоритма с полиномиальной временно́й сложностью, который перечисляет все решения.

Труднорешаемостью этого вида нельзя пренебрегать, и важно вовремя ее обнаружить. Этот аспект труднорешаемости задачи можно рассматривать как указание на то, что постановка задачи нереалистична, поскольку запрашивается такой объем информации, который полностью никогда не может быть использован. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать только первый аспект труднорешаемости, т.е. будут изучаться такие задачи, длина решения которых ограничена полиномиальной функцией от длины входной информации.

Первые результаты относительно труднорешаемости задач были получены Тьюрингом около сорока лет назад. Он доказал, что существуют «неразрешимые» задачи, в том смысле, что вообще не существует алгоритма их решения. К ним, например, относится десятая проблема Гильберта (разрешимость в целых числах полиномиальных уравнений). Поскольку эти задачи не могут быть решены никакими алгоритмами, а тем более полиномиальными, следовательно, они труднорешаемы в самом сильном смысле.

Первые примеры труднорешаемых разрешимых задач были получены в начале 60-х годов XX в. в работах Хартнаниса и Стирнза и позднее в работах Фишера и Рабина. В число этих задач вошли задачи по теории автоматов, математической логике, формальной теории языков.

С одной стороны, анализ труднорешаемых задач предполагает разработку методов доказательства их труднорешаемости. С другой стороны, ведутся работы по сравнению сложности различных задач. **Основной метод, используемый для доказательства труднорешаемости задач**, состоит в «сведении» их друг к другу с помощью преобразования, которое отображает любую исходную индивидуальную задачу в эквивалентную ей другую индивидуальную задачу. Такое преобразование позволяет превратить любой алгоритм решения второй задачи в соответствующий алгоритм решения первой задачи. Так, в работах Данцига приведены примеры сводимости нескольких комбинаторных задач оптимизации к общей задаче целочисленного программирования с булевыми переменными.

Фундамент теории NP-полных задач был заложен в работе С. Кука, опубликованной в 1971 г. под названием «Сложность процедур вывода теории». В этой работе он обосновал важность понятия *«сводимость за полиномиальное время»*, т.е. сводимость, которая выполняется с помощью алгоритма, обладающего полиномиальной временно́й сложностью, а также обратил внимание на класс задач распознавания свойств (класс NP), которые могут быть решены за полиномиальное время на недетерминированном вычислительном устройстве. Отметим, что *задачей распознавания свойств* называется задача, решением которой могут быть либо «да», либо «нет». Большинство не поддающихся решению задач после их переформулировки попадает в этот класс. Кроме того, он доказал, что конкретная задача из NP, называемая *задачей о выполнимости*, обладает тем свойством, что всякая другая задача из класса NP может быть сведена к ней за полиномиальное время. Таким образом, если задача о выполнимости может быть решена за полиномиальное время, то любая задача из класса NP полиномиально разрешима. Если же какая-либо задача из NP труднорешаема, то задача о выполнимости также труднорешаема.

Позднее Р. Карп опубликовал ряд результатов, из которых следует, что многие хорошо известные задачи, включая задачу коммивояжера, будучи сформулированы в виде задачи распознавания, так же трудны, как и задача о выполнимости. Далее относительно широкого круга других задач было доказано, что они по трудности эквивалентны этим задачам, а сам класс эквивалентности, состоящий из «самых трудных» задач из NP, получил название ***«класс NP-полных задач»***.

На основании работы Кука все вопросы сложности свелись к одному: «Верно ли, что NP-полные задачи труднорешаемы?» К числу NP-полных относится много таких задач, которые используются при анализе математическими методами экономических процессов, например: задачи целочисленного линейного программирования, задачи распределения ресурсов на графах, задачи теории расписаний и др. Поэтому при моделировании реальных экономических систем, что связано, как правило, с анализом большого объема входной информации, крайне важен ответ на вопрос: как будет расти объем вычислений при увеличении объема входной информации?

Задачи распознавания и кодирование

Из соображений удобства теория NP-полных задач строится только для задач распознавания свойств. Как было сказано, эти задачи имеют только такие решения, как «да» или «нет». Заметим, что **задача распознавания II** состоит из двух множеств: множества D_{II} всех возможных индивидуальных задач и множества Y_{II} ($Y_{II} \subseteq D_{II}$) индивидуальных задач с ответом «да».

Стандартная форма, которую мы будем применять для описания задач, состоит из двух частей. В первой части дается описание условий задачи в терминах различных компонент: теории множеств, теории расписаний, теории графов и т.п. Во второй части в терминах условий формулируется вопрос, предполагающий ответ «да» или «нет». Это описание определяет множества Y_{II} и D_{II}. Индивидуальная задача принадлежит D_{II} только в том случае, если она может быть получена из стандартной формы описания подстановкой конкретных значений во все компоненты условий, и принадлежит Y_{II} только в том случае, если ответом на вопрос задачи будет «да».

Приведем в качестве примера **задачу распознавания «Коммивояжер»**.

Условия. Заданы конечное множество городов $C = (C_1, C_2, ..., C_m)$, расстояние $d(C_i, C_j) \in \mathbf{Z}^+$ для каждой пары городов $C_i, C_j \in C$ и граница $B \in \mathbf{Z}^+$, где $\mathbf{Z}^+$ — положительные целые числа.

Вопрос. Существует ли маршрут, проходящий через все города из C, длина которого не превосходит B? Иными словами, существует ли последовательность $\langle C\pi(1), C\pi(2), ..., C\pi(m)\rangle$ элементов C, такая, что

$$\sum_{i=1}^{m-1} d\big(C\pi(i), C\pi(i+1)\big) + d\big(C\pi(m), C\pi(1)\big) \le B.$$

Этот пример служит для иллюстрации важного приема — *получения из оптимизационной задачи соответствующей задачи распознавания*. Если в оптимизационной задаче ищется решение на минимум (например, минимум затрат при производстве продукции), то этой задаче можно поставить в соответствие задачу распознавания, в которой в качестве дополнительного параметра будет выступать числовая граница B (например, маршрут длиной не более B).

Аналогичным образом задача распознавания может быть получена из задачи максимизации. В этом случае достаточно условие «не превосходит» заменить условием «не меньше».

Следует отметить, что задача распознавания не может быть сложнее соответствующей оптимизационной задачи. Например, если в задаче коммивояжера можно за полиномиальное время найти маршрут минимальной длины, то ясно, как за полиномиальное время можно решить соответствующую задачу распознавания. Для этого находится маршрут минимальной длины, вычисляется его длина и сравнивается с заданной границей B. Поэтому, если удастся показать, что «Коммивояжер» есть NP-полная задача, отсюда будет следовать, что и оптимизационная задача о коммивояжере столь же сложна. Таким образом, хотя в теории NP-полных задач рассматриваются только задачи распознавания, выводы этой теории вполне применимы к оптимизационным задачам. В работе [23] строго доказано, что многие задачи распознавания, и в частности «Коммивояжер», не проще соответствующих оптимизационных задач.

Как уже отмечалось, теория NP-полных задач ограничивается только задачами распознавания. Это объясняется тем, что задачи распознавания имеют очень естественный формальный эквивалент, удобный для изучения методами теории вычислений. Этот эквивалент называют «языком» и определяют следующим образом.

Для любого конечного множества символов $\sum$ (называемого *алфавитом*) обозначим через $\sum^*$ множество всех конечных цепочек, составленных из символов алфавита $\sum$. Такие цепочки будем называть *словами*. Например, если $\sum = \{0, 1\}$, то $\sum^*$ состоит из пустого слова «*b*», а также слов 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001 и всех других конечных слов, состоящих из нулей и единиц. Любое подмножество $L \subseteq \sum^*$ будем называть ***языком*** в алфавите $\sum$. Таким образом, множество {01, 001, 111, 1001} является языком в алфавите 0, 1. Языком также будет множество квадратов целых чисел в двоичной системе, а также само множество {0, 1}.

Соответствие между задачами распознавания и языками устанавливается с помощью **схем кодирования**, которые обычно применяются в целях представления индивидуальной задачи для решения ее на компьютере.

Напомним, что схема кодирования e задачи II разбивает слова из $\sum^*$ на три класса:

- слова, не являющиеся кодами индивидуальных задач из II;
- слова, являющиеся кодами индивидуальных задач из II с отрицательным ответом на вопрос;
- слова, являющиеся кодами индивидуальных задач с положительным ответом на вопрос.

Последний класс слов и есть тот *язык, который ставится в соответствие задаче II при кодировании* e и обозначается через L(II, e):

$$L(\mathrm{II}, e) = \begin{cases} \sum \text{ есть алфавит схемы кодирования } e\text{, а } X \text{ — код} \\ \quad \text{индивидуальной задачи, } X \in \sum^*; \\ I \in Y_{\mathrm{II}} \text{ при схеме кодирования } e. \end{cases}$$

При применении формальной теории NP-полноты к задачам распознавания будем говорить, что некоторый результат имеет место для задачи Π при схеме кодирования e, если этот результат имеет место для языка $L(\Pi, e)$.

Заметим, что если вести изложение в стиле, не зависящем от кодирования, то теряется связь с формальным понятием «длина входа». Поэтому необходим некоторый параметр, через который можно выразить временну́ю сложность. Удобно считать, что с некоторой задачей распознавания связана независящая от схемы кодирования ф у н к ц и я Length: $D_\Pi \to \mathbf{Z}^+$, которая полиномиально эквивалентна длине кода индивидуальной задачи, получаемой при любой разумной схеме кодирования. *Полиномиальная эквивалентность* понимается в следующем смысле: для любой разумной схемы кодирования e задачи Π существуют два полинома P и P', такие, что если $I \in D_\Pi$ и слово X есть код индивидуальной задачи I при кодировании e, то $\mathrm{Length}(I) \le P(|X|)$ и $|X| \le P'(\mathrm{Length}(I))$, где $|X|$ — длина слова X.

В задаче «Коммивояжер» можно получить

$$\mathrm{Length}(I) = m + \log_2 B + \max\{\log_2 d(C_i, C_j); C_i, C_j \in C\}.$$

Так как любые две разумные схемы кодирования задачи Π дают полиномиально эквивалентные длины входов, то диапазон для выбора функции Length очень широк, а получаемые результаты будут верны для любой функции Length, удовлетворяющей сформулированным условиям.

9.3. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА И СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Детерминированная машина Тьюринга и класс P

Для того чтобы формализовать понятие «алгоритм», необходимо зафиксировать определенную модель процесса вычисления. Далее такой моделью будет служить **детерминированная одноленточная машина Тьюринга** (сокращенно ДМТ), которая схематически изображена на рис. 9.2.

Машина Тьюринга состоит из *управляющего устройства* с конечным числом состояний, *читающей (пишущей) головки*, которая может считывать и записывать символы, и неограниченной в обе стороны *ленты*, разделенной на бесконечное число одинаковых ячеек, занумерованных числами: ..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

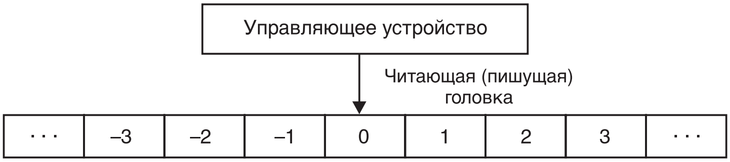

Рис. 9.2. Схема модели ДМТ

Программа для ДМТ, или **ДМТ-программа**, определена следующими компонентами:

1) конечное множество Γ символов, которые записываются на ленте, подмножество $\sum \subset \Gamma$ входных символов и выделенный пустой символ $b \subset \Gamma \setminus \sum$;
2) конечное множество состояний Q, в котором выделены начальное состояние q_0 и два заключительных состояния: q_y, q_N;
3) функция перехода δ: $(Q \setminus \{q_y, q_N\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, +1\}$.

Работа программы определяется следующим образом. *Входом* для детерминированной программы является слово $X \in \sum^*$. Слово записывается на ленте в ячейках с номерами 1, 2, ..., |X|, по одному символу в ячейке. Остальные ячейки в начальный момент времени содержат пустой символ *b* и называются пустыми. Программа начинает работу, находясь в состоянии q_0. При этом читающая (пишущая) головка находится над ячейкой с номером 1.

Далее процесс вычислений осуществляется последовательно, шаг за шагом. Если текущее состояние *q* есть q_y или q_N, результатом будет «да» при $q = q_y$ и «нет» при $q = q_N$. В противном случае текущее состояние принадлежит множеству $Q \setminus \{q_y, q_N\}$, при этом головка читает на ленте некий символ $S \in \Gamma$. Далее определяется значение $\delta(q, S)$. Предположим, что $\delta(q, S) = (q', S', \Delta)$, где Δ задает смещение читающей головки. В этом случае головка стирает символ S, пишет на его месте S′ и сдвигается на одну ячейку влево, если $\Delta = -1$, или на одну ячейку вправо, если $\Delta = +1$. Одновременно управляющее устройство переходит из состояния *q* в *q*′. На этом заканчивается один шаг процесса вычисления, и программа готова к выполнению следующего шага.

Пример простой ДМТ-программы представлен на рис. 9.3.

Функция перехода δ определена таблицей, где величина, записанная в Γ-строке и S-столбце, есть значение $\delta(q, S)$. Рисунок 9.4 иллюстрирует вычисление по программе M при входе X = 10100, здесь указаны состояние, положение головки и содержание пустых ячеек ленты до и после каждого шага.

$\Gamma = \{0, 1, b\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_y, q_N\}$

q	0	1	b
q_0	$(q_0, 0, +1)$	$(q_0, 1, +1)$	$(q_1, b, -1)$
q_1	$(q_2, b, -1)$	$(q_3, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$
q_2	$(q_y, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$
q_3	$(q_N, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$

Рис. 9.3. Пример ДМТ-программы M = (Q, Г, δ)

Заметим, что вычисление после восьми шагов оканчивается в состоянии q_y, поэтому на входе 10100 ответом будет «да».

В общем случае будем говорить, что программа M, имеющая входной алфавит Σ, п р и н и м а е т $X \in \Sigma^*$ в том и только в том случае, когда, будучи примененной ко входу X, она останавливается в состоянии q_y.

q_0	…	b	1	0	1	0	0	b	…
q_0	…	b	1	0	1	0	0	b	…
q_0	…	b	1	0	1	0	0	b	…
q_0	…	b	1	0	1	0	0	b	…
q_0	…	b	1	0	1	0	0	b	…
q_0	…	b	1	0	1	0	0	b	…
q_0	…	b	1	0	1	0	0	b	…
q_0	…	b	1	0	1	0	b	b	…
q_0	…	b	1	0	1	b	b	b	…

Рис. 9.4. Вычисление по программе M при входе 10100

Язык L_M, распознаваемый программой M, задается следующим образом:

$$L_M = \{X \in \Sigma^*: \text{M принимает } X\}.$$

Нетрудно видеть, что программа, представленная на рис. 9.3, распознает язык $\{ X \in \{0, 1\}\}$.

Отметим, что при таком определении распознавания языка не требуется, чтобы программа M останавливалась при всех входах из Σ^*, она обязана останавливаться лишь при входах L_M.

Если $X \in \Sigma^* \setminus L_M$, то работа программы M на X может либо заканчиваться в состоянии q_N, либо бесконечно продолжаться без остановки. Однако ДМТ-программа, соответствующая нашему пониманию алгоритма, должна останавливаться на всех словах входного алгоритма. В этом смысле программа на рис. 9.3 является алгоритмической, так как, начиная работать на любом слове из символов 0, 1, она будет останавливаться.

Соответствие между «распознаванием» языков и «решением» задач распознавания определяется следующим образом. Будем говорить, что ДМТ-программа M решает задачу распознавания II при кодировании e, если M останавливается на всех словах, составленных из букв входного алфавита $L_M = L(II, e)$. Программа на рис. 9.3 иллюстрирует это соответствие.

Рассмотрим **задачу распознавания «Делимость на четыре»**.

Условие. Дано положительное число N.

Вопрос. Существует ли положительное число m, такое, что $N = 4m$?

При стандартном кодировании целое число N представляется словом из 0, 1, т.е. двоичной записью этого числа. Так как положительное целое число делится на четыре тогда и только тогда, когда последние две цифры двоичной записи этого числа являются нулями, то программа, изображенная на рис. 9.4, «решает» при нашем стандартном кодировании задачу «Делимость на четыре».

Заметим, что ДМТ-программой можно пользоваться и для *вычисления функций*. Предположим, что программа M, имеющая входной алфавит Σ и ленточный алфавит Γ, останавливается на любом входе из Σ^*. Тогда M вычисляет функцию $f_M: \Sigma^* \to \Gamma^*$, которая для каждого $X \in \Sigma^*$ определяется следующим образом. Если программа M, начиная работать при входе X, останавливается, то в качестве $f_M(X)$ берется слово, составленное из символов, записанных после остановки машины в ячейке с номерами 1, 2, 3, ..., включая последнюю пустую ячейку.

Программа M, представленная на рис. 9.4, вычисляет функцию $f_M: \{0, 1\}^* \to \{0, 1, b\}^*$, которая отображает каждое слово $X \in \{0, 1\}^*$ в слово f_M, получаемое из X удалением двух крайних справа символов (если $|X| < 2$, то M выдаст в качестве f_M пустое слово).

Хорошо известно, что ДМТ-программы могут решать задачи намного более сложные, чем в рассмотренном примере. Несмотря на то что ДМТ имеет только одну последовательную ленту и на каждом шаге может выполнять весьма ограниченную работу, ДМТ-программа может быть составлена так, что выполнит любое вычисление, характерное для обычного компьютера.

Определим понятие «временна́я сложность». Время, требуемое ДМТ-программой M для вычисления при входе X, есть число шагов, выполняемых до момента остановки. Если программа M останавливается на всех входах $X \in \Sigma^*$, то ***временну́ю сложность*** T_M: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$ можно определить так:

$$T_M(n) = \max \left\{ \begin{array}{l} m\text{: существует такое слово } X \in \Sigma^*,\ |X| = n, \\ \quad \text{что вычисление по программе M} \\ \quad \text{на входе X требует времени } m \end{array} \right\}.$$

Детерминированная программа M называется ***полиномиальной ДМТ-программой***, если существует такой полином P, что $T_M(n) \le P(n)$ для всех $n \in \mathbf{Z}^+$.

Далее определим ф о р м а л ь н о первый важный класс языков — **класс P**:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} L\text{: существует полиномиальная ДМТ-программа M,} \\ \quad \text{для которой } L = L_M \end{array} \right\}.$$

Будем говорить, что задача распознавания П п р и н а д л е ж и т классу P при кодировании e, если $L(П, e) \in P$, т.е. существует полиномиальная ДМТ-программа, которая «решает» задачу при кодировании e. Далее, не упоминая конкретные схемы кодирования, будем просто говорить, что задача распознавания П принадлежит классу P.

Недетерминированное вычисление и класс NP

Рассмотрим второй важный класс языков (задач распознавания свойств) — класс NP.

Прежде чем перейти к формальному определению этого класса в терминах языков и машин Тьюринга, поясним смысл понятия, лежащего в основе определения класса NP.

Рассмотрим **задачу «Коммивояжер»**, описание которой приведено в параграфе 9.2. В условии даны: множество городов, расстояния между ними и граница *B*; при этом спрашивается, существует ли маршрут, проходящий через все города и имеющий длину, не превосходящую *B*.

Полиномиальный алгоритм этой задачи неизвестен. Предположим, однако, что относительно некоторой индивидуальной задачи кто-то получил ответ «да». Если вы в этом сомневаетесь, можно потребовать доказательства этого факта, т.е. предъявления маршрута, обладающего необходимыми свойствами. Имея предъявленное решение, нетрудно проверить, является ли оно на самом деле маршрутом, и, если это так, вычислить его длину, сравнить ее с границей *B* и тем самым проверить соответствующее утверждение. Более того, эту «процедуру проверки» можно представить в виде алгоритма, временна́я сложность которого ограничена полиномом от Length(I).

Именно понятие *полиномиальной проверяемости* позволяет выделить задачи класса NP.

Отметим, что проверяемость за полиномиальное время не влечет разрешимости за полиномиальное время, т.е., утверждая, что за полиномиальное время можно проверить ответ «да» для задачи «Коммивояжер», мы не учитываем время, которое может понадобиться на поиск нужного маршрута среди экспоненциального числа всех маршрутов. Мы лишь утверждаем, что по любому заданному маршруту для индивидуальной задачи I можно за полиномиальное время проверить, «доказывает» ли этот маршрут, что ответ на вопрос относительно индивидуальной задачи I есть «да».

Неформально класс NP можно определить с помощью такого понятия, как **недетерминированный алгоритм**. Такой алгоритм состоит из двух стадий:

1) стадия угадывания;
2) стадия проверки.

По заданной индивидуальной задаче I на первой стадии происходит просто «угадывание» некоторой структуры S. Затем задача I и S вместе подаются в качестве входа на стадию проверки, которая выполняется обычным детерминированным способом и либо заканчивается ответом «да» или «нет», либо продолжается бесконечно без остановки.

Недетерминированный алгоритм «р е ш а е т» задачу распознавания П, если для любой индивидуальной задачи $I \in D_{П}$ выполнены следующие условия:

1. Если $I \in Y_{II}$, то существует такая структура S, угадывание которой для входа I приведет к тому, что стадия проверки начинает работу на входе (I, S) и заканчивается ответом «да».
2. Если $I \notin Y_{II}$, то не существует такой структуры S, угадывание которой для входа I обеспечило бы окончание стадии проверки на входе (I, S) ответом «да».

Например, недетерминированный алгоритм решения задачи «Коммивояжер» можно было бы построить, используя в качестве стадии угадывания выбор произвольной последовательности городов, а в качестве стадии проверки — полиномиальную процедуру и проверку доказательства для задачи «Коммивояжер».

Очевидно, для любой индивидуальной задачи I найдется такая догадка S, что результатом проверки на входе (I, S) будет «да» в том и только в том случае, если для индивидуальной задачи I существует маршрут искомой длины.

Говорят, что недетерминированный алгоритм, решающий задачу распознавания II, *работает в течение полиномиального времени*, если существует полином P, такой, что для любого $I \in Y_{II}$ найдется догадка S, приводящая на стадии детерминированной проверки на входе (I, S) к ответу «да» за время P(Length(I)). Отсюда следует, что «размер» угадываемой структуры S будет обязательно ограничен полиномом от Length(I), так как на проверку догадки S может быть затрачено не более чем полиномиальное время.

Класс NP — определяемый неформально — это класс всех задач распознавания II, которые при разумном кодировании могут быть решены недетерминированными алгоритмами за полиномиальное время. Приведенный пример показывает, что задача «Коммивояжер» принадлежит классу NP.

Поясним значение термина «решает» в этом определении. Основное назначение «полиномиального недетерминированного алгоритма» состоит в объяснении понятия «проверяемости за полиномиальное время», а не в том, чтобы служить методом решения задач распознавания свойств.

При каждом входе такой алгоритм имеет не одно, а несколько возможных вычислений — по одному для каждой возможной догадки.

Существует еще одно важное отличие «решения» задачи распознавания недетерминированным алгоритмом от решения детерминированным алгоритмом: в первом случае отсутствует симметрия между ответами «да» или «нет». В то же время если задача «Дано I; верно ли, что для I выполняется свойство X?» может быть решена полиномиальным (детерминированным) алгоритмом, то такое же утверждение справедливо и для дополнительной задачи: «Дано I; верно ли, что для I не выполняется свойство X?» Это следует из того, что детерминированный алгоритм останавливается при всех входах, поэтому достаточно поменять местами ответы «да» и «нет» (переставить состояния q_y и q_N в ДМТ-программе).

Совершенно неочевиден этот факт для всех задач, разрешаемых за полиномиальное время недетерминированными алгоритмами.

Рассмотрим, например, **дополнение задачи «Коммивояжер»**: дано множество городов, расстояния между ними и граница *B*. Верно ли, что нет маршрута, проходящего через все города и имеющего длину, не превосходящую *B*?

Для выяснения, имеет ли поставленный вопрос ответ «да», неизвестен способ, который был бы короче, чем проверка всех (или почти всех) возможных маршрутов. Иными словами, неизвестен полиномиальный недетерминированный алгоритм решения этой дополнительной задачи из NP.

В заключение формализуем приведенное определение в терминах языков и машин Тьюринга. Формальным эквивалентом недетерминированного алгоритма является программа для **недетерминированной одноленточной машины Тьюринга** (НДМТ).

Модель НДМТ, которой мы будем пользоваться, имеет такую же структуру, как и модель ДМТ. Отличие состоит в том, что НДМТ (рис. 9.5) дополнена *угадывающим модулем* со своей головкой, которая может только записывать на ленту. Угадывающий модуль дает информацию для записывания «догадки» и применяется исключительно с этой целью.

Программа для НДМТ, или **НДМТ-программа**, определяется точно так же, как ДМТ-программа. При этом используются ленточный алфавит Γ, входной алфавит Σ, пустой символ *b*, множество состояний Q, начальное состояние q_0, заключительные состояния q_y и q_N, функция перехода $\delta\colon (Q \setminus \{q_y, q_N\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, +1\}$.

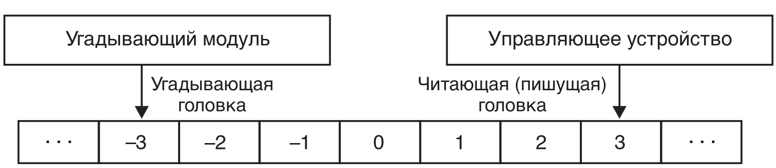

Рис. 9.5. Схема модели НДМТ

Вычисление НДМТ-программы при входе $X \in \Sigma^*$, в отличие от вычислений ДМТ-программы, имеет две различные стадии.

На первой стадии происходит *«угадывание»*. В начальный момент времени входное слово X записывается в ячейке с номерами 1, 2, 3, ..., |X| (остальные ячейки пусты), читающая (пишущая) головка «смотрит» на ячейку с номером 1, а угадывающая головка — на ячейку с номером –1, устройство управления «пассивно». Затем *угадывающий модуль* начинает управлять угадывающей головкой, которая делает один шаг в каждый момент времени и либо пишет в находящейся под ней ячейке одну букву из алфавита Г и сдвигается на одну ячейку влево, либо останавливается. В последнем случае угадывающий модуль переходит в пассивное состояние, а управляющее устройство начинает работу в состоянии q_0. Угадывающий модуль решает, продолжить ли работу (перейти ли в пассивное состояние, какую букву из алфавита Г написать на ленте), причем делается это совершенно произвольно. Таким образом, угадывающий модуль до момента окончания своей работы может написать любое слово из алфавита Г* и в действительности может никогда не остановиться.

Вторая стадия — *стадия проверки* — начинается в тот момент, когда *управляющее устройство* переходит в состояние q_0. Начиная с этого момента НДМТ-программа осуществляет вычисления в точности по тем же правилам, что и ДМТ-программа. Угадывающий модуль (и его головка) в вычислении больше не участвует, выполнив свою роль, т.е. записав на ленте слово-догадку. Слово-догадка может (и обычно будет) просматриваться читающей (пишущей) головкой в процессе проверки. Процесс заканчивается тогда, когда управляющее устройство перейдет в одно из двух заключительных состояний (q_y или q_N). Вычисление называется ***принимающим***, если остановка происходит в состоянии q_y. Остальные вычисления, заканчивающиеся или нет, называются ***непринимающими***.

Отметим, что любая НДМТ-программа М может иметь бесконечное число возможных вычислений при данном входе X, по одному для каждого слова-догадки из алфавита Г*.

Будем говорить, что НДМТ-программа М принимает X, если по крайней мере одно из ее вычислений на входе X является принимающим.

Язык, распознаваемый программой М, — это язык $L_M = \{X \in \Sigma^*$: М принимает $X\}$.

Время, требуемое недетерминированной программой М для того, чтобы принять слово $X \in L_M$, — это минимальное число шагов, выполняемых на стадии угадывания и проверки до момента достижения заключительного состояния q_y, где минимум берется по всем принимающим вычислениям программы M на входе X. ***Временнáя сложность*** НДМТ-программы M — это функция T_M: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$, определяемая следующим образом:

$$T_M(n) = \max\left\{\{1\} \bigcup \left\{\begin{array}{l} m\text{: существует } X \in L_M,\ |X| = n\text{, такое,} \\ \quad\text{что время принятия X програм-} \\ \quad\text{мой M равно } m \end{array}\right\}\right\}.$$

Заметим, что временнáя сложность программы M зависит только от числа шагов, выполняемых в принимающих вычислениях; кроме того, мы полагаем $M(n)$ равным единице, если нет ни одного входа длиной n, принимаемого программой M.

НДМТ-программа называется ***НДМТ-программой с полиномиальным временем работы***, если найдется полином P, такой, что $T_M(n) \le P(n)$ для всех $n \ge 1$.

Наконец, **класс NP** формально определяется так:

$$NP = \left\{\begin{array}{l} L\text{: существует НДМТ-программа M с полиноми-} \\ \quad\text{альным временем работы, такая, что } L = L_M \end{array}\right\}.$$

Нетрудно установить взаимосвязь между этим формальным определением и предшествующим неформальным.

Будем говорить, что задача распознавания П принадлежит классу NP при схеме кодирования e, если $L(\Pi, e) \in NP$. Как и в случае класса P, будем просто говорить, что П лежит в NP , не упоминая конкретную схему кодирования, когда ясно, что некоторая разумная схема кодирования задачи П даст язык, принадлежащий NP.

Взаимоотношения между классами NP и P

Вопрос о взаимоотношении классов NP и P имеет важное значение для теории NP-полных задач. Одно соотношение заключается в том, что

$$P \subseteq NP,$$

т.е. всякая задача распознавания, разрешимая за полиномиальное время детерминированным алгоритмом, разрешима также за полиномиальное время недетерминированным алгоритмом. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что любой детерминированный алгоритм может быть использован в качестве стадии проверки недетерминированного алгоритма.

Если $\Pi \in \mathrm{P}$ и А — произвольный детерминированный алгоритм решения задачи Π, то полиномиальный недетерминированный алгоритм для Π можно получить, воспользовавшись А в качестве стадии проверки и игнорируя стадию угадывания. Таким образом, из $\Pi \in \mathrm{P}$ следует, что $\Pi \in \mathrm{NP}$.

Один из самых значительных результатов относительно соотношения классов P и NP состоит в следующем.

Теорема 9.1. Если $\Pi \in \mathrm{NP}$, то существует такой полином P, что задача Π может быть решена детерминированным алгоритмом с временно́й сложностью $O(2^{\mathrm{P}(n)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть А — полиномиальный недетерминированный алгоритм решения задачи Π и $q(n)$ — полином, ограничивающий временну́ю сложность алгоритма А.

По определению класса NP для каждого принимаемого входа длиной n найдется некоторое слово-догадка (в алфавите Γ символов ленты) длиной не более $q(n)$, такое, что в алгоритме А стадия проверки дает при рассматриваемом входе ответ «да» не более чем за $q(n)$ шагов. Таким образом, общее число догадок, которые нужно рассмотреть, не превосходит $K^{q(n)}$, где $K = |\Gamma|$ (если слово-догадка короче $q(n)$, то его можно дополнить пустыми словами и рассматривать как слово длиной $q(n)$).

Теперь можно детерминированным образом выяснить, имеет ли алгоритм А на заданном входе длиной n принимающее вычисление. Для этого достаточно на каждой из $K^{q(n)}$ возможных догадок запустить детерминированную стадию проверки алгоритма А и позволить ей работать до того момента, пока она не остановится или не сделает $q(n)$ шагов. Этот моделирующий алгоритм даст ответ «да», если ему встретится слово-догадка, приводящее к принимающему вычислению, не более $q(n)$, и ответ «нет» — в противном случае. Такой алгоритм, очевидно, будет детерминированным алгоритмом решения задачи Π. Более того, его временна́я сложность равна по существу $q(n)K^{q(n)}$ и, хотя это экспонента, при подходящем выборе полинома сложность не превосходит $O(2^{\mathrm{P}(n)})$. Теорема доказана.

Процесс моделирования, предложенный в доказательстве теоремы 9.1, можно в некоторой степени ускорить с помощью метода ветвей и границ или путем более тщательного перебора, когда избегаются ненужные слова-догадки. Тем не менее, несмотря на значительное сокращение перебора в этом случае, неизвестен метод, который осуществляет такое моделирование быстрее, чем за экспоненциальное время.

9.4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ NP-ТРУДНЫХ ЗАДАЧ

Способность недетерминированного алгоритма проверить за полиномиальное время экспоненциальное число возможностей может навести на мысль, что полиномиальные недетерминированные алгоритмы являются более мощным средством, чем полиномиальные детерминированные. Действительно, для многих частных задач класса NP, таких как «Коммивояжер» и др., не найдено полиномиального детерминированного алгоритма, несмотря на упорные усилия многих известных исследователей. Поэтому не удивляет широко распространенное мнение, что $P \neq NP$, хотя доказательство этой гипотезы отсутствует. Если P не совпадает с NP, то различие между NP\P и P очень существенно. Все задачи из P могут быть решены полиномиальными алгоритмами, а все задачи из NP\P труднорешаемы. Поэтому если $P \neq NP$, то для каждой конкретной задачи $\Pi \in NP$ важно знать, какая из этих двух возможностей ($P = NP$ или $P \neq NP$) реализуется. Конечно, пока не доказано, что $P \neq NP$, нет никаких шансов показать, что некоторая конкретная задача принадлежит классу NP\P. По этой причине цель теории NP-полных задач заключается в доказательстве более слабых результатов вида: «если $P \neq NP$, то $\Pi \subseteq NP \setminus P$».

Такой условный подход основан на идее полиномиальной сводимости. Будем говорить, что имеет место ***полиномиальная сводимость*** языка $L1 \subseteq \sum 1^*$ к языку $L2 \subseteq \sum 2^*$, если существует функция $f: \sum 1^* \to \sum 2^*$, удовлетворяющая двум условиям:

1) существует ДМТ-программа, вычисляющая f с временнóй сложностью, ограниченной полиномом;
2) для любого $X \in \sum 1^*$ слово $X \in L1$ в том и только в том случае, если $f(X) \in L2$.

Если L1 полиномиально сводится к L2, будем писать $L1 \propto L2$ и говорить «L1 сводится к L2» (опуская слово «полиномиально»).

Если L2 полиномиально сводится к L1, то будем писать $L2 \propto L1$.

Важность понятия «полиномиальная сводимость» вытекает из следующей леммы.

Лемма 9.1. Если $L1 \propto L2$, то из $L2 \in P$ следует, что $L1 \in P$ (и наоборот: из $L1 \notin P$ следует, что $L2 \notin P$).

Доказательство. Пусть $\sum 1$ и $\sum 2$ — алфавиты языков L1 и L2 соответственно, функция $f: \sum 1^* \to \sum 2^*$ осуществляет полиномиальную сводимость L1 к L2; Mf — полиномиальная ДМТ-программа, вычисляющая f, и M2 — полиномиальная ДМТ-программа, распознающая L2.

Полиномиальная ДМТ-программа, распознающая L1, может быть получена композицией программ Mf и M2. Ко входу $X \in \Sigma 1^*$ вначале применяется Mf, чтобы построить $f(X) \in \Sigma 2^*$. Затем к f(X) применяется программа M2, выясняющая, верно ли, что $f(X) \in L2$. Поскольку $X \in L1$ тогда и только тогда, когда $f(X) \in L2$, то это описание дает ДМТ-программу, распознающую L1. То, что время работы этой программы ограничено полиномом, непосредственно следует из полиномиальности программ Mf и M2. Точнее, если Pf и P2 — полиномы, ограничивающие время работы программ Mf и M2 соответственно, то $|f(X)| \le |Pf(|X|)|$, а время работы только что построенной программы, как нетрудно видеть, ограничено функцией $O\big(Pf(|X|) + P2(Pf(|X|))\big)$, которая является полиномом от |X|. Лемма доказана.

Если П1 и П2 — задачи распознавания, а e1 и e2 — их схемы кодирования, то будем писать $П1 \propto П2$ (относительно заданных схем кодирования), если существует полиномиальная сводимость языка L(П1, e1) к L(П2, e2). Когда будет действовать стандартное предположение о «разумности» используемых схем кодирования, упоминание о конкретных схемах кодирования, как обычно, будет опускаться. Таким образом, на уровне задач *полиномиальная сводимость* задачи распознавания П1 к задаче распознавания П2 означает наличие функции $f\colon D_{П1} \to D_{П2}$, удовлетворяющей двум условиям:

1) f вычисляется полиномиальным алгоритмом;
2) для всех $I \in D_{П}$ задача $I \in Y_{П1}$ тогда и только тогда, когда $f(I) \in Y_{П2}$.

Отношение полиномиальной сводимости особенно удобно, поскольку оно является транзитивным. Это устанавливает следующая лемма.

Лемма 9.2. Если $L1 \propto L2$ и $L2 \propto L3$, то $L1 \propto L3$.

Доказательство. Пусть Σ1, Σ2, Σ3 — алфавиты языков L1, L2, L3 соответственно. Функция $f1\colon \Sigma 1^* \to \Sigma 2^*$ реализует полиномиальную сводимость L1 к L2, а функция $f2\colon \Sigma 2^* \to \Sigma 3^*$ — полиномиальную сводимость L2 к L3. Тогда функция $f\colon \Sigma 1^* \to \Sigma 3^*$, которая для всех $X \in \Sigma 1^*$ определяется соотношением $f(X) = f2(f1(X))$, реализует исходную сводимость языка L1 к языку L3. Действительно, $f(X) \in L3$ тогда и только тогда, когда $X \in L1$, а вычислимость f за полиномиальное время получается с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям, использованным при доказательстве леммы 9.1.

Доказав лемму 9.2, можно говорить о том, что языки L1 и L2 (соответственно задачи распознавания Π1 и Π2) *полиномиально эквивалентны*, если они сводятся друг к другу, т.е. L1 ∞ L2 и L2 ∞ L1 (имеет место сводимость Π1 ∞ Π2 и Π2 ∞ Π1). Лемма 9.2 утверждает, что это отношение является отношением эквивалентности, а также, что отношение «∞» определяет частичное упорядочение возникающих классов эквивалентности языков (задач распознавания).

На самом деле класс P — это наименьший относительно этого частичного порядка класс эквивалентности, и с вычислительной точки зрения его можно рассматривать как класс *самых легких языков* задач распознавания. Класс NP-полных языков задач распознавания дает нам другой класс эквивалентности: он содержит *«самые трудные» языки* задач распознавания из NP.

Язык L называется ***NP-полным***, если $L \in NP$ и любой другой язык $L' \in NP$ сводится к L. Говоря неформально, задача распознавания Π называется NP-полной, если $\Pi \in NP$ и любая другая задача распознавания $\Pi' \in NP$ сводится к Π. Таким образом, лемма 9.1 позволяет отождествлять NP-полные задачи с «самыми трудными задачами из NP». Если хотя бы одна NP-полная задача может быть решена за полиномиальное время, то и все задачи из NP также могут быть решены за полиномиальное время. Если хотя бы одна задача из NP труднорешаема, то и все NP-полные задачи труднорешаемы.

Следовательно, любая NP-полная задача Π обладает свойством, которое сформулировано в параграфе 9.3: если $P \neq NP$, то $\Pi \in NP \backslash P$. Точнее, $\Pi \in P$ тогда и только тогда, когда $P = NP$. В предположении, что $P \neq NP$, можно дать гипотетическую картину класса NP (рис. 9.6).

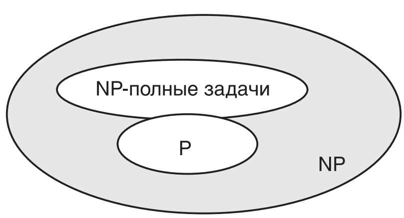

Рис. 9.6. Гипотетическое соотношение классов P и NP

Как видно из рис. 9.6, если предположить, что класс P отличен от NP, то должны существовать задачи из NP, неразрешимые за полиномиальное время и не являющиеся NP-полными.

В дальнейшем будем изучать в основном NP-полные задачи. Как уже говорилось, имеются простые методы доказательства NP-полноты задачи: для этого необходимо доказать, что любая задача из NP сводится к некоторому кандидату на NP-полную задачу.

Следующая лемма указывает простой путь доказательства NP-полноты новой задачи II, если известна хотя бы одна NP-полная задача.

Лемма 9.3. Если L1 и L2 принадлежат классу NP, а L1 — это NP-полный язык и L1 ∞ L2, то L2 — также NP-полный язык.

Доказательство. Так как L2 $\in$ NP , то достаточно показать, что любой язык L$'$ $\in$ NP сводится к L2. Рассмотрим любой язык L$'$ $\in$ NP. Так как L1 — это NP-полный язык, то L$'$ сводится к L1. В силу транзитивности отношения «∞» из сводимости L1 ∞ L2 следует L$'$ ∞ L2. Лемма доказана.

Как следует из леммы 9.3, для доказательства NP-полноты новой задачи II достаточно показать, что:

1) II $\in$ NP;
2) какая-то одна известная NP-полная задача сводится к II.

Однако, прежде чем воспользоваться этим методом доказательства, необходимо найти хотя бы одну NP-полную задачу.

В настоящее время известен обширный список NP-полных задач (среди которых рассмотренная нами задача «Коммивояжер»).

Из вышеизложенного следует, что при **анализе любой новой задачи**, связанной, например, с оптимальным распределением ресурсов в экономической системе, естественно сначала задать вопрос: «Можно ли рассматриваемую задачу решить полиномиальным алгоритмом?» Если ответ на этот вопрос положителен, то с точки зрения NP-полноты ничего больше сказать о задаче нельзя. Дальнейшие усилия должны быть сконцентрированы на поиске как можно более эффективных полиномиальных алгоритмов. Если же ответ отрицателен и для решения задачи неизвестны полиномиальные алгоритмы, то естественно возникает вопрос: «Является ли рассматриваемая задача NP-полной?» Если задача оказалась NP-полной, это сильный аргумент в пользу того, что ее *нельзя решить за полиномиальное время*.

На практике при анализе новой задачи пользуются двусторонним подходом. С одной стороны, предпринимаются попытки доказательства NP-полноты задачи, с другой — осуществляется поиск эффективных (полиномиальных) алгоритмов ее решения. Естественно, что успешное применение на практике такого двустороннего подхода требует от исследователя мастерства как в отыскании доказательств NP-полноты, так и в построении полиномиальных алгоритмов. С методами построения эффективных алгоритмов можно ознакомиться, например, в [23]. Мы же сосредоточили внимание на следующем вопросе: если доказана NP-полнота задачи, каким образом продолжить ее анализ с точки зрения получения практических рекомендаций по отысканию решения задачи?

Один из таких методов анализа заключается в том, чтобы, *налагая дополнительные ограничения, рассмотреть подзадачи исходной задачи*, по возможности разграничивая NP-полные и полиномиальные задачи.

Другим подходом является *максимальное сокращение объема перебора при решении задачи*, хотя при этом признается возможность экспоненциального времени работы алгоритма на какой-либо из индивидуальных задач. К наиболее широко используемым приемам сокращения перебора относятся приемы, основанные на методе ветвей и границ или других методах неявного перебора. Эти приемы состоят в построении частичных решений, представленных в виде дерева поиска, и применении мощных методов построения оценок, позволяющих идентифицировать бесперспективные частичные решения, в результате чего от дерева поиска на одном шаге может быть отсечена целая ветвь «плохих» решений. Известны и другие методы кроме метода ветвей и границ. Это метод динамического программирования, методы отсечений и метод Лагранжа.

И наконец, еще один подход основан на приеме, который можно назвать *«снижение требований»*. Он заключается в отказе от поиска оптимального решения и нахождении вместо него хорошего решения за приемлемое время. Алгоритмы, основанные на этом приеме, обычно называются эвристическими, поскольку они используют различные соображения без строгих обоснований. Методы, применяемые при построении таких алгоритмов, сильно зависят от специфики задачи, хотя существует несколько исходных принципов, которые могут служить некоторой отправной точкой.

Наиболее широко используется так называемый метод локального поиска. В этом случае заранее выбранное множество локальных операций используется для последовательного улучшения начального решения до тех пор, пока такое улучшение возможно, в противном случае оказывается достигнутым «локальный оптимум». Эвристические алгоритмы, построенные этим и другими методами, на практике оказываются весьма удовлетворительными, хотя для получения удовлетворительных характеристик требуется большая работа, связанная с последовательным улучшением применяемых эвристик. В результате только в очень редких случаях удается заранее предсказать и оценить поведение таких алгоритмов. Вместо этого такие алгоритмы оцениваются и сравниваются на основе сочетания эмпирических данных и аргументов, опирающихся на здравый смысл.

В то же время в некоторых случаях удается доказать, что решения, получаемые эвристическим алгоритмом, всегда будут отличаться от оптимальных в процентном отношении не более чем на определенную величину. Подобные результаты можно рассматривать как «оценки погрешности» алгоритмов.

Рассмотрим **пример применения приближенных алгоритмов для задачи об упаковке в контейнеры**. Дадим сначала формальное описание понятия и обозначений комбинаторной оптимизационной задачи.

Комбинаторная оптимизационная задача Π (минимизации или максимизации) состоит из трех частей:

1) множества D_Π индивидуальных задач;
2) конечного множества $S_\Pi(I)$ допустимых решений индивидуальной задачи I для каждой $I \in D_\Pi$;
3) функции m_Π, сопоставляющей каждой индивидуальной задаче $I \in D_\Pi$ и каждому допустимому решению $\sigma \in S_\Pi(I)$ некоторое положительное целое число $m_\Pi(I, \sigma)$, называемое *величиной решения* σ.

Если Π — задача минимизации, то оптимальным решением индивидуальной задачи $I \in D_\Pi$ является такое допустимое решение $\sigma^* \in S_\Pi(I)$, что для всех $\sigma \in S_\Pi(I)$ выполнено неравенство $m_\Pi(I, \sigma^*) \le m_\Pi(I, \sigma)$. Соответственно, для задачи максимизации $m_\Pi(I, \sigma^*) \ge m_\Pi(I, \sigma)$.

Для обозначения величины $m_\Pi(I, \sigma^*)$ оптимального решения индивидуальной задачи I будем использовать символ $Opt_\Pi(I)$ (в тех случаях, когда задача ясна из контекста, индекс Π может опускаться).

Алгоритм A называется ***приближенным алгоритмом решения задачи*** Π, если для любой индивидуальной задачи $I \in D_\Pi$ алгоритм A отыскивает некоторое допустимое решение $\sigma \in S_\Pi(I)$.

Через A(I) будем обозначать величину $m_{\Pi}(I, \sigma)$ того возможного решения σ, которое A строит по I. Если A(I) = Opt(I) для всех $I \in D_{\Pi}$, то A назовем ***точным алгоритмом решения задачи*** Π.

Если оптимизационная задача NP-трудна, то, как было сказано ранее, скорее всего нельзя построить точный полиномиальный алгоритм ее решения. Более реалистично попытаться построить приближенный алгоритм A, время работы которого ограничено полиномом невысокой степени и величина A(I) близка к Opt(I).

Перейдем к изучению **свойств приближенных алгоритмов применительно к задаче об упаковке в контейнеры**. Эта задача весьма актуальна в логистике складирования. Она формулируется следующим образом. Заданы конечное множество $V = \{U_1, ..., U_n\}$ «предметов» и «размеры» $S(U) \in (0, 1)$ каждого предмета $U \in V$ (размер предмета задан рациональным числом). Требуется найти такое разбиение множества V на непересекающиеся подмножества $V_1, ..., V_k$, чтобы сумма размеров предметов в каждом из подмножеств V_i не превосходила единицы и чтобы k было наименьшим. Можно считать, что предметы, принадлежащие каждому множеству V_i, упаковываются в один контейнер единичного размера, а наша цель — упаковать предметы множества V в как можно меньшее число контейнеров. Если контейнер один, а каждый предмет обладает определенной ценностью, то в некоторых ситуациях необходимо упаковать в контейнер те предметы, которые максимизируют суммарную ценность упакованных предметов. В такой формулировке задача об упаковке в контейнеры используется при формировании портфеля ценных бумаг для ситуации, когда известна динамика изменения курсовой стоимости входящих в портфель ценных бумаг.

Данная задача является NP-трудной, поэтому надежд на отыскание эффективного точного алгоритма ее решения немного. В то же время имеется несколько заслуживающих внимания простых приближенных алгоритмов. Один из них известен под названием «в первый подходящий».

Алгоритм «в первый подходящий» заключается в том, чтобы помещать предметы в контейнеры по очереди в порядке возрастания номеров. Предметы помещаются в контейнер согласно следующему простому правилу: «Очередной предмет U помещается в контейнер с наименьшим номером, у которого сумма размеров уже помещенных в него предметов не превосходит $1 - S(U_i)$. Другими словами, U_i помещается в первый из контейнеров, куда он может попасть, не нарушая ограничений по размеру. На рис. 9.7 показан пример работы этого алгоритма.

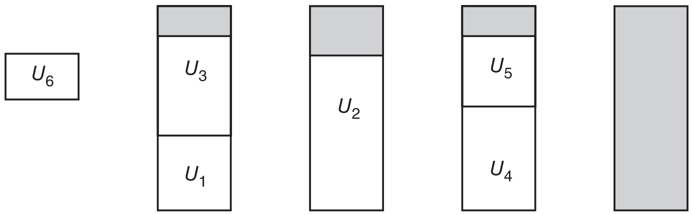

Рис. 9.7. Иллюстрация алгоритма решения задачи об упаковке в контейнеры

На рис. 9.7 каждый предмет представлен прямоугольником, имеющим высоту, пропорциональную размеру предмета.

С интуитивной точки зрения этот алгоритм кажется весьма разумным. Он не начинает заполнять новый контейнер, пока среди контейнеров есть хотя бы один, в который можно поместить очередной предмет.

Проанализируем, насколько близко к оптимальному решение, полученное алгоритмом «в первый подходящий». Вначале рассмотрим число контейнеров, требующихся для указанного алгоритма, как функцию от параметров задачи. Обозначим эту функцию как FF(I). Имеют место неравенства:

$$\mathrm{FF(I)} \geq 1;$$

$$\mathrm{FF(I)} < \left\lceil 2\sum_{i=1}^{n} S(U_i) \right\rceil.$$

Последнее неравенство следует из того, что в результате работы алгоритма не может получиться более одного контейнера, заполненного более чем наполовину. В противном случае первый же предмет, попавший в такой контейнер с наибольшим номером, должен быть помещен алгоритмом в «первый подходящий» контейнер, т.е. такой же контейнер с тем же номером. То, что указанная граница н а и л у ч ш а я из возможных, следует из рассмотрения индивидуальной задачи $V = \{U_1, \ldots, U_n\}$, где $S(U_i) = \dfrac{1}{2} + \varepsilon$, $1 \leq i \leq n$. Поскольку никакие два предмета не могут попасть в один ящик, то FF(I) = n, в то время как сумма размеров предметов равна $n\left(\dfrac{1}{2} + \varepsilon\right)$; и если ε достаточно мало, то она будет сколь угодно близка к $n/2$.

Сделанное замечание позволяет нам также оценить, во сколько раз плохое решение, получаемое алгоритмом «в первый подходящий», может отличаться от оптимального решения задачи. Поскольку ясно, что

$$\mathrm{Opt(I)} \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{n} S(U_i) \right\rceil,$$

то отсюда для всех индивидуальных задач I вытекает неравенство

$$\mathrm{FF(I)} < 2\mathrm{Opt(I)}.$$

В [23] приводится теорема, что для FF(I) имеется лучшая оценка.

Теорема 9.2. Для всех индивидуальных задач I об упаковке имеет место неравенство

$$\mathrm{FF(I)} \leq \frac{17}{10}\mathrm{Opt(I)} + 2.$$

Более того, существуют индивидуальные задачи I, для которых Opt(I) сколь угодно велико и

$$\mathrm{FF(I)} \geq \frac{17}{10}\left(\mathrm{Opt(I)} - 1\right).$$

Таким образом, теорема 9.2 характеризует асимптотическое поведение в худшем случае алгоритма «в первый подходящий». Величина FF(I) никогда не отличается от оптимума более чем на 70%, и в некоторых случаях такое отличие действительно достигается.

Далее перейдем к анализу алгоритмов с лучшей оценкой поведения. Ясно, что алгоритм «в первый подходящий» можно видоизменить, пользуясь, например, следующим более совершенным правилом размещения: каждый следующий предмет U_i помещают в контейнер, содержимое которого ближе всего к величине $1 - S(U_i)$, но не превосходит ее (если имеется несколько таких контейнеров, то выбирается контейнер с наименьшим номером). Этот алгоритм называется **«в наилучший из подходящих»**. Как показано в [23], в наихудшем случае он имеет, по существу, те же характеристики, что и алгоритм «в первый подходящий».

Несколько лучший приближенный алгоритм получается, если учесть, что наихудшей для алгоритма «в первый подходящий» (а также для алгоритма «в наилучший из подходящих») оказывается ситуация, когда в упорядочении предметы с наибольшими размерами идут раньше предметов с наименьшими размерами, т.е. $S(U_1) \geq S(U_2) \geq \ldots \geq S(U_n)$. Алгоритм применения процедуры «в первый подходящий» к переупорядоченному таким образом списку предметов называется **«в первый подходящий в порядке убывания»** (соответствующая функция обозначается FFD(I)). Работа этого алгоритма характеризуется следующей теоремой Джонсона.

Теорема 9.3. Для всех индивидуальных задач об упаковке выполняется неравенство

$$\mathrm{FFD(I)} \leq \frac{11}{9}\mathrm{Opt(I)} + 4.$$

Более того, существуют индивидуальные задачи, для которых Opt(I) произвольно велико и

$$\mathrm{FFD(I)} \geq \frac{11}{9}\mathrm{Opt(I)}.$$

Таким образом, мы имеем гарантию, что алгоритм «в первый подходящий в порядке убывания» даже в худшем случае выдает решение, отличающееся от оптимального не более чем на 22%. Более того, встречаются задачи, для которых эта оценка достигается. Такой же результат имеет место для аналогичного алгоритма **«в наилучший из подходящих в порядке убывания»**.

Нетрудно понять причину, в силу которой желательно иметь оценки погрешностей приближенных алгоритмов. Даже если конкретная оценка погрешности не столь сильна, как хотелось бы, тем не менее весьма разумно начать решение задачи с простого алгоритма, имеющего такую оценку погрешности, а затем улучшить ее, пользуясь более совершенными эвристиками и методами оптимизации.

Естественно, наибольший интерес для нас представляет то, в какой степени наш алгоритм «на практике» будет приближен к оптимальному. В качестве альтернативы анализу погрешности алгоритмов «в худшем случае» можно было бы попытаться оценить погрешность «в среднем». Изучение поведения алгоритмов «в среднем» чаще всего сводится к формированию типовых индивидуальных задач и проверке нескольких алгоритмов на этих задачах с последующим сравнением результатов.

Раздел 3
УПРАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

ГЛАВА 10
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

10.1. ПОНЯТИЕ И ФОРМЫ ФИНАНСОВЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Важным условием развития предприятия в соответствии с избранной экономической и финансовой стратегией является его *высокая инвестиционная активность*. Экономический рост и инвестиционная активность — это взаимообусловленные процессы, поэтому предприятие должно уделять постоянное внимание вопросам управления инвестициями.

Инвестициями считаются денежные средства, ценные бумаги, иное имущество (в том числе имущественные права, а также иные права, имеющие денежную оценку), вкладываемые в объекты предпринимательской деятельности в целях получения прибыли или иного полезного эффекта. Инвестиции предприятия представляют собой вложения капитала во всех его формах в целях обеспечения его роста в предстоящем периоде, получения текущего дохода или решения определенных социальных задач.

По объектам вложения капитала разделяют реальные и финансовые инвестиции предприятия:

- ***реальные инвестиции*** характеризуют вложения капитала в воспроизводство основных средств, в инновационные нематериальные активы, в прирост запасов товарно-материальных ценностей и другие объекты инвестирования, связанные с осуществлением операционной деятельности предприятия или улучшением условий труда и быта персонала;
- ***финансовые инвестиции*** характеризуют вложения капитала в различные финансовые инструменты, главным образом в ценные бумаги, в целях получения дохода.

Финансовые инвестиции рассматриваются как активная форма эффективного использования временно свободного капитала или как инструмент для достижения стратегических целей, связанных с диверсификацией операционной деятельности предприятия.

Основные формы финансового инвестирования, осуществляемого предприятием:

1. *Вложение капитала в уставные фонды совместных предприятий.* Эта форма финансового инвестирования наиболее тесно связана с операционной деятельностью предприятия. Она обеспечивает:

- упрочение стратегических хозяйственных связей с поставщиками сырья и материалов (при участии в их уставном капитале);
- развитие своей производственной инфраструктуры (при вложении капитала в транспортные и другие аналогичные предприятия);
- расширение возможностей сбыта продукции или проникновения на другие региональные рынки (путем вложения капитала в уставные фонды предприятий торговли);
- различные формы отраслевой и товарной диверсификации операционной деятельности и другие стратегические направления развития предприятия.

По своему содержанию эта форма финансового инвестирования во многом подменяет реальное инвестирование, являясь при этом менее капиталоемкой и более оперативной. Приоритетной целью этой формы инвестирования является не столько получение высокой инвестиционной прибыли (хотя минимально необходимый ее уровень должен быть обеспечен), сколько установление форм финансового влияния на предприятия для обеспечения стабильного формирования своей операционной прибыли.

2. *Вложение капитала в доходные виды денежных инструментов.* Эта форма финансового инвестирования направлена прежде всего на эффективное использование временно свободных денежных активов предприятия. Основной вид денежных инструментов инвестирования — депозитный вклад в коммерческих банках. Как правило, эта форма используется для краткосрочного инвестирования капитала, и ее главная цель — генерирование инвестиционной прибыли.

3. *Вложение капитала в доходные виды фондовых инструментов.* Это наиболее массовая и перспективная форма финансовых инве-

стиций. Она характеризуется вложением капитала в различные виды ценных бумаг.

Использование этой формы финансового инвестирования предполагает:

- широкий выбор альтернативных инвестиционных решений как по инструментам инвестирования, так и по его срокам;
- более высокий уровень государственного регулирования и защищенности инвестиций;
- развитую инфраструктуру фондового рынка;
- наличие оперативно предоставляемой информации о состоянии и конъюнктуре фондового рынка в разрезе отдельных его сегментов и др.

Основной ц е л ь ю этой формы финансового инвестирования также является генерирование инвестиционной прибыли, хотя в отдельных случаях она может быть использована для установления форм финансового влияния на отдельные компании при решении стратегических задач (путем приобретения контрольного или достаточного весомого пакета акций).

10.2. ИНВЕСТИЦИОННЫЙ ПОРТФЕЛЬ: ПОНЯТИЕ, ТИПЫ И ЦЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ

Инвестиционный портфель — целенаправленно сформированная совокупность объектов реального и финансового инвестирования, предназначенная для реализации инвестиционной политики предприятия в предстоящем периоде (в более узком, но наиболее часто употребляемом значении — совокупность фондовых инструментов, сформированных инвестором) [77].

Г л а в н а я ц е л ь при формировании инвестиционного портфеля — обеспечить реализацию основных направлений инвестиционной деятельности предприятия путем подбора наиболее доходных и безопасных объектов инвестирования. С учетом главной цели строится система конкретных л о к а л ь н ы х ц е л е й, основными из которых являются:

- высокие темпы роста капитала в предстоящей долгосрочной перспективе;
- высокий уровень дохода в текущем периоде;
- минимизация инвестиционных рисков;
- достаточная ликвидность инвестиционного портфеля [77].

Перечисленные конкретные цели формирования инвестиционного портфеля во многом альтернативны. Так, обеспечение высоких темпов роста капитала в долгосрочной перспективе в определенной степени достигается за счет снижения уровня текущей доходности инвестиционного портфеля, и наоборот. Темпы роста капитала и уровень текущей доходности инвестиционного портфеля находятся в прямой зависимости от уровня инвестиционных рисков. Обеспечение достаточной ликвидности может препятствовать включению в портфель инвестиционных проектов, направленных на получение высокого прироста капитала в долгосрочном периоде. Учитывая альтернативность целей формирования инвестиционного портфеля, каждый инвестор сам расставляет их приоритеты.

Альтернативность целей формирования инвестиционного портфеля определяет различия политики финансового инвестирования предприятия, которая, в свою очередь, предопределяет конкретный тип формируемого инвестиционного портфеля.

По целям формирования инвестиционного дохода различают **два основных типа инвестиционного портфеля** — портфель дохода и портфель роста.

Портфель дохода сформирован по критерию максимизации уровня инвестиционной прибыли в текущем периоде вне зависимости от темпов прироста инвестируемого капитала в долгосрочной перспективе. Иными словами, этот портфель ориентирован на *высокую текущую отдачу инвестиционных затрат*, невзирая на то, что в будущем периоде эти затраты могли бы обеспечить получение более высокой нормы инвестиционной прибыли на вложенный капитал.

Портфель роста сформирован по критерию максимизации темпов прироста инвестируемого капитала в предстоящей долгосрочной перспективе вне зависимости от уровня инвестиционной прибыли в текущем периоде. Иными словами, этот портфель ориентирован на *обеспечение высоких темпов роста рыночной стоимости предприятия* (за счет прироста капитала в процессе финансового инвестирования). Так как норма прибыли при долгосрочном финансовом инвестировании всегда выше, чем при краткосрочном, формирование такого инвестиционного портфеля могут позволить себе лишь достаточно устойчивые в финансовом отношении предприятия.

По отношению к инвестиционным рискам различают **три основных типа инвестиционного портфеля**: агрессивный (спекулятивный), умеренный (компромиссный) и консервативный. Такая типизация портфелей основана на дифференциации уровня инвестиционного риска (а соответственно, и уровня инвестиционной прибыли), на который согласен идти конкретный инвестор в процессе финансового инвестирования.

Агрессивный (спекулятивный) портфель сформирован по критерию максимизации текущего дохода или прироста инвестированного капитала вне зависимости от сопутствующего ему уровня инвестиционного риска. Он позволяет получить *максимальную норму инвестиционной прибыли на вложенный капитал*, однако этому сопутствует *наивысший уровень инвестиционного риска*, при котором инвестированный капитал может быть потерян полностью или в значительной доле.

Умеренный (компромиссный) портфель сформирован как совокупность финансовых инструментов инвестирования, по которой *общий уровень портфельного риска приближен к среднерыночному*. Естественно, что по такому инвестиционному портфелю и *норма инвестиционной прибыли на вложенный капитал будет также приближена к среднерыночной*.

Консервативный портфель сформирован по критерию минимизации уровня инвестиционного риска. Такой портфель, формируемый наиболее осторожными инвесторами, практически исключает использование финансовых инструментов, уровень инвестиционного риска по которым превышает среднерыночный. Консервативный инвестиционный портфель обеспечивает *наиболее высокий уровень безопасности финансового инвестирования*.

Исходя из основных типов инвестиционных портфелей формируются различные их варианты, которые используются при реализации политики финансового инвестирования предприятия.

Существуют, например, такие варианты инвестиционных портфелей:

- агрессивный портфель дохода;
- агрессивный портфель роста;
- умеренный портфель дохода;
- умеренный портфель роста;
- консервативный портфель дохода;
- консервативный портфель роста.

Диапазон типов инвестиционных портфелей может быть расширен за счет их вариантов, имеющих «промежуточное значение» целей финансового инвестирования.

После того как определены цели финансового инвестирования и тип инвестиционного портфеля, реализующего избранную политику, можно перейти к непосредственному формированию инвестиционного портфеля путем включения в него соответствующих финансовых инструментов [1].

10.3. ЭТАПЫ И ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

При формировании инвестиционного портфеля следует руководствоваться следующими соображениями:

- безопасность вложений (неуязвимость инвестиций от потрясений на рынке инвестиционного капитала);
- стабильность получения дохода;
- ликвидность вложений, т.е. их способность участвовать в немедленном приобретении товара (работ, услуг) или быстро и без потерь в цене превращаться в наличные деньги.

Ни одна из инвестиционных ценностей не обладает всеми перечисленными свойствами. Поэтому неизбежен компромисс. Если ценная бумага надежна, то доходность будет низкой, так как те, кто предпочитают надежность, будут предлагать высокую цену и собьют доходность. Главная цель при формировании портфеля — достичь *оптимального сочетания между риском и доходом* для инвестора. Иными словами, соответствующий набор инвестиционных инструментов призван снизить риск вкладчика и одновременно увеличить его доход до максимума.

Успех инвестиций зависит в основном от правильного распределения средств по типам активов: на 94% он определяется выбором типа используемых инвестиционных инструментов (акции крупных компаний, краткосрочные казначейские векселя, долгосрочные облигации и др.); на 4% — выбором конкретных ценных бумаг заданного типа; на 2% — оценкой момента закупки ценных бумаг. Это объясняется тем, что бумаги одного типа сильно коррелируют, т.е. если какая-то отрасль испытывает спад, то убыток инвестора не очень зависит от того, бумаги какой компании преобладают в его портфеле.

Риск инвестиций в определенный тип ценных бумаг определяется вероятностью отклонения прибыли от ожидаемого значения. Прогнозируемое значение прибыли можно определить на основе обработки статистических данных о динамике прибыли от инвестиций в эти бумаги в прошлом, а риск — как среднеквадратичное отклонение от ожидаемой прибыли (или как ее дисперсия).

Общую доходность и риск инвестиционного портфеля можно менять, изменяя его структуру. Существуют различные программы, позволяющие конструировать желаемую пропорцию активов различных типов, например минимизирующую риск при заданном уровне ожидаемой прибыли или максимизирующую прибыль при заданном уровне риска.

Оценки, используемые при составлении инвестиционного портфеля, носят вероятностный характер. Конструирование портфеля в соответствии с требованиями классической теории возможно лишь при наличии ряда факторов: сформировавшегося рынка ценных бумаг, определенного периода его функционирования, статистики рынка и др.

Формирование инвестиционного портфеля осуществляется в несколько этапов:

1) формулирование целей его создания и определение их приоритетности (в частности, что важнее — регулярное получение дивидендов или рост стоимости активов), задание уровней риска, минимальной прибыли, отклонения от ожидаемой прибыли и т.п.;
2) выбор финансовой компании (это может быть отечественная или зарубежная фирма; при принятии решения можно использовать ряд критериев: репутация фирмы, ее доступность, виды предлагаемых фирмой портфелей, их доходность, виды используемых инвестиционных инструментов и т.п.);
3) выбор банка, который будет вести инвестиционный счет.

Основной вопрос при ведении портфеля — как определить пропорции между ценными бумагами с различными свойствами. Так, **основными принципами построения классического консервативного (малорискового) портфеля** являются:

- принцип консервативности;
- принцип диверсификации;
- принцип достаточной ликвидности.

Принцип консервативности. Соотношение между высоконадежными и рискованными долями поддерживается таким, чтобы *возможные потери от рискованной доли с подавляющей вероятностью покрывались доходами от надежных активов*. Инвестиционный риск, таким образом, состоит не в потере части основной суммы, а только в получении недостаточно высокого дохода.

Естественно, не рискуя, нельзя рассчитывать и на какие-то сверхвысокие доходы. Однако практика показывает, что подавляющее большинство клиентов удовлетворены доходами, колеблющимися в пределах от одной до двух депозитных ставок банков высшей категории надежности, и не желают увеличения доходов за счет более высокой степени риска.

Принцип диверсификации. Диверсификация вложений — основной принцип портфельного инвестирования. Идея диверсификации хорошо проявляется в старинной английской поговорке: do not put all eggs in one basket — «не кладите все яйца в одну корзину». В нашем случае это означает — не вкладывайте все деньги в одни бумаги, каким бы выгодным это вложение вам ни казалось. Только такая сдержанность позволит избежать катастрофических ущербов в случае ошибки.

Диверсификация уменьшает риск за счет того, что *возможные невысокие доходы по одним ценным бумагам будут компенсироваться высокими доходами по другим бумагам*. Минимизация риска достигается за счет включения в портфель ценных бумаг широкого круга отраслей, не связанных тесно между собой, чтобы избежать синхронности циклических колебаний их деловой активности. Оптимальная величина — от 8 до 20 различных видов ценных бумаг.

Распыление вложений происходит как между теми активными сегментами, о которых мы упоминали, так и внутри них. Для государственных краткосрочных облигаций и казначейских обязательств речь идет о диверсификации между ценными бумагами различных серий, для корпоративных ценных бумаг — между акциями различных эмитентов.

Упрощенная диверсификация состоит просто в делении средств между несколькими ценными бумагами без серьезного анализа.

Достаточный объем средств в портфеле позволяет сделать следующий шаг — проводить так называемые *отраслевую* и *региональную диверсификации*.

Принцип отраслевой диверсификации состоит в том, чтобы не допускать деформации портфеля в сторону бумаг предприятий одной отрасли. Дело в том, что катаклизм может постигнуть отрасль в целом. Например, падение цен на нефть на мировом рынке может привести к одновременному падению цен акций всех нефтеперерабатывающих предприятий; и то, что ваши вложения будут распределены между различными предприятиями этой отрасли, вам не поможет.

То же самое относится к предприятиям одного региона. Одновременное снижение цен акций может произойти вследствие политической нестабильности, забастовок, стихийных бедствий, введения в строй новых транспортных магистралей, минующих регион, и т.п.

Еще более глубокий анализ возможен с применением серьезного математического аппарата. Статистические исследования показывают, что многие акции растут или падают в цене, как правило, одновременно, хотя таких видимых связей между ними, как принадлежность к одной отрасли или региону, и нет. Изменения цен других пар ценных бумаг, наоборот, идут в противофазе. Естественно, диверсификация между второй парой бумаг значительно более предпочтительна. Методы корреляционного анализа позволяют, используя эту идею, найти оптимальный баланс между различными ценными бумагами в портфеле.

Принцип достаточной ликвидности. Он состоит в том, чтобы *поддерживать долю быстрореализуемых активов в портфеле не ниже уровня, достаточного для проведения неожиданно подворачивающихся высокодоходных сделок и удовлетворения потребностей клиентов в денежных средствах*. Практика показывает, что выгоднее держать определенную часть средств в более ликвидных (пусть даже менее доходных) ценных бумагах, зато иметь возможность быстро реагировать на изменения конъюнктуры рынка и отдельные выгодные предложения. Кроме того, договоры со многими клиентами обязывают держать часть их средств в ликвидной форме.

Доходы по портфельным инвестициям представляют собой валовую прибыль по всей совокупности бумаг, включенных в тот или иной портфель, с учетом риска. Возникает проблема количественного соответствия между прибылью и риском, которая должна решаться оперативно в целях постоянного совершенствования структуры уже сформированных портфелей и формирования новых в соответствии с пожеланиями инвесторов. Надо сказать, что указанная проблема относится к числу тех, для решения которых достаточно быстро удается найти общую схему решения, но которые практически не решаются до конца.

Рассматривая вопрос о создании эффективного портфеля, инвестор должен:

- выбрать оптимальный тип портфеля;
- оценить приемлемое для себя сочетание риска и дохода портфеля и, соответственно, определить удельный вес портфеля ценных бумаг с различными уровнями риска и дохода;
- определить первоначальный состав портфеля;
- выбрать схему дальнейшего управления портфелем.

10.4. ТЕОРИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Начальный этап развития теории инвестиций относится к 20—30-м годам XX столетия и является периодом зарождения теории портфельных финансов. Этот этап представлен основополагающими работами И. Фишера по теории процентной ставки и приведенной стоимости. Он доказал, что критерии оценки инвестиций никак не связаны с тем, предпочитают ли индивидуумы настоящее потребление потреблению в будущем. Это значит, что инвесторы пользуются одними и теми же инвестиционными критериями и поэтому могут скооперироваться и передать функции управления инвестициями профессиональному менеджеру. Менеджерам не обязательно знать личные вкусы акционеров, их задача — максимизировать чистую приведенную стоимость, чтобы наилучшим образом обеспечить интересы своих клиентов.

Важная особенность работ довоенного периода состоит в использовании гипотезы о полной определенности условий в процессе принятия финансовых решений. Математические средства, применяемые в анализе того времени, сводились к элементарной алгебре и началам фундаментального анализа. Совокупность этих средств, ориентированных на проведение финансовых расчетов в условиях определенности, получила название финансовой математики. Несмотря на детерминированный подход, важность факторов неопределенности и риска в финансовых проблемах сознавалась вполне четко.

Началом современной теории инвестиций считают 1952 г., когда появилась статья Г. Марковица под названием «Выбор портфеля». В этой статье впервые была предложена математическая модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг и методы построения таких портфелей при определенных условиях на основе теоретико-вероятностной формализации понятия доходности и риска. Лишь применение вероятностных методов позволило существенно продвинуться в исследовании влияния риска на принятие инвестиционных решений. Именно работы этого направления и получили название «современная теория инвестиций». Таким образом, понятие риска и его измерение являются основой современной теории инвестиций.

Риск и его измерение

Доминирующее определение риска как *дисперсии* или *стандартного (среднеквадратичного) отклонения доходности* связано с тем, что наиболее простой оценкой значения случайной величины — доходности — является ее точечная оценка в виде математического ожидания, а дисперсия есть интегральная точечная характеристика вариабельности доходности относительно ее математического ожидания. В теории вероятностей и математической статистике выработаны достаточно простые правила операций с точечными оценками и процедуры определения статистической значимости оценок, что упрощает использование моделей и методов оптимизации портфеля. Это немаловажный факт в объяснении доминирующей роли точечных оценок вариации. Следует отметить, что в 50-х годах прошлого столетия работы Марковица не привлекли особого внимания экономистов, поскольку алгоритмы расчетов оказались сложными для вычислительных машин того времени. Фактическая реализация его идей была осуществлена гораздо позднее, а Нобелевская премия по экономике была присуждена ему только в 1990 г.

В то же время адекватность такого измерителя риска, как дисперсия, зачастую подвергается сомнению. В теории и на практике можно встретить использование других измерителей риска. Недостатки дисперсии как модели риска обсуждаются, например, в [4] и [6]. Перечислим основные из них:

- дисперсия характеризует все отклонения доходности от своего математического ожидания, в то время как с термином «риск» в сознании инвестора ассоциируются только неблагоприятные для него отклонения;
- дисперсия не раскрывает распределение (структуру) отклонений, в результате одна ценная бумага с преобладанием положительных отклонений доходности может иметь такую же дисперсию, как другая ценная бумага с преобладанием отрицательных отклонений доходности; следовательно, от инвестора будет скрыт больший риск потерь при покупке второй из них.

Главное отличие альтернативных измерителей риска становится ясно очерченным, если поставить вопрос так: «Риск чего?» В случае применения дисперсии в качестве измерителя ответ будет такой: *риск отклонения доходности вообще*; при применении других измерителей ответ будет более конкретным: *риск недополучения дохода, риск убытков, риск банкротства* и др. Однако в этом случае ценная бумага должна характеризоваться целым рядом показателей риска, относящихся к каждому конкретному неблагоприятному событию, т.е. теряется свойство интегральности показателя.

В работе [4] приводятся следующие альтернативные измерители риска:

- полудисперсия (для симметричных распределений отклонений от математического ожидания доходности);
- вероятность получения дохода меньше ожидаемого;
- средняя величина отрицательных отклонений доходности.

Несмотря на отмеченные недостатки, дисперсия в качестве измерителя риска фондового актива показала свою эффективность в большинстве практических задач, а простота и интегральность этого показателя выгодно отличают его от альтернативных измерителей риска. Эти обстоятельства и обусловили преимущественное его применение.

Модель Марковица

Теоретические построения Марковица основаны на ряде предположений, часть из которых относится к *условиям принятия инвестиционных решений* (т.е. к свойствам фондового рынка), а часть — к *поведению инвестора*.

Важнейшими предположениями при анализе фондового рынка с использованием теории Марковица являются следующие:

1. Рынок состоит из конечного числа бесконечно делимых ликвидных активов, доходности которых для заданного периода считаются случайными величинами (т.е. все активы — рисковые).

2. Существуют открытые и достоверные исторические данные о доходности активов, позволяющие инвестору получить оценку ожидаемых (средних) значений доходностей и их попарных ковариаций.

3. Инвестор при совершении операций с фондовыми активами свободен от трансакционных издержек и налогов.

4. Инвестор может формировать любые допустимые (для данной модели) портфели, доходности которых являются также случайными величинами.

Относительно *поведения инвестора* выдвигаются две гипотезы — гипотеза ненасыщаемости и гипотеза несклонности к риску. Эти гипотезы означают соответственно следующее:

5. Инвестор всегда предпочитает более высокий уровень благосостояния, т.е. при одинаковых прочих условиях всегда выбирает актив (портфель активов) с большей доходностью.

6. Инвестор из двух активов с одинаковой доходностью обязательно предпочтет актив с меньшим риском.

Иными словами, инвестор соответствует модели рационального потребителя неоклассической теории полезности и может характеризоваться бесконечной совокупностью *кривых безразличия* в координатах «риск – доходность» (σ, r), при этом любая кривая безразличия соответствует определенному уровню предпочтения (и поэтому не пересекается с другими) и является выпуклой вниз. Выпуклость вниз как раз и отражает несклонность к риску: за каждую единицу возрастания риска инвестор требует опережающего роста доходности (премии за риск). Считается, что адекватным описанием предпочтения инвестора является предложенная М. Рубинштейном [12] *функция полезности* вида

$$U = \psi r - \sigma^2,$$

где ψ — индивидуальный для каждого инвестора параметр предпочтения между риском и доходностью.

На рис. 10.1 представлены по две кривые безразличия двух инвесторов: по степени выпуклости кривых можно сказать, что первый из них более склонен к избеганию риска, чем второй. Кривая, лежащая выше и левее, соответствует большей величине полезности множества равнозначных портфелей, представленных этой кривой.

Пусть инвестором отобраны n ценных бумаг, в которые он хочет вложить имеющийся у него капитал фиксированной величины. Этому капиталу на плоскости (σ, r) будет соответствовать множе-

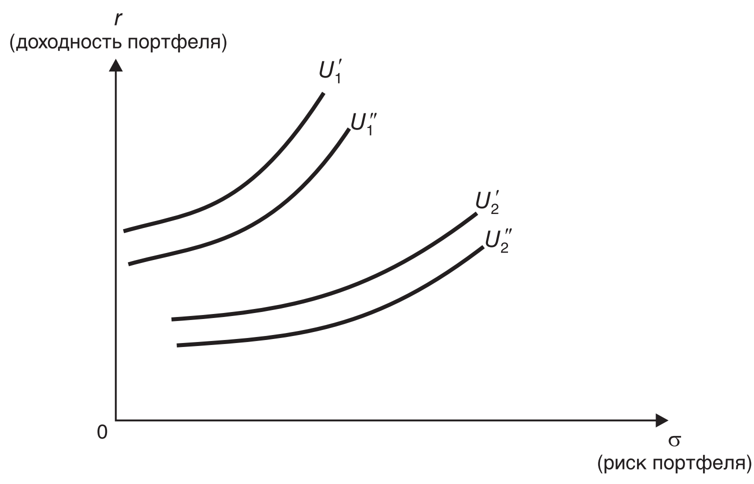

Рис. 10.1. Кривые безразличия не склонных к риску инвесторов

ство портфелей, составленных из n ценных бумаг в виде характерного «зонтика» (рис. 10.2). Однако для рационального инвестора выбор ограничен только *линией эффективного фронта*, точки которого в соответствии с гипотезами о ненасыщаемости и несклонности к риску лежат на северо-западной границе допустимого множества портфелей. Графическим решением задачи оптимального размещения капитала является нахождение *точки касания эффективного фронта с самой удаленной влево и вверх кривой безразличия инвестора*. Эта точка и представляет сочетание риска и доходности оптимального портфеля в соответствии с индивидуальным предпочтением инвестора, как показано на рис. 10.2.

Однако графическое решение полезно только для понимания экономического содержания и не может на практике заменить математического решения.

Принимая, что величина капитала инвестора равна единице и распределена между n ценными бумагами портфеля, по известным правилам теории вероятностей можно выразить математическое ожидание r_p доходности портфеля и его дисперсию σ_p^2:

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i, \tag{10.1}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j K_{ij}, \tag{10.2}$$

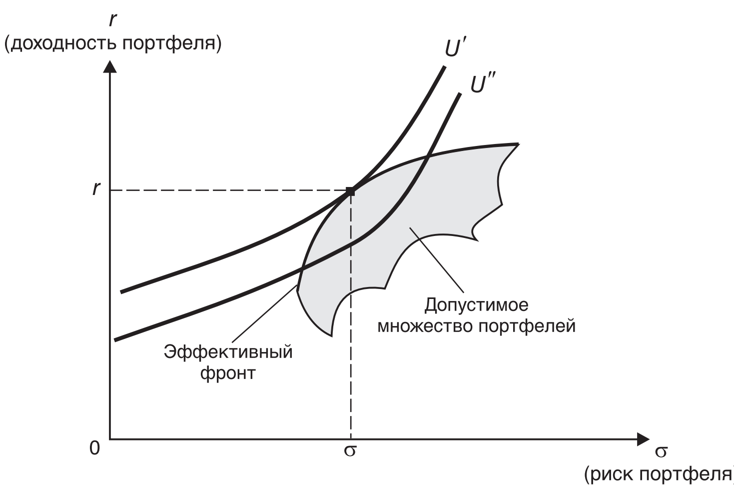

Рис. 10.2. Графическое решение задачи оптимизации портфеля

где x_i — доля капитала, вложенного в i-ю ценную бумагу;

r_i — математическое ожидание доходности i-й ценной бумаги;

K_{ij} — ковариация между доходностями ценных бумаг i и j.

Инвестор преследует противоречивую цель, стремясь одновременно достичь и наибольшей доходности, и наименьшего риска. Поскольку функция отношения инвестора к риску не всегда поддается адекватному числовому измерению, Марковиц не ставил задачу максимизации целевой функции, отражающей эффективность портфеля. Вместо этого он решал задачу минимизации риска портфеля при обеспечении заданного уровня его доходности (тем самым предполагая, что уровень «притязаний» инвестора косвенно отражает его соответствующую готовность рисковать). При этом важным предварительным результатом Марковица было доказательство выпуклости эффективного фронта, что обеспечивает единственность решения оптимизационной задачи.

Математически **задача Марковица** формулируется следующим образом: найти вектор распределения капитала по n ценным бумагам $\bar{X}^{\mathrm{T}} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, который минимизирует квадратичную форму (10.2) при выполнении ограничений

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{10.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = r_p. \tag{10.4}$$

Эта задача при наличии только *ограничений-равенств* относится к классу классических задач квадратичной оптимизации — одному из наиболее изученных классов оптимизационных задач, для которых разработано большое число достаточно эффективных алгоритмов. В частности, может быть применен классический метод неопределенных множителей Лагранжа, который гарантированно приводит к нахождению глобального минимума ввиду выпуклости квадратичной формы (10.2). При этом, однако, допускаются отрицательные значения x_i, что на практике означает допустимость для всех инвесторов продаж ценных бумаг на срок без покрытия (short sales). Такое предположение не всегда допустимо.

Однако наложение дополнительных *ограничений-неравенств*, например

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{10.5}$$

существенно усложняет нахождение решения и, кроме того, не позволяет строить эффективный фронт ввиду большого объема расчетов. Предложенное Марковицем решение основано на введенном им понятии угловых портфелей.

Для описания эффективного фронта используется вспомогательная прямая — касательная к эффективному фронту. Изменяя наклон этой касательной от минимального до максимального значения, можно получить описание всего эффективного фронта как совокупности точек касания. Итак, на плоскости (σ^2, r) строится семейство прямых (рис. 10.3), описываемых следующим уравнением при различных a:

$$-\lambda r_p + \sigma_p^2 = a, \tag{10.6}$$

где $\lambda \geq 0$ — некоторое число.

Нетрудно выяснить смысл числа λ. Выразив r_p из уравнения (10.6), получим

$$\frac{d r_p}{d\left(\sigma_p^2\right)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, величина $1/\lambda$ есть тангенс угла наклона семейства прямых к оси σ_p^2 и, следовательно, отражает предпочтение «риск – доходность» инвестора, выбравшего на эффективном фронте точку, касательную с данной прямой, в качестве оптимального портфеля.

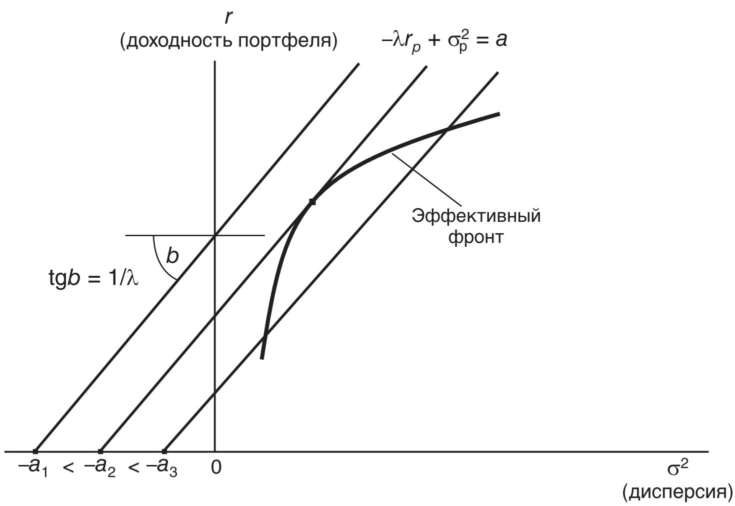

Рис. 10.3. Касательные к эффективному фронту

При увеличении λ прямая (10.6) приближается к эффективному фронту и при каком-то значении (минимальном) касается его. Подставив в (10.6) вместо r_p и σ_p^2 соответственно (10.1) и (10.2), после решения задачи

$$\min_X a = \min_X \left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i r_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j K_{ij} \right) \qquad (10.7)$$

можно получить вектор решений как функций от λ: $X^{\text{т}}(\lambda) = (x_i(\lambda))$. При изменении λ от 0 до $+\infty$ векторы решений опишут все точки касания, т.е. весь эффективный фронт.

Как видно из (10.7), точка $X(0)$ определяет эффективный портфель с минимальным риском, а $X(+\infty)$ — портфель с максимально возможной доходностью и минимальным риском.

Марковиц доказал, что функции $x_i(\lambda)$ являются непрерывными кусочно-линейными, т.е. при изменении λ от 0 до $+\infty$ их производные по λ могут терпеть разрыв. Те значения λ, в которых это происходит хотя бы для одной из $x_i(\lambda)$, были названы ***угловыми***, а соответствующие им портфели — ***угловыми портфелями***. Марковиц установил **свойство угловых портфелей**: участок эффективного фронта между смежными угловыми портфелями описывается линейной комбинацией этих портфелей. Иначе говоря, если λ_1 и λ_2 — смежные угловые точки, то для любого λ: $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ векторы, вычисляемые как

$$\bar{X}(\lambda) = \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1} \bar{X}(\lambda_1) + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \bar{X}(\lambda_2), \qquad (10.8)$$

определяют участок эффективного фронта. При отсутствии ограничений-неравенств функции $x_i(\lambda)$ — линейные, точка $\lambda = 0$ является угловой по определению.

Метод нахождения угловых портфелей, названный Марковицем *методом критических линий*, с последующим нахождением как оптимального портфеля, так и эффективного фронта широко используется и в настоящее время.

Из рассмотрения задачи Марковица видно ее преимущественно микроэкономическое содержание, поскольку возможные последствия решений инвестора для состояния рынка не рассматриваются, внимание акцентировано на поведении отдельного инвестора, формирующего оптимальный портфель из рисковых активов на основе собственных оценок их доходности и риска.

Развитие теории Марковица в трудах Тобина

Влияние теории Марковица значительно усилилось после появления в конце 1950-х годов работ Тобина по аналогичной тематике, но имеющих другой подход. В работах Тобина основной темой становится анализ факторов, побуждающих инвесторов формировать портфели активов вместо того, чтобы держать капитал в какой-то одной форме (например, налично-денежной). Поэтому Тобин включил в анализ безрисковые активы и главной задачей и в теории, и на практике считал оптимальное распределение капитала между безрисковыми и рисковыми вложениями.

Если инвестор распределил капитал между безрисковыми и рисковыми активами в пропорциях: x_0 — в безрисковые, $x_1 = (1 - x_0)$ — в рисковые, то ожидаемая доходность его капитала (портфеля)

$$r_p = x_0 r_0 + (1 - x_0) r_1 = r_1 + x_0 (r_0 - r_1), \tag{10.9}$$

где r_0 — доходность безрисковой части портфеля;

r_1 — ожидаемая доходность рисковой части портфеля.

Риск такого портфеля определяется только его рисковой частью:

$$\sigma_p^2 = (1 - x_0)^2 \sigma_1^2, \tag{10.10}$$

где σ_1^2 — дисперсия доходности рисковой части портфеля.

Используя (10.9) и (10.10), после исключения x_0 получаем

$$r_p - r_0 = \frac{r_1 - r_0}{\sigma_1} \sigma_p. \tag{10.11}$$

Формула (10.11) показывает линейную зависимость доходности портфеля сверх гарантированного значения и риска портфеля.

Поведение инвестора, формирующего оптимальный портфель из рисковой и безрисковой частей, удобно представить графически на плоскости (σ, r) (рис. 10.4).

Если инвестору даны только один рисковый и один безрисковый актив, то все варианты распределения капитала в соответствии с (10.11) отображаются отрезком прямой линии (см. рис. 10.4). Точка $(0, r_0)$ соответствует вложению всего капитала в безрисковый актив при $x_0 = 1$, точка (σ_1, r_1) — вложению только в рисковый актив при $x_0 = 0$. Все промежуточные варианты соответствуют внутренним точкам отрезка, а возможность заимствования средств (по безрисковой ставке) с их вложением в рисковый актив соответствует продолжению прямой вправо при $x_0 < 0$.

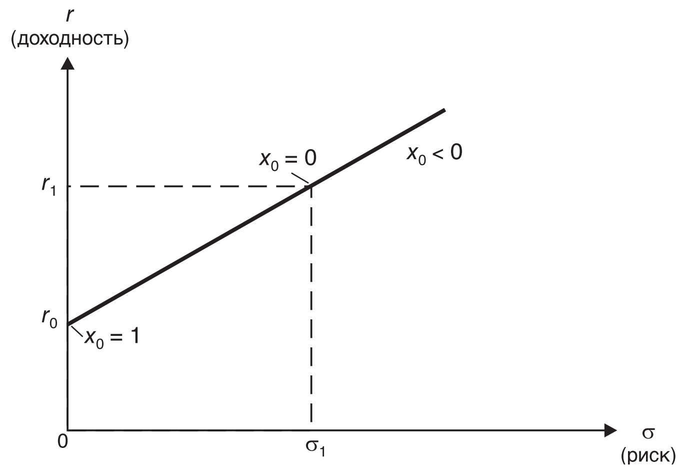

Рис. 10.4. Зависимость «риск – доходность» портфеля из одного рискового и одного безрискового актива

Характер зависимости не изменится, если считать, что рисковым активом является какой-то портфель рисковых ценных бумаг. На рис. 10.5 представлен эффективный фронт некоторой совокупности рисковых ценных бумаг, из точек которого инвестор выбирает оптимальный портфель в соответствии со своей склонностью к риску и без учета возможности безрискового инвестирования.

Рассмотрим две точки *A* и *C* на этом эффективном фронте по Марковицу, но с учетом возможности безрискового вложения. Пусть оптимальному портфелю инвестора, составленному только из рисковых активов, соответствует точка *A*. Перераспределение средств в пользу безрискового актива, но с сохранением структуры рисковой части вызовет, как и ранее, перемещение местоположения портфеля влево по отрезку *AR*. Однако очевидно, что ни сама точка *A*, ни отрезок *AR* не представляют более эффективные портфели, поскольку можно составить портфель с тем же уровнем риска, но более доходный, используя комбинацию безрискового актива и рисковой части, имеющей структуру портфеля *C* (на рис. 10.5 портфель A' предпочтительнее *A*, поскольку $r' > r$ при одинаковом σ).

Сказанное относится ко всем портфелям, представленным на эффективном фронте по Марковицу ниже и левее точки *C*. Таким образом, эта часть эффективного фронта заменяется отрезком *RC*. При возможности заимствования инвестор по тем же причинам предпочтет продолжение отрезка *RC* вправо от точки *C*. В резуль-

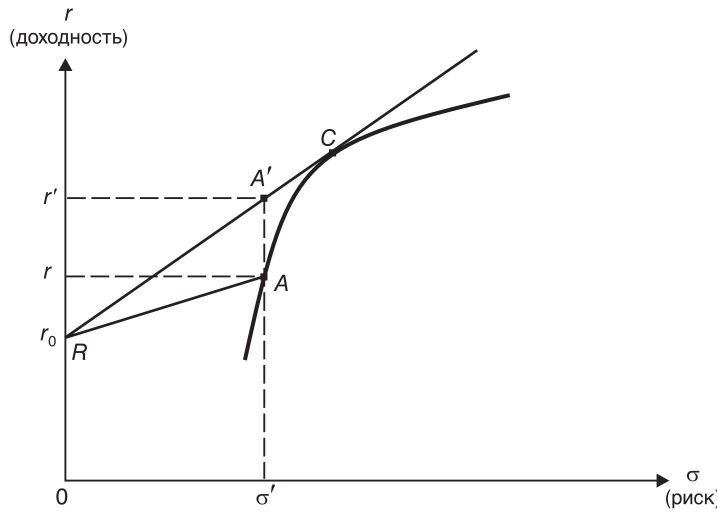

Рис. 10.5. Изменение эффективного фронта при добавлении безрискового актива

тате эффективный фронт будет представлен прямой, включающей единственную точку *C* из эффективного фронта Марковица.

Точка *C* представляет так называемый ***касательный портфель*** и имеет очень важное значение в построениях Тобина. Во-первых, это точка касания эффективного фронта Марковица с прямой, проведенной из точки безрисковой доходности *R*. Во-вторых, эта касательная имеет самый большой угол наклона к оси абсцисс среди всех прямых, проведенных из точки *R* к эффективному фронту Марковица. Последнее на содержательном уровне интерпретируется так: инвесторы, более «осторожные», чем выбравшие точку *C* в качестве оптимальной по Марковицу, будут формировать свой оптимальный портфель из безрискового актива и рисковой части, причем структура рисковой составляющей будет аналогична структуре касательного портфеля. Это положение существенно отличается от вывода Марковица, поскольку инвесторы с разной склонностью к риску (в указанных пределах) формируют рисковую часть портфеля одинаково по структуре. Тогда инвестор при составлении оптимального портфеля будет действовать в два этапа:

1. Нахождение структуры касательного портфеля.
2. Распределение капитала между касательным портфелем и безрисковым активом в соответствии с индивидуальной склонностью к риску.

Возможность раздельного решения задач оптимизации рисковой части портфеля и портфеля в целом известна как **теорема о разделении**.

К тем же выводам приводит и формальное математическое решение задачи Тобина (см., например, [5], где рассмотрены случаи с привлечением займов и без них). Кроме классических формальных методов решения задачи Тобина существуют «специализированные», основанные на использовании теоремы о разделении, т.е. на первоначальном нахождении касательного портфеля. Например, можно применить уже упоминавшийся метод критических линий или описанный в [4] метод EGP, названный по именам своих создателей — Элтона, Грубера и Падберга (метод использует следующее свойство: касательный портфель имеет максимальный угол наклона прямой, соединяющей соответствующую ему точку с точкой безрисковой доходности).

Макроэкономическое значение результатов Тобина состоит в моделировании спроса на деньги при изменении доходности рисковых активов.

Хотя предположение Тобина о возможности чисто безрисковых вложений на практике строго невыполнимо, решение задачи Тобина с использованием слаборисковых активов оказывается близким к расчетному и поэтому имеет практическое значение [5].

Модель CAPM и ее обобщение

В самом начале 60-х годов XX века У. Шарп, ученик Марковица, предложил так называемую **однофакторную модель рынка капиталов**, в которой впервые появились ставшие затем знаменитыми «альфа»- и «бета»-характеристики акций. На основе однофакторной модели Шарп впоследствии предложил упрощенный метод выбора оптимального портфеля, который сводил задачу квадратичной оптимизации к линейной. В простейших случаях, для небольших размерностей, эта задача могла быть решена практически «вручную». Такое упрощение сделало методы портфельной оптимизации применимыми на практике. К 1970-м годам развитие программирования, а также совершенствование статистической техники оценивания показателей «альфа» и «бета» отдельных ценных бумаг и индекса доходности рынка в целом привели к появлению первых пакетов программ для решения задач управления портфелем ценных бумаг.

Первоначально Шарп преследовал цель упростить получение исходных данных (прежде всего ковариаций между доходностями ценных бумаг), необходимых для решения задачи оптимизации портфеля по Марковицу. Для этого была использована однофакторная модель зависимости доходности долгосрочной рисковой ценной бумаги от такого фактора, как средневзвешенная по капитализации фондовых активов доходность рынка:

$$\bar{r}_M = \sum_{i=1}^{N} q_i r_i \bigg/ \sum_{i=1}^{N} q_i ,$$

где N — общее число обращающихся на рынке ценных бумаг;

q_i, r_i — соответственно доля в общей капитализации рынка и доходность i-й ценной бумаги.

Однофакторная модель доходности i-й ценной бумаги строится как линейная регрессионная зависимость, получаемая по методу наименьших квадратов:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{r}_M + \varepsilon_i , \tag{10.12}$$

где α_i — коэффициент смещения регрессионной модели, отражающий активную доходность (дополнительную доходность данной ценной бумаги относительно r_M) и степень интереса инвесторов к ней;

β_i — коэффициент чувствительности изменения доходности ценной бумаги относительно изменения доходности среднерыночного портфеля;

ε_i — погрешность регрессионной модели, отражающая влияние всех других факторов.

Регрессионная зависимость строится в предположении о зависимости доходностей всех ценных бумаг только от одного фактора — r_M и, следовательно, взаимной некоррелированности ошибок ε_i, а из алгоритма метода наименьших квадратов следует, что

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}, \tag{10.13}$$

где σ_i, σ_M — среднеквадратичные отклонения соответственно доходностей i-й ценной бумаги и среднерыночного портфеля;

$\rho_{iM} = \dfrac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_i \sigma_M}$ — коэффициент корреляции между доходностью i-й ценной бумаги и доходностью среднерыночного портфеля.

Если известны коэффициенты β_i для всех рисковых фондовых активов (а к выводу о необходимости их оценки ввиду наглядности практика фондового рынка пришла довольно быстро), то ковариации доходностей ценных бумаг и их дисперсии можно вычислить, применяя правила теории вероятностей к (10.13):

$$K_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2, \tag{10.14}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_i^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2. \tag{10.15}$$

Эти правила легко обобщаются на случай портфеля, состоящего из n рисковых ценных бумаг, представленных в нем долями x_i:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\alpha_i + \beta_i \bar{r}_M + \varepsilon_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i\right) \bar{r}_M + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i = \alpha_p + \beta_p \bar{r}_M + \varepsilon_p, \tag{10.16}$$

где

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i, \tag{10.17}$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i, \tag{10.18}$$

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i. \tag{10.19}$$

Риск портфеля определяется по формуле

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2, \tag{10.20}$$

где

$$\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2. \tag{10.21}$$

Первое слагаемое в (10.20) характеризует *рыночный* (систематический, недиверсифицируемый) риск, а второе — *собственный* риск портфеля, который может быть уменьшен за счет диверсификации, как показано на рис. 10.6.

Однако по-настоящему значимое научное и практическое значение регрессионная аппроксимация в виде (10.12) и (10.13) получила в связи с использованием результатов Тобина для модели-

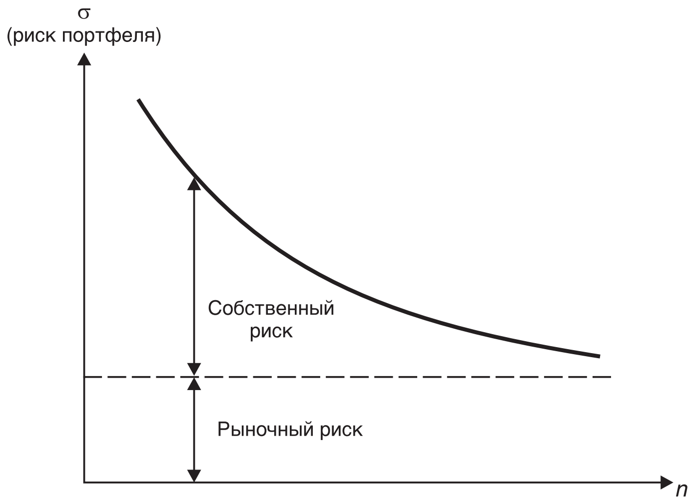

Рис. 10.6. Изменение риска портфеля при его диверсификации

рования ценообразования долгосрочных активов на фондовом рынке.

С 1964 г. появляются работы Шарпа, Литнера, Моссина, открывшие следующий этап в инвестиционной теории, связанный с так называемой **моделью оценки капитальных активов**, или **CAPM** (Capital Asset Pricing Model). Результаты, полученные в этих работах, основаны на исходных предположениях Марковица, дополненных следующими:

1. Для всех инвесторов период вложения одинаков.
2. Информация свободно и незамедлительно доступна для всех инвесторов.
3. Инвесторы имеют однородные ожидания, т.е. одинаково оценивают будущие доходности, риск и ковариации доходностей ценных бумаг.
4. Безрисковая процентная ставка одинакова для всех инвесторов.

В совокупности все исходные предположения описывают так называемый *совершенный рынок ценных бумаг*, на котором отсутствуют препятствующие инвестициям факторы. Есть еще одно положение CAPM, которое обычно считают **следствием теоремы о разделении**: в состоянии равновесия каждый вид ценных бумаг имеет ненулевую долю в касательном портфеле, а структура касательного портфеля повторяет структуру рыночного портфеля в соответствии с долями капитализации ценных бумаг.

Обоснованием служит следующее рассуждение: если касательный портфель одного инвестора не включает какую-то бумагу, это означает, что ее стараются продать все (так как инвесторы приобретают одинаковые по структуре рисковые составляющие своих портфелей); тогда рыночный курс этой бумаги под давлением избыточного предложения будет падать, а ожидаемая доходность, соответственно, расти — до тех пор, пока цена не станет равновесной, а доля в касательном портфеле — отличной от нуля. Противоположные события будут происходить при попытке инвесторов (всех одновременно) увеличить долю какой-то бумаги в рисковой части вложений.

На основе последнего утверждения и используя (10.11) можно записать выражение для ожидаемой доходности финансовых средств любого инвестора *в состоянии равновесия рынка*:

$$\bar{r}_p = r_0 + \frac{\bar{r}_M - r_0}{\sigma_M}\sigma_p, \tag{10.22}$$

где $\bar{r}_M, \sigma_M$ — доходность и риск среднерыночного (касательного) портфеля;

r_0 — доходность безрисковых активов.

Формула (10.22) описывает *эффективный фронт Тобина* (рис. 10.7) и получила название ***уравнения линии рынка капитала*** (Capital Market Line — **CML**). При этом величина

$$\frac{d r_p}{d\sigma_p} = \frac{\bar{r}_M - r_0}{\sigma_M}$$

равна тангенсу угла наклона CML к оси ординат и отражает рост доходности при увеличении риска на единицу, т.е. предельную доходность риска вложений рынка при наличии рисковых и безрисковых активов. Поскольку CML касается эффективного фронта Марковица в точке (σ_M, r_M), тангенс угла наклона касательной можно определить через выражение, описывающее фронт Марковица. Это выражение имеет вид

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)_M = \frac{\bar{r}_M - \bar{r}_i}{\sigma_M - \rho_{iM}\sigma_i},$$

где ρ_{iM} — коэффициент корреляции доходности этой ценной бумаги и портфеля в целом.

Здесь $\bar{r}_i, \sigma_i$ относятся к любой из ценных бумаг портфеля.

Приравняв правые части двух последних выражений, можно получить уравнение для ожидаемой доходности любой ценной бумаги в *оптимальном портфеле*:

$$\bar{r}_i = r_0 + \frac{\bar{r}_M - r_0}{\sigma_M}\rho_{iM}\,\sigma_i, \tag{10.23}$$

которое называется ***уравнением линии рынка ценных бумаг*** (Security Market Line — **SML**) и с учетом (10.13) может быть переписано с использованием коэффициента β_i:

$$\bar{r}_i = r_0 + \beta_i\left(\bar{r}_M - r_0\right). \tag{10.24}$$

Разность $\left(\bar{r}_M - r_0\right)$ называют премией за недиверсифицированный риск держания рыночного портфеля. Соответственно, разность $\left(\bar{r}_i - r_0\right)$ — премия за риск держания отдельного рискового актива, а β_i отражает вклад каждой ценной бумаги в риск рыночного портфеля.

Сравнение выражений для CML и SML показывает, что эти линии на плоскости (σ, r) совпадают только при $\rho_{iM} = 1$ ($\beta_i = 1$). При $\beta_i > 1$ линия SML проходит выше, а при $\beta_i < 1$ — ниже линии CML (см. рис. 10.7). В любом случае активы с бóльшим риском должны обеспечивать пропорционально бóльшую доходность. Таким образом, если портфель эффективен, связь между ожидаемой доходностью каждой акции и ее предельным вкладом в портфельный риск должна быть линейной. Верно и обратное: если линейной связи нет, портфель не является эффективным.

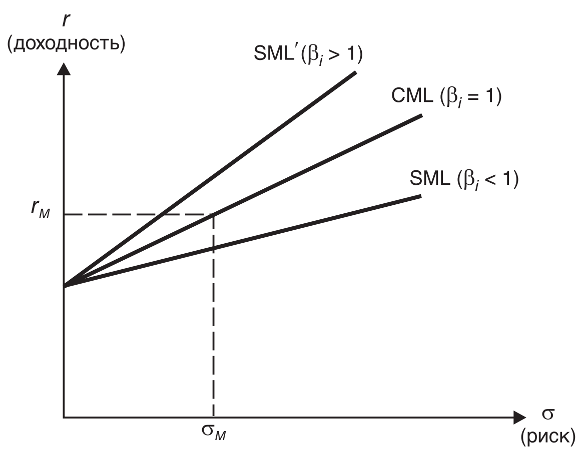

Рис. 10.7. Линии рынка капитала (CML) и рынка ценных бумаг (SML)

Используя уравнение SML, можно определить факт недооценки или переоценки ценной бумаги (например, акции) не только по ее доходности, но и путем сравнения ее действительного курса и курса в соответствии с равновесной ценой риска (обозначим его через C_0). Пусть ожидаемая в конце некоторого будущего периода цена акции (учитывая дивидендный доход) равна C_1. Приравнивая выражения доходности по определению и по уравнению SML, получаем

$$r = \frac{C_1}{C_0} - 1 = r_0 + \beta\left(r_M - r_0\right),$$

откуда следует известная **формула дисконтирования по безрисковой доходности, увеличенной на рисковую надбавку**:

$$C_0 = \frac{C_1}{1 + r_0 + \beta\left(r_M - r_0\right)}.$$

Таким образом, можно считать CAPM макроэкономическим обобщением теории Марковица, позволяющим установить соотношения между доходностью и риском актива для равновесного рынка. При этом важно, что, выбирая оптимальный портфель, инвестор должен учитывать не «весь» риск, связанный с активом (риск по Марковицу), а только недиверсифицируемую его часть. Эта часть риска актива тесно связана с общим риском рынка в целом и количественно представляется коэффициентом «бета», введенным Шарпом в его однофакторной модели. Остальная часть (несистематический, или диверсифицируемый, риск) устраняется выбором соответствующего оптимального портфеля. Характер связи между доходностью и риском имеет вид линейной зависимости. Если инвесторы не располагают какой-либо дополнительной информацией, им следует держать такой же портфель акций, как и у других, т.е. рыночный портфель ценных бумаг.

В 1977 г. эта теория подверглась критике в работах Р. Ролла. Он высказал мнение, что CAPM следует отвергнуть, поскольку она в принципе не допускает эмпирической проверки. Существует достаточно много возражений против обоснованности положений CAPM, самыми спорными из них считаются такие предположения [4]:

1. Гипотеза эффективного рынка и связанная с ней модель «случайного блуждания» рыночных цен активов.
2. Возможность на практике определить рыночный портфель, который по смыслу должен включать не только абсолютно все ценные бумаги, но и товары длительного пользования, инвестиции в

образование (в «человеческий» капитал), недвижимость, драгоценные металлы и другие ценности.

3. Существование безрисковых активов и возможность неограниченного заимствования по ставке безрисковой доходности.

Несмотря на это, САРМ остается самой значительной и влиятельной современной финансовой теорией. Практические руководства по финансовому менеджменту в части выбора стратегии долгосрочного инвестирования основываются исключительно на САРМ, но используют различные приближения лежащих в ее основе понятий. Укажем одну из модификаций, названных в [4] **обобщениями (обобщенными версиями) САРМ**, в которой используются кредитные ресурсы.

Возможность получать кредит по безрисковой ставке на практике имеет только государство, для других инвесторов эта ставка выше, поэтому эффективный фронт изменяется и приобретает вид кривой r_0ABL на рис. 10.8, при этом участок r_0A соответствует распределению средств инвестора между портфелем А и безрисковым активом с доходностью r_0, участок AB — это участок эффективного фронта Марковица, а прямая BL означает получение кредита по ставке r_1 и инвестирование всех средств в портфель В. Существенно, что инвестор в этих случаях выбирает различные по структуре портфели рисковых активов. На практике вместо кривой

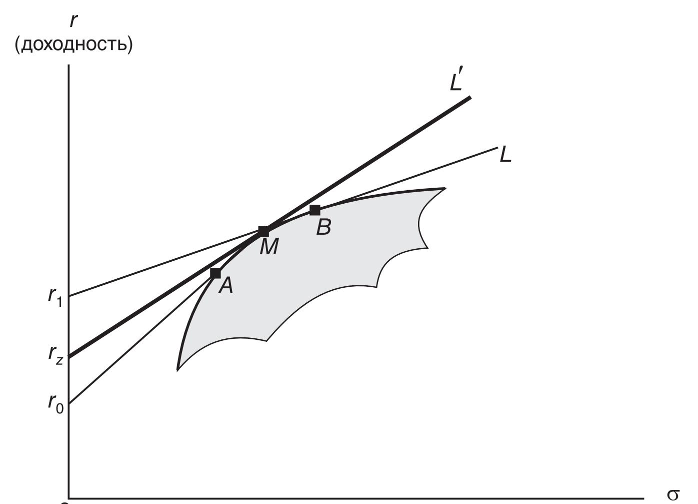

Рис. 10.8. Эффективное множество при различных безрисковых ставках и его аппроксимация

r_0ABL используют прямую r_zML', где r_z означает доходность гипотетического безрискового актива и определяется по специальным методикам. Новая CML имеет более пологий наклон, чем теоретическая, что означает меньшую цену среднерыночного риска.

10.5. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОГО АНАЛИЗА

С линейными моделями, описанными ранее, легко работать и легко применять их на практике, но они обладают определенной ограниченностью. Теория хаоса и наука о сложных системах, описанные в книге Э. Петерса «Хаос и порядок на рынках капитала», предлагают другой подход, изложение которого ведется на «интуитивном» уровне. Согласно этому подходу линейные модели представляют собой частный случай.

При **линейной парадигме**, как уже было отмечено, предполагается, что *инвесторы линейно реагируют на информацию*, т.е. используют ее сразу по получении. Это соответствует концепции рационального инвестора, которая утверждает, что прошлая информация уже дисконтирована в стоимости ценных бумаг. Поэтому в линейной парадигме подразумевается, что прибыли должны иметь приблизительно нормальное распределение и быть независимыми. **Новая (нелинейная) парадигма** обобщает реакцию инвестора, включая в себя *возможность нелинейной реакции на информацию*, и, следовательно, влечет за собой естественное расширение существующих взглядов.

Для подтверждения нелинейности в первую очередь подвергается сомнению нормальное распределение прибылей, подробное изучение которых было впервые предпринято Фамэ, заметившим, что прибыли имеют отрицательную асимметрию: количество наблюдений было больше на левом (отрицательном) «хвосте», чем на правом. Кроме того, «хвосты» были толще и пик около среднего значения был выше, чем предсказывалось нормальным распределением, т.е. имел место так называемый лептоэксцесс (табл. 10.1 и рис. 10.9). Это же отметил Шарп в своем учебнике 1970 г. «Теория портфеля и рынки капитала». Он сравнил годовые прибыли с нормальным распределением и нашел, что у нормального распределения вероятность сильных выбросов очень мала. Однако на практике такие экстремальные величины появляются довольно часто.

Эти исследования говорят о том, что прибыли американских рынков капитала не следуют нормальному распределению, и, следовательно, методы линейного анализа подрывают к себе доверие,

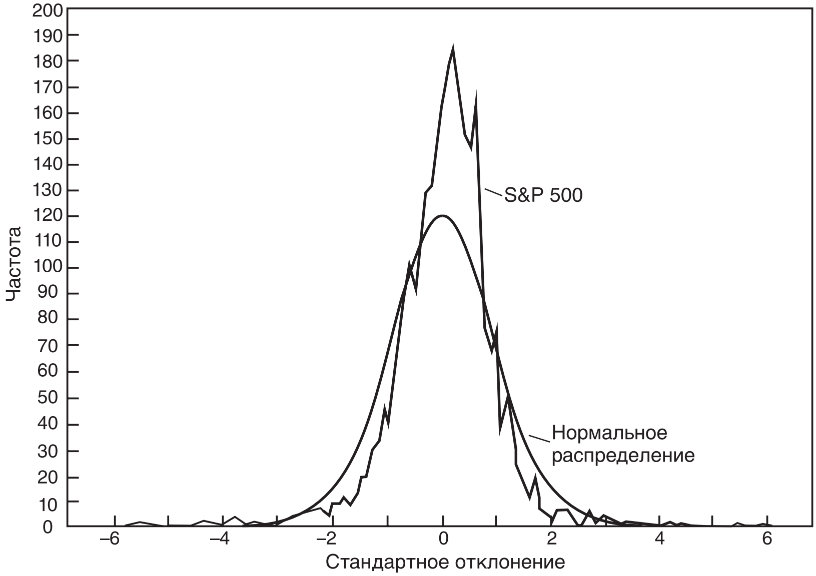

Рис. 10.9. Частотное распределение пятидневных прибылей, по данным S&P 500, за январь 1928 – декабрь 1989 г.: нормальное распределение и действительные прибыли

поскольку могут давать ошибочные результаты. Применение случайных блужданий к рыночным ценам в контексте нелинейной теории также становится сомнительным.

В соответствии с нелинейной парадигмой «ошибками» признаются и другие общепринятые утверждения классической теории оценки капитальных активов (CAPM), например *концепция равно-*

Таблица 10.1

Динамика дневных прибылей, по данным S&P 500, за январь 1928 — декабрь 1989 г.

Десятилетие	*Среднее значение*	*Стандартное отклонение*	*Асимметрия*	*Эксцесс*
1920	0,0322	1,6460	–1,4117	18,9700
1930	–0,0232	1,9150	0,1783	3,7710
1940	0,0100	0,8898	–0,9354	10,8001
1950	0,0490	0,7050	–0,8398	7,8594
1960	0,0172	0,6251	–0,4751	9,8719
1970	0,0062	0,8652	0,2565	2,2935
1980	0,0468	1,0989	–3,7752	79,6573
За весь период	0,0170	1,1516	–0,6338	21,3122

весия. При традиционном подходе предполагается, что если не существует внешних влияний, то эффективный рынок находится в покое. Так экономисты определяют равновесие. Всё уравновешивает друг друга: предложение равно спросу. Возмущая рынок, внешние факторы выводят его из равновесия. Рынок реагирует на возмущения и возвращается в равновесное положение линейным образом.

Однако факты свидетельствуют, что любая экономическая система избегает равновесия. Если экономическая система «хочет выжить», она должна эволюционировать, или, как утверждает И. Пригожин, «находиться далеко от равновесия».

Согласно новой теории эффективный рынок — это волатильный рынок, и *стремление к равновесию не является необходимым условием*.

Еще одной проблемой линейного взгляда на мир является *время*. Оно либо игнорируется, либо, в лучшем случае, рассматривается наравне с другими переменными модели. Рынки при таком подходе не обладают памятью о прошлом или имеют очень ограниченную память. Различия в предыстории игнорируются. Идея о том, что лишь одно какое-то событие может изменить будущее, чужда линейной парадигме — вот в чем причина пропуска экономистами поворотных точек экономической эволюции, считают сторонники динамического подхода.

Следующее расхождение нелинейного подхода с принятой теорией CAPM — *предположение о склонности участников рынков капитала к риску* в противоположность *концепции рационального инвестора*. Согласно данному предположению люди не всегда питают отвращение к риску, они часто могут рисковать, особенно если осознают, что обречены на потери, если не будут этого делать. К тому же люди могут реагировать на информацию не сразу по ее получении. Наоборот, они могут откликаться на нее некоторое время спустя, если она подтверждает изменение в недавнем тренде, что говорит о нелинейной реакции инвестора на рыночные изменения.

Однако самое главное отличие альтернативной парадигмы — это *наличие неединственного решения*.

Возьмем для иллюстрации простую нелинейную систему. Предположим, есть акция ценой P_t; определим ее как мелкую акцию, продаваемую меньше чем за 1 руб. Поскольку на рынок приходит достаточно много покупателей, их требования становятся причиной повышения цены на определенную долю от первоначальной стоимости, обусловленную коэффициентом a. Тогда стоимость этой акции в момент времени $t + 1$ будет равна

$$P_{t+1} = aP_t. \tag{10.25}$$

В этом уравнении предполагается, что существуют только покупатели. Чтобы сделать модель более реалистичной, нужно учесть влияние продавцов. Предположим, что, в то время как цена увеличивается на aP_t, продавцы уменьшают ее на aP_t^2. Уравнение (10.25), следовательно, приобретает вид

$$P_{t+1} = aP_t - aP_t^2, \tag{10.26}$$

$$P_{t+1} = aP_t(1 - P_t). \tag{10.27}$$

Эта модель тоже не очень реалистична, однако она объясняет, что происходит, если давление покупателей поднимает цены в пропорции a, а продавцы снижают их на aP_t^2. При низком спросе цены снижаются до нуля и система умирает. При высоком спросе (но не слишком) цены стремятся к устойчивому состоянию, или к «справедливой величине».

Предположим, покупательское давление дает рост со скоростью $a = 2$ и $P_0 = 0{,}3$. В соответствии с итерационным уравнением (10.27) цена в конце концов устанавливается на отметке 0,50. Таким образом, на средних величинах цены стремятся к постоянной величине. Однако если скорость роста увеличить до $a = 2{,}5$, то неожиданно образуются две возможные справедливые цены и система начинает колебаться между ними. Почему это происходит? На этом *критическом уровне* покупатели и продавцы поступают на рынке не одинаково. Отставание aP_t^2 при этом становится больше, чем рост, обусловленный величиной a. Однако если цена достигла низшего уровня, то в этом случае начинает доминировать скорость роста a, толкая цену обратно к верхней отметке. Таким образом, имеют место две справедливые цены: по одной продавцы продают, по второй покупатели покупают. На этом, однако, дело не кончается.

Если скорость роста a непрерывно повышать, то возможно появление 4, 16, 32 справедливых цен. В итоге при $a = 3{,}75$ имеет место бесконечное количество справедливых цен. Так как система не может установиться на какой-то справедливой цене, она флуктуирует случайным образом, хаотически. На рис. 10.10 показана диаграмма с критическими величинами скорости роста a, где число справедливых цен увеличивается.

Эта модель нереалистична: она предполагает, что давление продавцов прямо соотносится со скоростью роста покупательского

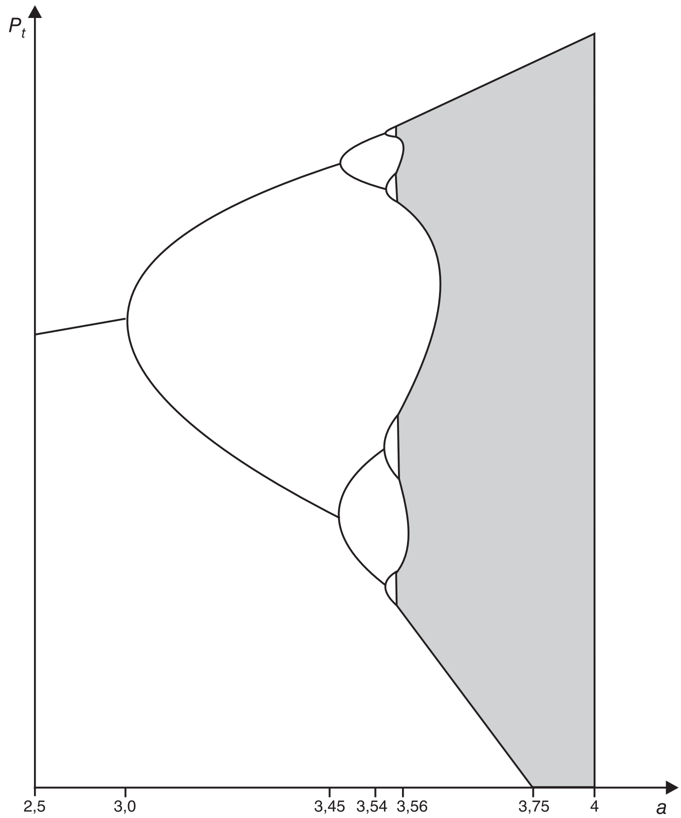

Рис. 10.10. Бифуркационная диаграмма: логистическое уравнение

спроса. Однако она показывает, как сложные результаты могут порождаться даже в простой нелинейной системе. Легко представить себе уровень сложности большой нелинейной системы, такой, например, как активно функционирующий рынок капитала.

Уравнение (10.25) — это знаменитое *логистическое уравнение*, хорошо изученное и описанное в литературе.

Согласно нелинейному подходу большинство сложных естественных систем может быть смоделировано с помощью нелинейных дифференциальных уравнений. Эти уравнения полезны именно по тем причинам, по которым их стремятся избегать. Классическая теория предполагает, что инвесторы рациональны и дисциплинированны. Такого рода предположения о поведении инвесторов сузили математическую модель до простых линейных дифференциальных уравнений с единственным решением. Однако рынки не упорядочены и не просты. Они хаотичны и сложны. Поэтому необходимы модели со множеством возможных решений.

Фрактальная геометрия. Фракталы

Альтернативная теория рассматривает не только нелинейные системы, но и *фрактальную геометрию*, которая описывает сложные системы, используя небольшое количество терминов и правил. Фракталы придают сложности — структуру, хаосу — красоту. Большинство временны́х рядов наилучшим образом описываются фракталами. Что же это такое?

Всеобъемлющего определения фракталов не существует. Будем пользоваться следующим рабочим определением: ***фрактал*** есть некоторая самосоотнесенность, или самоподобие. Один из самых наглядных естественных фракталов — это дерево. Древесные ветви следуют фрактальному скейлингу. Каждое ответвление со своими собственными ветвями подобно всему дереву целиком в качественном смысле.

Фрактальные формы обнаруживают пространственное самоподобие. Фрактальные временны́е ряды имеют статистическое самоподобие во времени. Они являются случайными фракталами и имеют больше общего с естественными объектами, чем чистые математические фракталы. Фрактальные формы дают хорошую основу для интуитивного постижения, поскольку для них «самоподобие» имеет наглядный смысл. По аналогии с ними легче будет понять фрактальные временны́е ряды.

Фрактальные формы могут порождаться многими путями. Простейший из них — задать порождающее правило и выполнить последовательность итераций. На рис. 10.11 показан пример, который начинается со сплошного равностороннего треугольника (см. рис. 10.11, *а*). Затем удаляем равносторонний треугольник из первоначальной фигуры — остается три меньших сплошных треугольника и пустой треугольник в середине (см. рис. 10.11, *б*). Далее удаляются треугольники из этих малых сплошных треугольников (см. рис. 10.11, *в*). Если этот процесс повторять, то в итоге получается структура, показанная на рис. 10.11, *г*, — треугольник, который имеет внутри себя бесконечное число уменьшенных треугольников. При увеличении какой-либо части этого треугольника можно увидеть в ней еще больше уменьшенных треугольников. Таким образом, бесконечное число треугольников заключено в конечном пространстве исходного треугольника. С помощью простого правила в

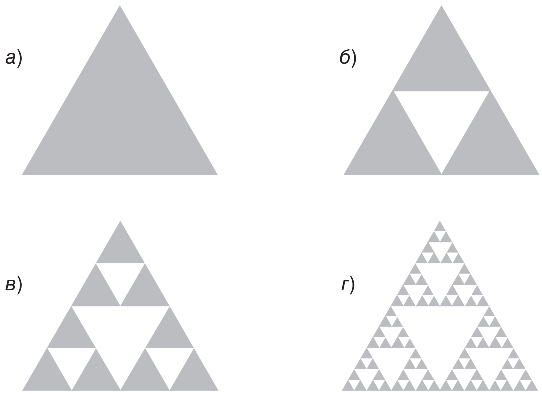

Рис. 10.11. Генерация треугольника Серпинского:
а – сплошной равносторонний треугольник; *б* – изъятие равностороннего треугольника из центра;
в – изъятие треугольника из оставшихся треугольников; *г* – треугольник Серпинского
(после бесконечного количества итераций)

этом конечном пространстве создана бесконечная сложность. Это особенный фрактал, называемый треугольником Серпинского.

Теперь попытаемся определить размерность треугольника Серпинского. Он не одномерный, так как не является линией. И не двумерный, как сплошной треугольник, ибо имеет в себе отверстия. Его размерность заключена между единицей и двойкой. Она равна 1,58 — это *дробная*, или *фрактальная*, *размерность*. Фрактальные размерности являются главными идентификационными характеристиками фракталов.

Фракталы отражают объективную реальность в отличие от линейных фигур, которые отражают идеальное положение вещей. Фракталы объединяют в себе хаос и порядок, нелинейность и линейность, так как локально они случайны, а глобально — упорядоченны. Более реалистичными являются случайные фракталы, например береговые линии. Они являются хорошим примером, особенно если провести параллель между ними и времены́ми рядами.

Фрактальная размерность береговой линии рассчитывается посредством измерения свойства зазубренности. Подсчитываем количество окружностей определенного диаметра, которое необходимо для покрытия береговой линии *ABCDE* (рис. 10.12), увеличиваем их диаметр и снова считаем их количество. Продолжая эту процедуру, находим, что количество окружностей N и их радиус r связывает следующая зависимость:

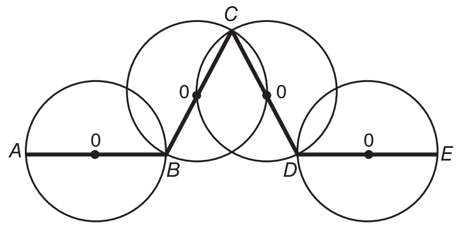

Рис. 10.12. Вычисление фрактальной размерности

$$N(2r)^D = 1, \qquad (10.28)$$

где D — фрактальная размерность.

Уравнение (10.28) может быть приведено к отношению логарифмов:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{2}r\right)}. \qquad (10.29)$$

Береговая линия Норвегии, например, имеет фрактальную размерность, равную 1,52, в то время как берег Британии — 1,30. Это означает, что береговая линия Норвегии более изрезанна, чем береговая линия Британии, и поэтому ее размерность ближе к 2.

Подобным же образом, т.е. указывая фрактальные размерности, можно сравнивать разные акции.

☐ Рассмотрим для примера два ряда возможных прибылей, обозначенных S_1 и S_2 в табл. 10.2. Ряд S_2 не нормально распределен и имеет выраженный тренд. Ряд S_1 не показывает тренда и имеет

Таблица 10.2

Стандартное отклонение в сравнении с фрактальной размерностью

Наблюдение	S_1	S_2
1	2	1
2	–1	2
3	–2	3
4	2	4
5	–1	5
6	2	6
Накопленная прибыль, %	1,93	22,83
Стандартное отклонение	1,70	1,71
Фрактальная размерность	1,41	1,13

накопленную прибыль 1,93%, в то время как для ряда S_2 она равна 22,83%. Однако S_1 имеет стандартное отклонение 1,70, в то время как у ряда S_2 фактически то же самое стандартное отклонение — 1,71. В этом гипотетическом примере две акции с одинаковыми волатильностями имеют совершенно различные характеристики прибылей.

Пуристы скажут, что оба ряда не нормально распределены и это делает их сравнение невозможным. Это совершенно верная точка зрения. Поскольку прибыли акции явно не нормально распределены, использование стандартного отклонения как меры для сравнения рисков некорректно — так же как некорректно использование длины при сравнении береговых линий. Фрактальная размерность ряда S_1 равна 1,41, ряда S_2 — 1,13. Ряд S_1 явно более зазубрен, чем S_2, и его фрактальная размерность качественно отлична, что дает нам возможность утверждать следующее: первый ряд прибылей более изменчив, следовательно, он более рискованный для вложений в его акции. ■

Метод нормированного размаха

Теперь поговорим более подробно о том, что большинство людей не реагируют на информацию, получив ее, а ждут подтверждения и ничего не предпринимают до тех пор, пока тренд не станет явно установившимся. Для подтверждения действительности тренда необходимо определенное количество подкрепленной информации, однако неравномерность ее усвоения может стать причиной смещенных случайных блужданий, которые широко изучались Хёрстом в 40-х годах прошлого столетия и которые представляют собой фрактальные временны́е ряды.

Хёрст был гидрологом, работавшим над проектом нильской плотины около 40 лет. Все это время он занимался проблемой резервуарного контроля. Идеальный резервуар никогда не должен переполняться. Стратегия, которая могла бы быть положена в основу управления, состоит в ежегодном спуске определенного количества воды. Однако, если приток из реки будет слишком мал, уровень воды в резервуаре может стать опасно низким. Проблема заключалась в том, какой сброс выбрать, чтобы резервуар никогда не переполнялся и не оставался пустым.

Хёрст измерял колебания уровня воды в резервуаре относительно среднего с течением времени и обнаружил, что большинство природных систем не следуют случайному блужданию, т.е. не нормально распределены. Он показал, что большинство естественных явлений, включая речные стоки, осадки, солнечные пятна, следуют «смещенному случайному блужданию» — тренду с шумом.

Э. Петерс распространил метод Хёрста на изучение временны́х рядов рынков капитала, чтобы выяснить, являются ли эти ряды также смещенными случайными блужданиями. Впоследствии этот подход получил название «метод нормированного размаха» или «R/S-анализ».

Для переформулирования работы Хёрста к обобщенным временны́м рядам нужно прежде всего определить размах, который был бы сравним с колебаниями уровня в резервуаре. Накопленное отклонение за N периодов

$$X_{t,N} = \sum_{u=1}^{t} (e_u - M_N), \tag{10.30}$$

где e_u — приток в году u;

M_N — среднее e_u за N периодов.

Тогда размах отклонения R становится разностью между максимальным и минимальным уровнями:

$$R = \max(X_{t,\, N}) - \min(X_{t,\, N}). \tag{10.31}$$

Для сравнения различных типов временны́х рядов Хёрст разделил этот размах на S — стандартное отклонение исходных наблюдений. Этот «нормированный размах» R/S должен увеличиваться со временем. Хёрст ввел следующее соотношение:

$$R/S = (aN)^H, \tag{10.32}$$

где a – константа;

N — число наблюдений;

H — показатель Хёрста.

В соответствии со статистической механикой показатель Хёрста должен равняться 0,5, если ряд представляет собой случайное блуждание. Другими словами, размах накопленных отклонений должен увеличиваться пропорционально квадратному корню из времени N. Применив свою статистику к записи стоков Нила, Хёрст получил $H = 0{,}9$. Он проанализировал береговой рельеф других рек. Значение H обычно превосходило 0,5. Более того, и для других природных явлений Хёрст всегда получал H больше чем 0,5. Что это означало?

Когда H отличается от 0,5, это значит, что наблюдения не являются независимыми. Каждое наблюдение несет память о всех предшествующих событиях. Это не кратковременная память, которую часто называют «марковской». Это другая память — долговременная, теоретически она сохраняется навсегда. Недавние события имеют влияние большее, чем события отдаленные, но остаточное влияние этих последних всегда ощутимо. В долговременном масштабе система, которая дает статистику Хёрста, есть результат длинного потока взаимосвязанных событий. То, что случается сегодня, влияет на будущее. То, где мы находимся теперь, определяется тем, где мы были в прошлом. Время оказывается важным фактором. Подобно тому как галька увлекается текущей водой, сегодняшние события устремляются в будущее. Сила этого стремления постепенно ослабевает — до тех пор, пока все его цели и намерения не сведутся к нулю.

Влияние настоящего на будущее может быть выражено корреляционным соотношением

$$C = 2^{2H-1} - 1, \tag{10.33}$$

где C — мера корреляции;
H — показатель Хёрста.

Имеются **три различные классификации для показателя Хёрста**:

1) $H = 0{,}5$;
2) $0 < H < 0{,}5$;
3) $0{,}5 < H < 1{,}0$.

Значение $\boldsymbol{H = 0{,}5}$ указывает на *случайный ряд*. События случайны и некоррелированны. Правая часть уравнения (10.33) обращается в нуль. Настоящее не влияет на будущее. Функция плотности вероятности может быть нормальной кривой, однако это не обязательное условие. R/S-анализ может классифицировать произвольный ряд, безотносительно к тому, какой вид распределения ему соответствует. Показатель H, как правило, бывает больше 0,5, а вероятностные распределения не являются нормальными.

Перед тем как изучить этот класс, стоит кратко обсудить случай $\boldsymbol{0 < H < 0{,}5}$. Данный диапазон соответствует *антиперсистентным рядам*. Такой тип системы часто называют «возврат к среднему». Если система демонстрирует рост в предыдущий период, то скорее всего в следующем периоде начнется спад, и наоборот. Устойчивость такого антиперсистентного поведения зависит от того, насколько H близко к нулю. Чем ближе его значение к нулю, тем ближе C в уравнении (10.33) к –0,5, или отрицательной корреляции. Такой ряд более изменчив, чем случайный ряд, так как состоит из частых реверсов «спад–подъем». Несмотря на широкое распространение концепции возврата к среднему в экономической и финансовой литературе, до сих пор было найдено мало антиперсистентных рядов.

При **0,5 < *H* < 1,0** мы имеем *персистентные*, или *трендоустойчивые*, *ряды*. Если ряд возрастает в предыдущий период, то вероятно, что он будет сохранять эту тенденцию какое-то время в будущем. Тренды очевидны. Трендоустойчивость поведения, или сила персистентности, увеличивается при приближении H к единице, или 100%-й корреляции, в соотношении (10.33). Чем ближе H к 0,5, тем более зашумлен ряд и тем менее выражен его тренд. Персистентный ряд представляет собой смещенные случайные блуждания. Сила этого смещения зависит от того, насколько H больше 0,5.

Показатель Хёрста может быть преобразован во фрактальную размерность с помощью следующей формулы:

$$D = 2 - H. \tag{10.34}$$

Таким образом, если $H = 0{,}5$, то $D = 1{,}5$. Обе величины характеризуют независимую случайную систему. Величина $0{,}5 < H < 1$ будет соответствовать фрактальной размерности, более близкой к кривой линии. Это, по терминологии Хёрста, персистентный временной ряд, дающий более гладкую, менее зазубренную линию, нежели случайное блуждание. Антиперсистентная величина H ($0 < H < 0{,}5$) дает соответственно более высокую фрактальную размерность, чем случайное блуждание, и, следовательно, характеризует систему, более подверженную переменам. Это в точности соответствует антиперсистентному временно́му ряду.

Персистентные временны́е ряды являют собой более интересный класс, так как оказалось, что они не только в изобилии обнаруживаются в природе (это открытие принадлежит Хёрсту), но и свойственны рынкам капитала. Нетрудно понять, каким образом статистика Хёрста возникает в структуре рынка капитала. Смещение генерируется инвесторами, которые реагируют на текущую экономическую обстановку. Это смещение продолжается до тех пор, пока не появится новая случайная информация и не изменит смещения по величине, направлению или в том и другом плане.

Несмотря на утверждение о долговременной памяти нелинейных систем, упомянутое ранее, согласно теории хаоса в любой нелинейной системе всегда существует *точка, где теряется память о начальных условиях*. Эта точка «потери» аналогична концу естественного периода системы. Теоретически процесс с долговременной памятью берет начало из бесконечно удаленного прошлого. И теоретически все фракталы имеют бесконечную инвариантность, подобно треугольнику Серпинского. Однако естественные фракталы, к примеру сосудистая система человека, не таковы. Изменения в диаметрах артерий и вен следуют фрактальному скейлингу в своих разветвлениях. В то же время эта фрактальная система (как и другие: дерево, береговая линия) имеет предел, так как сосудистая система не становится бесконечно малой — диаметр сосудов остается конечной величиной. Аналогично этому предполагается, что процессы с долговременной памятью в большинстве систем не бесконечны — они имеют предел. Сколь долга эта память, зависит от структуры нелинейной динамической системы, которая порождает фрактальный временной ряд.

С помощью R/S-анализа можно показать, что любой временной ряд имеет конечную память и что существует точка, где теряется память о прошлом, после которой ряд начинает следовать случайным блужданиям.

Применение R/S-анализа к различным рынкам капитала просто и непосредственно, однако требует достаточно большого количества данных и скрупулезной их обработки. Во всех случаях результаты применения R/S-анализа демонстрируют фрактальные структуры и непериодические циклы — убедительное доказательство того, что *рынки капитала являются нелинейными системами* и что гипотеза эффективного рынка вследствие этого под большим вопросом. Представленный ниже анализ рассмотрен в работах Э. Петерса (1989, 1991).

При анализе рынков используются логарифмические прибыли, определенные следующим образом:

$$S_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \tag{10.35}$$

где S_t — логарифмическая прибыль в момент времени t;

P_t — цена актива в момент времени t.

Для R/S-анализа логарифмические прибыли более подходящи, чем широко используемые процентные изменения цен. Размах, используемый в R/S-анализе, есть накопленное отклонение от среднего. С другой стороны, логарифмические прибыли складываются в накопленную прибыль, чего нельзя сказать о процентных изменениях.

☐ Применим R/S-анализ к данным о месячной прибыли за 38-летний период с января 1950 по июль 1988 г., представленным рейтинговой компанией «Standard&Poor's» (S&P 500). На рис. 10.13 показана кривая в двойной логарифмической шкале, полученная описанным методом. Процесс с долговременной памятью наблюдается на протяжении приблизительно 48 месяцев. После этой точки график начинает следовать случайным блужданиям при $H = 0{,}50$. Прибыли, которые отстоят друг от друга более чем на 48 месяцев, имеют в среднем малую левостороннюю корреляцию. На рис. 10.14 представлены величины H, рассчитанные по регрессиям для N, меньших или равных 3; 3,5; 4; 4,5 и 5 годам. Пик явно наблюдается при $N = 4$ годам с $H = 0{,}78$. Столь высокая оценка H говорит о том, что фондовый рынок является очевидным фракталом, а не следует случайным блужданиям. Он подвержен смещенным случайным блужданиям с аномальной величиной $H = 0{,}78$. Графики на рис. 10.13 соответствуют $H = 0{,}78$ и $H = 0{,}50$. Средняя длина цикла, т.е. время до потери памяти о прошлом, равняется 48 месяцам.

В табл. 10.3 представлены данные для шести репрезентативных акций: IBM, Xerox, Apple Computer, Coca-Cola, McDonald's, Consolidated Edison. Величины H во всех случаях персистентны, но циклы имеют разную длину.

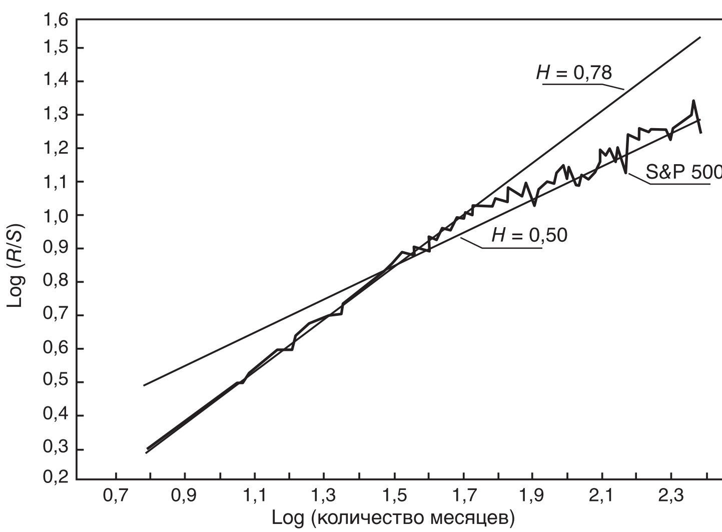

Рис. 10.13. Месячные прибыли, по данным S&P 500, за январь 1950 — июль 1988 г.

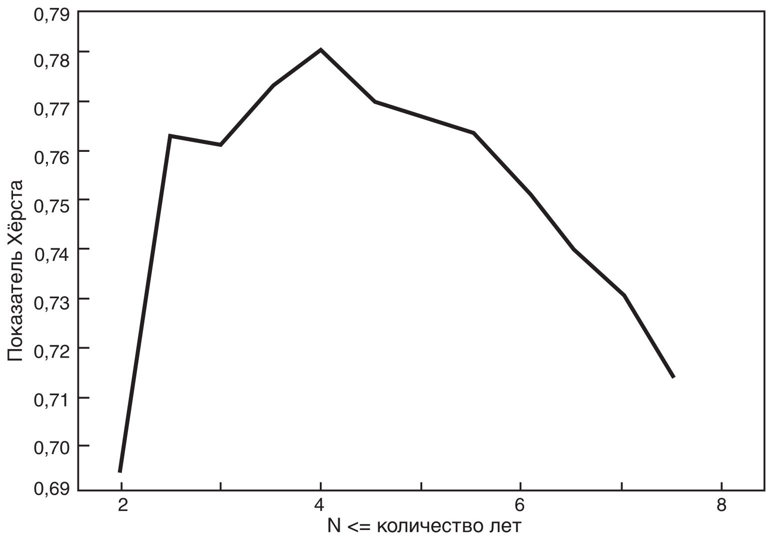

Рис. 10.14. Оценка длины цикла, по данным S&P 500, с учетом месячных прибылей за январь 1950 — июль 1988 г.

Таблица 10.3

R/S-анализ отдельных акций

Акция компании	*Показатель Хёрста (H)*	*Средняя длина цикла, месяцы*
IBM	0,72	18
Xerox	0,73	18
Apple Computer	0,75	18
Coca-Cola	0,70	42
McDonald's	0,65	42
Consolidated Edison	0,68	90

При беглом взгляде на эти данные легко убедиться, что акции по разным отраслям производства имеют схожие величины H и длины циклов. Производства с высоким уровнем инноваций, которые сосредоточены на выпуске современной техники, имеют тенденцию к более высокому уровню H и укороченным циклам. В противоположность им акции предприятий, имеющих низкий уровень инноваций, отличаются меньшими величинами H и очень длинными периодами. ■

ГЛАВА 11
ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЬНЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ

11.1. БЕЗРИСКОВАЯ МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Рассмотрим модель с целочисленными ограничениями на объемы приобретаемых финансовых активов, т.е. случай, когда *активы продаются лотами*.

Пусть инвестор обладает денежными средствами в объеме F на интервале $[0; T]$, которые он может потратить на приобретение n видов ценных бумаг. Ценные бумаги можно приобретать только лотами, количество ценных бумаг в i-м лоте ($i = 1, \ldots, n$) равно V_i. Исходная стоимость (в момент времени $t = 0$) единицы ценных бумаг вида i составляет α_i, а будущая стоимость (в момент времени $t = T$) рассчитывается следующим образом: с вероятностью p_j ($j = 1, \ldots, k$) стоимость единицы ценной бумаги составит γ_i^j. Необходимо выбрать такие виды ценных бумаг, чтобы максимизировать прибыль, полученную после продажи всех видов приобретенных ценных бумаг в момент времени T. Данную задачу можно описать с помощью следующей модели:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \overline{\gamma}_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} x_i V_i \alpha_i \right) \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \alpha_i \le F,$$

$$\overline{\gamma}_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_i^j p_j,$$

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1,$$

$$p_j \ge 0,$$

$$x_i \in \{0; 1\}.$$

Если лот i приобретается, то $x_i = 1$, в противном случае $x_i = 0$.

В качестве целевой функции выбрано выражение из двух слагаемых, первое из которых — выручка от реализации ценных бумаг по цене $\overline{\gamma}_i$, а второе — остаток денежных средств после формирования портфеля ценных бумаг. Учитывая, что постоянная F не оказывает влияния на оптимальное решение, получаем следующую целевую функцию:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i (\overline{\gamma}_i - \alpha_i) \to \max.$$

Для решения данной задачи может быть использована следующая **схема метода ветвей и границ**:

1. *Вычисление верхней оценки*. Для всех пакетов акций рассчитывается величина $\overline{\gamma}_i/\alpha_i$. Пронумеруем все пакеты следующим образом: $\overline{\gamma}_1/\alpha_1 \geq \overline{\gamma}_2/\alpha_2 \geq \ldots \geq \overline{\gamma}_n/\alpha_n$. Далее, финансовые ресурсы выделяются для приобретения ценных бумаг в первую очередь первого вида, затем второго и так далее до того момента, пока остатка финансовых средств окажется недостаточно для приобретения лота ценных бумаг вида l в объеме V_l. В этой ситуации игнорируются целочисленные ограничения на приобретение акций вида l и покупается максимально возможное количество ценных бумаг данного вида. Это количество (V_l') рассчитывается по следующей формуле: $V_l' = F_{l-1}/\alpha_l$, где F_{l-1} — остаток денежных средств после приобретения первых $l - 1$ пакетов ценных бумаг ($1 \leq l \leq n$). Итоговая верхняя оценка рассчитывается по формуле

$$Z_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{l-1} V_i \overline{\gamma}_i - \sum_{i=1}^{l-1} V_i \alpha_i + V_l'(\overline{\gamma}_l - \alpha_l).$$

2. *Вычисление нижней оценки*. Расчет осуществляется по формуле

$$Z_{\text{н}} = \sum_{i=1}^{l-1} V_i \overline{\gamma}_i - \sum_{i=1}^{l-1} V_i \alpha_i + F_{l-1}.$$

3. *Вычисление текущих верхних оценок*. Текущая верхняя оценка при анализе очередного варианта портфеля ценных бумаг рассчитывается каждый раз после выделения финансовых средств на приобретение очередного пакета. Эта оценка складывается из прибыли, полученной от приобретения ценных бумаг, на которые уже выделены деньги, и прибыли от оставшихся ценных бумаг, вычи-

сляемой по правилу получения $Z_в$. При этом если окажется, что $Z_в^{тек} \le Z_н$, то данный вариант формирования портфеля не рассматривается; в противном случае в портфель включается очередной пакет акций и снова вычисляется $Z_в^{тек}$. В итоге либо анализируемый вариант портфеля будет отвергнут, либо в результате будет сформирован портфель, доходность которого больше $Z_н$. В этом случае в качестве нижней оценки принимаем полученное значение прибыли от последнего портфеля ценных бумаг и переходим к анализу нового варианта формирования портфеля. Работа алгоритма заканчивается либо после перебора всех вариантов формирования портфеля, и тогда о п т и м а л ь н ы м будет тот вариант, которому соответствует последнее значение $Z_н$, либо в случае, когда получен вариант портфеля, прибыль по которому равна $Z_в$.

Одной из проблем, возникающих при практическом использовании решения предложенной задачи, является невысокая достоверность прогноза стоимости ценных бумаг γ_i ($i = 1, ..., n$). Если известна функция распределения случайных величин, задающих возможную прибыль по каждому виду ценных бумаг, то выбирается портфель, максимизирующий математическое ожидание выигрыша либо минимизирующий риск финансовых потерь (среднеквадратичное отклонение). Схема решения и результаты для данной задачи подробно описаны в работе [78].

Другим подходом использования решения задачи в условиях неточного прогноза является **анализ чувствительности решения к изменению величин** γ_i.

При этом возможны три варианта:

1. Считается, что известны минимальные значения γ_i, и необходимо вычислить, насколько могут быть увеличены эти значения, чтобы оптимальное решение задачи сохранилось, т.е. необходимо определить такое ε^m, чтобы при увеличении всех γ_i на любое $\varepsilon \in (0; \varepsilon^m)$ решение задачи сохранилось.

Пусть $X = \{x^1, ..., x^n\}$ — множество всех возможных решений задачи и пусть эти значения упорядочены по значению величин $\sum_{i=1}^{n} x_i^q V_i$. Пусть вектор x^l является оптимальным, тогда при увеличении γ_i на ε для всех $i = 1, ..., n$ в качестве новых решений могут быть только решения $x^{l+1}, ..., x^n$. Чтобы определить границу изменения ε для решения x^l, необходимо вычислить ε^l с помощью следующего соотношения:

$$\varepsilon^l = \min_k \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^l V_i(\gamma_i + \varepsilon) = \sum_{i=1}^n x_i^k V_i(\gamma_i + \varepsilon) \right\}, \quad k = \overline{l+1, n}.$$

Раскроем скобки и выразим ε через параметры V_i, γ_i, x_i^l, x_i^k. Отсюда получаем

$$\varepsilon^l = \min_{k=\overline{l+1,n}} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k V_i \gamma_i - \sum_{i=1}^n x_i^l V_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^n x_i^k V_i - \sum_{i=1}^n x_i^l V_i}.$$

Пусть этот минимум достигается на каком-либо $l_1 > l$, тогда процедура приращения ε^{l_1} для решения x^{l_1} повторяется. Это происходит до тех пор, пока через конечное число шагов не произойдет переход на решение x^n, и тогда дальнейшее увеличение всех значений γ_i не приведет к новому решению.

2. Предполагается, что γ_i меняются по правилу $\gamma_i + m_i\varepsilon$. В данной ситуации схема рассуждений сохраняется, только упорядочение решений происходит по величине $\sum_{i=1}^n x_i V_i m_i$, $m = 1, ..., M$. Соответственно, формула для вычисления ε^l, при котором остается оптимальным решение x^l, будет иметь следующий вид:

$$\varepsilon^l = \min_{k=\overline{l+1,n}} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k V_i \gamma_i - \sum_{i=1}^n x_i^l V_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^n x_i^k V_i m_i - \sum_{i=1}^n x_i^l V_i m_i}.$$

3. Полагаем, что γ_i может принимать все значения из интервала $[\gamma_i^1; \gamma_i^2]$. В данной ситуации аналогично может быть представлена процедура разбиения множества, на котором изменяются значения $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, на подмножества $S_1, ..., S_n$. При этом при изменении γ на любом из подмножеств S_j ($j = 1, ..., n$) оптимальным на этом подмножестве остается решение $x^j \in X$.

Рассмотрим для предложенной задачи ситуацию, когда $\gamma_i \in [\gamma_i^1; \gamma_i^2]$, т.е. будущая ожидаемая стоимость i-го актива может принимать любые значения из интервала $[\gamma_i^1; \gamma_i^2]$. Рассмотрим для каждого актива интервалы $[\gamma_i^1/\alpha_i; \gamma_i^2/\alpha_i]$. В этом случае, вообще говоря, невозможно однозначно упорядочить все активы по степени убывания доходности. Поэтому можно сформировать все допустимые портфели и далее для каждого портфеля вычислить соответственно F_j^1, F_j^2 ($j = 1, ..., N$). Здесь N — число допустимых портфелей; F_j^1 и F_j^2 — значение целевой функции соответственно при минимальном и максимальном значении будущей стоимости всех активов. Далее расположим соответствующие значения целевой функции на оси доходности для различных инвестиционных портфелей.

Выберем портфели, которые могут при определенных значениях будущих стоимостей активов, входящих в них, быть оптимальными. Для этого из множества всех допустимых портфелей N выделим те, которые находим следующим образом:

1. Определим $\max F_j^2 = F_l^2$ ($j \in N$).
2. Определим $\max F_j^1 = F_k^1$ ($j \in N$).
3. Исключим из множества N все портфели, для которых $F_l^2 \leq F_k^1$.

Оставшееся множество портфелей обозначим через N_1. Очевидно, что только портфели множества N_1 могут быть оптимальными при изменении будущей стоимости активов в интервалах $\gamma_i \in [\gamma_i^1; \gamma_i^2]$, $i = 1, ..., n$. Значение целевой функции для каждого допустимого портфеля j может быть представлено следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j V_i \gamma_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^j V_i \alpha_i + F,$$

где вектор с булевыми переменными $x^j = (x_1^j, ..., x_n^j)$ определяет те лоты, которые вошли в портфель j.

Если необходимо определить множество будущих стоимостей активов, при которых j-й портфель будет оптимальным, то очевидно, что оно задается следующей системой линейных неравенств:

$$\gamma_i^1 \leq \gamma_i \leq \gamma_i^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j \left(\gamma_i - \alpha_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^l \left(\gamma_i - \alpha_i\right),$$

$$i = \overline{1, n},$$

$$l \in N_1,$$

$$l \neq j.$$

11.2. ДИСКРЕТНАЯ ЦЕНОВАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА КАПИТАЛОВ

Пусть известен перечень лотов, в которые входят ценные бумаги одного вида, объем которых (количество акций каждого вида) задан числами $V_1, V_2, ..., V_n$. Известны начальная стоимость каждой акции α_i в момент времени $t = 0$ и вероятностное распределение будущей стоимости акций каждого вида в момент времени $t = T$.

Будем предполагать, что заданы так называемые β-коэффициенты по каждому виду финансовых активов; обозначим их β_i ($i = 1, ..., n$). Эти коэффициенты задают количественную оценку риска по каждому виду ценных бумаг; их вычисляют по формуле (10.13). В этих условиях инвестор, обладая ограниченным объемом инвестиционных ресурсов F, хотел бы приобрести те лоты, продажа которых в момент времени $t = T$ принесла бы ему максимальный ожидаемый прирост финансовых ресурсов ΔF.

Сформулируем оптимизационную задачу определения инвестиционного портфеля с учетом приведенных предположений.

Будем считать, что будущая стоимость i-го актива задается распределением $\gamma_i^1, ..., \gamma_i^m$ с вероятностями $p_1, ..., p_m$. Тогда математическое ожидание будущей стоимости i-го актива есть величина $\bar{\gamma}_i = \sum_{j=1}^{m} \gamma_i^j p_j$.

В этих обозначениях соответствующая **оптимизационная задача выбора инвестиционного портфеля** может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i (\bar{\gamma}_i - \alpha_i) \to \max, \tag{11.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \alpha_i \le F, \tag{11.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i V_i \alpha_i \beta_i) / F \le \beta_{\text{гр}}, \tag{11.3}$$

$$x_i \in \{0; 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{11.4}$$

где $\beta_{\text{гр}}$ — максимально допустимое значение риска инвестиционного портфеля.

В задаче (11.1)–(11.4) $x_i = 0$, если лот V_i не включен в инвестиционный портфель, и $x_i = 1$, если лот V_i включен в инвестиционный портфель. Для получения оптимального решения задачи (11.1)–(11.4) необходимо выбрать такие лоты из множества V_1 , ..., V_n, чтобы, не нарушая ограничений (11.2)–(11.4), максимизировать целевую функцию (11.1).

Для решения этой задачи может быть использована следующая **схема метода ветвей и границ**.

Шаг 1. *Вычисление верхней оценки задачи* (11.1)–(11.4). Для получения верхней оценки заменим в задаче (11.1)–(11.4) ограничение (11.4) на ограничение следующего вида:

$$0 \le x_i \le 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.4'}$$

Тогда задача (11.1)–(11.4′) является задачей непрерывного линейного программирования и ее оптимальное решение может быть получено с использованием, например, симплекс-процедуры.

Обозначим решение задачи (11.1)–(11.4′) через $x^{\text{опт}}$, вычислим значение целевой функции (11.1) на решении $x^{\text{опт}}$ и обозначим его через $F_{\text{в}}$. Отметим, что $x^{\text{опт}}$, вообще говоря, не является допустимым решением исходной задачи (11.1)–(11.4). Очевидно, что значение целевой функции (11.1) задачи (11.1)–(11.4) на оптимальном решении не может превышать величину $F_{\text{в}}$.

Шаг 2. *Вычисление нижней оценки задачи* (11.1)–(11.4) $F_{\text{н}}$. Сначала выбираем какое-нибудь одно из допустимых решений задачи (11.1)–(11.4), а затем на этом решении вычисляем значение целевой функции (11.1), которое и принимаем за $F_{\text{н}}$. Необходимо отметить, что чем ближе значение $F_{\text{н}}$ к значению $F_{\text{в}}$, тем более эффективно будет работать в дальнейшем схема алгоритма, и если $F_{\text{н}} = F_{\text{в}}$, то выбранное решение и будет оптимальным. Если получено, что $F_{\text{н}} < F_{\text{в}}$, переходим к следующему шагу метода.

Шаг 3. *Анализ текущих оценок при формировании портфеля.* Если на шаге 2 алгоритма выполняется соотношение $F_{\text{н}} < F_{\text{в}}$, то переходим к формированию очередного портфеля. В процессе формирования нового портфеля происходит вычисление текущих верхних оценок по формуле

$$F_{\text{в}}^{\text{тек}}(K) = \sum_{i \in K} V_i \bar{\gamma}_i + F_{\text{в}}(N \setminus K), \tag{11.5}$$

где K — множество лотов, которые уже вошли в портфель;
N — множество всех лотов;
$N \setminus K$ — остаток неприобретенных лотов;
$F_{\text{в}}(N \setminus K)$ — верхняя оценка задачи (11.1)–(11.4) на множестве лотов $N \setminus K$ и при объеме финансовых ресурсов $F_K = F - \sum_{i \in K} V_i \alpha_i$.

Дальнейшее формирование нового портфеля происходит только в случае выполнения следующих условий:

$$F_в^{тек}(K) > F_н, \tag{11.6}$$

$$\sum_{i \in K} (V_i \alpha_i \beta_i) / F \leq \beta_{гр}. \tag{11.7}$$

Если хотя бы одно из ограничений (11.6), (11.7) не выполняется, переходим к формированию другого портфеля. Если (11.6) и (11.7) выполнены, выбираем очередной лот для включения его в портфель и получаем множество приобретенных лотов K_1. Очевидно, что $K \subseteq K_1$.

На множестве K_1 вычисляется $F_в^{тек}(K_1)$ по формуле (11.5) и проверяется выполнение условий (11.6) и (11.7). Продолжая эту процедуру, в итоге получим, что либо формируемый портфель будет отбракован, либо остаток финансовых средств будет таков, что ни один лот больше приобрести нельзя. В последнем случае вычисляем на полученном допустимом решении значение целевой функции (11.1). Обозначим эту величину как F^*. Если $F^* > F_н$, то в дальнейшем полагаем $F_н = F^*$ и переходим к формированию очередного инвестиционного портфеля. Процесс завершается, если при очередной корректировке $F_н$ получим $F_н = F_в$ либо если все варианты формирования портфелей рассмотрены, и тогда в качестве оптимального выбирается тот портфель, который соответствует последнему (максимальному) значению $F_н$.

11.3. ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА

В отличие от традиционной модели Марковица будем, как и ранее, предполагать, что *активы можно приобретать только лотами*, и определим значение $x_i = V_i \alpha_i / F$.

Целочисленная задача формирования инвестиционного портфеля на минимум риска

Задача Марковица на минимум риска с учетом введенных ранее обозначений может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \operatorname{cov}_{ij} \, y_i y_j x_i x_j \to \min, \tag{11.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i V_i \alpha_i \leq F, \tag{11.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i V_i \bar{\gamma}_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i V_i \alpha_i \right) \geq F + \Delta F, \tag{11.10}$$

$$y_i \in \{0;1\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.11}$$

В задаче (11.8)–(11.11) $y_i = 1$, если i-й лот включен в инвестиционный портфель, и $y_i = 0$, если этот лот не включен в портфель. Величина ΔF задает минимально необходимый прирост инвестиционных ресурсов при реализации активов портфеля в момент времени $t = T$. Значения cov_{ij} вычисляются как попарные ковариации актива i и актива j ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$; $i \neq j$).

Опишем метод направленного перебора, реализующий **схему метода ветвей и границ** для этой задачи.

Шаг 1. *Вычисление верхней оценки оптимального значения целевой функции* (11.8). Для этого решается вспомогательная задача следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i V_i \bar{\gamma}_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i V_i \alpha_i \right) \to \max, \tag{11.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i V_i \alpha_i \leq F, \tag{11.13}$$

$$y_i \in \{0;1\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.14}$$

Задача (11.12)–(11.14) является задачей линейного программирования с булевыми переменными.

Получив решение $y^{\text{опт}}$ задачи (11.12)–(11.14), сравниваем *значение целевой функции* (11.12) *на этом оптимальном решении* с правой частью ограничения (11.10):

- если оно меньше чем $F + \Delta F$, то задача (11.8)–(11.11) решения не имеет;
- если оно больше чем $F + \Delta F$, то вычисляем на оптимальном решении $y^{\text{опт}}$ значение целевой функции (11.8) и принимаем его за величину верхней оценки $F_{\text{в}}$ задачи (11.8)–(11.11).

Шаг 2. *Вычисление нижней оценки.* В качестве нижней оценки $R_{\text{н}}$ можно взять портфель, состоящий из одного лота, на котором $\sigma^2 = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \sigma_i^2$.

Если $R_{\text{н}} < R_{\text{в}}$, то переходим к шагу 3. Если $R_{\text{н}} = R_{\text{в}}$, то оптимальное решение найдено.

Шаг 3. *Вычисление текущих нижних оценок при анализе различных вариантов формирования портфелей*. Текущая нижняя оценка формируемого портфеля (при условии, что в портфель уже вошли лоты множества $K \subseteq N$ и выполняется соответствие $\sum_{i \in K} y_i V_i \alpha_i \le F$) вычисляется по следующей схеме.

Упорядочиваем все лоты множества $N \backslash K$ по соотношению

$$\frac{\bar{\gamma}_1}{\alpha_1} \ge \frac{\bar{\gamma}_2}{\alpha_2} \ge \ldots \ge \frac{\bar{\gamma}_m}{\alpha_m}$$

и проверяем выполнение условия

$$\sum_{i \in K} y_i V_i \bar{\gamma}_i + F_{\text{в}}(N \setminus K) \ge F + \Delta F. \qquad (11.15)$$

Если неравенство (11.15) выполняется, то переходим к проверке выполнения следующего неравенства:

$$\sum_{i \in K} \sigma_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i,j \in K} \sum_{j > i} \operatorname{cov}_{ij} x_i x_j +$$
$$+ \min\left\{0, \sigma_q^2 x_q^2 (n-k) + 2 \operatorname{cov}_{mp} x_m x_p\right\} < R_{\text{в}}, \qquad (11.16)$$

где cov_{mp} — минимальная отрицательная ковариация двух активов из множества активов $N \setminus K$;

x_m, x_p — равномерное распределение остатка капитала в долях после приобретения акций множества K;

σ_q^2 — минимальная дисперсия для множества активов $N \setminus K$;

$n - k$ — число лотов в множестве активов $N \backslash K$;

$x_q^2 = \left(\dfrac{F - \sum_{i \in K} V_i \alpha_i}{F(n-k)} \right)^2$ — доля финансовых средств, оставшихся после приобретения лотов множества K, равномерно распределенная между активами множества $N \backslash K$.

Если неравенство (11.16) выполняется, то выбирается очередной лот из множества $N \backslash K$, включаемый в формируемый портфель, образуется множество лотов, включенных в портфель K_1 ($K \subseteq K_1$), и вычисляется текущая верхняя оценка для лотов множества K_1.

Процесс формирования портфеля оканчивается, если при очередном включении нового лота в портфель не выполняется условие (11.15) или (11.16) либо за остаток средств нельзя приобрести ни один из оставшихся лотов, не включенных в портфель.

В последнем случае проверяем значение целевой функции (11.8) на сформированном портфеле: если оно меньше $R_в$, то полагаем в дальнейшем, что $R_в$ равно полученному значению целевой функции (11.8). Метод прекращает работу, если при очередной корректировке $R_в$ получим $R_в = R_н$ или после того, как просмотрены все варианты формирования инвестиционных портфелей. В этом случае в качестве оптимального выбирается тот портфель, которому соответствует последнее (минимальное) значение $R_в$.

Целочисленная задача формирования инвестиционного портфеля на максимум доходности

Рассмотрим **модель Марковица на максимум доходности** при ограничении на величину риска портфеля. С учетом использованных ранее обозначений она может быть формализована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i V_i(\overline{\gamma}_i - \alpha_i) + F \to \max, \tag{11.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 y_i^2 x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} \operatorname{cov}_{ij}\, y_i y_j x_i x_j \le R_{гр}, \tag{11.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i V_i \alpha_i \le F, \tag{11.19}$$

$$y_i \in \{0;1\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.20}$$

Для решения целочисленной задачи (11.17)–(11.20) будем применять используемую ранее **схему метода ветвей и границ**.

Шаг 1. *Вычисление верхней оценки оптимального значения целевой функции задачи* (11.17)–(11.20). Эта оценка может быть получена путем исключения ограничения (11.18) и замены ограничения (11.20) на ограничение вида

$$0 \le y_i \le 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.21}$$

Тогда максимум доходности портфеля задачи (11.17), (11.19), (11.21) может быть получен, как указывалось ранее, путем упорядочения лотов по величине соотношения $\overline{\gamma}_i/\alpha_i$, $i = 1, ..., n$.

Перегруппируем лоты в порядке убывания величины $\overline{\gamma}_i/\alpha_i$ и получим $\overline{\gamma}_1/\alpha_1 \ge \overline{\gamma}_2/\alpha_2 \ge ... \ge \overline{\gamma}_n/\alpha_n$. Далее будем приобретать лоты по убыванию величины $\overline{\gamma}_i/\alpha_i$ до тех пор, пока не будут израсходованы все деньги в объеме F. Этот портфель, очевидно, и будет о п т и м а л ь н ы м решением задачи (11.17), (11.19), (11.21).

Если данный портфель удовлетворяет ограничениям (11.18) и (11.20), то он также будет и решением исходной задачи (11.17)–(11.20). Если последнее условие не выполняется, переходим к шагу 2.

Шаг 2. *Вычисление нижней оценки оптимального значения целевой функции задачи*. В качестве нижней оценки задачи (11.17)–(11.20) можно принять объем исходных инвестиционных ресурсов F. Содержательно это означает, что ни один лот не приобретается и, следовательно, величина риска равна нулю.

Шаг 3. *Вычисление текущих верхних оценок оптимального значения целевой функции при формировании инвестиционного портфеля*. Текущая верхняя оценка для частично сформированного портфеля при условии, что в портфель уже вошли лоты множества K, вычисляется по следующей формуле:

$$F_{\text{в}}^{\text{тек}}(K) = \sum_{i \in K} V_i \overline{\gamma}_i + F_{\text{в}}(N \setminus K).$$

Кроме того, формируемый портфель должен удовлетворять ограничениям по уровню риска, т.е. ограничению (11.18). Для этого, после того как в портфель включены лоты множества K, должно выполняться следующее неравенство:

$$\sum_{i \in K} \sigma_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i,j \in K} \sum_{j>i} \operatorname{cov}_{ij} x_i x_j + \\ + \min\left\{0, \sigma_q^2 x_q^2 (n-k) + 2 \operatorname{cov}_{mp} x_m x_p\right\} < R_{\text{гр}}. \qquad (11.22)$$

После того как вычислено значение $F_{\text{в}}^{\text{тек}}(K)$, проверяется выполнение следующего соотношения:

$$F_{\text{в}}^{\text{тек}}(K) < F_{\text{н}}. \qquad (11.23)$$

Если условия (11.22) и (11.23) выполняются, происходит выбор очередного приобретаемого лота и формируется инвестиционный портфель, в который входит множество лотов K_1 ($K \subseteq K_1$). Если на множестве K_1 выполняются соотношения (11.22) и (11.23), то процесс формирования портфеля продолжается. В противном случае данный портфель отбраковывается и происходит переход к формированию нового инвестиционного портфеля.

В случае если удалось сформировать с учетом описанной процедуры портфель, на котором выполняются все ограничения

(11.18)–(11.20) и значение целевой функции F^* (11.17) даже больше чем $F_н$, полагаем $F_н = F^*$ и переходим к формированию нового инвестиционного портфеля.

Работа описанного алгоритма завершается, либо когда после очередной корректировки $F_н$ получено $F_в$, либо когда все варианты формирования портфеля рассмотрены. В этом случае в качестве оптимального выбирается портфель, который соответствует последнему (максимальному) значению $F_н$.

11.4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ОПТИМАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

Рассмотрим несколько практических примеров выбора оптимального портфеля ценных бумаг на основании реальных рыночных данных о котировках, представленных Российской торговой системой (РТС), а также на основании действительных значений коэффициентов риска (β_i), рассчитанных по итогам совместного проекта информационного агентства «МФД-ИнфоЦентр» и компании EGAR Technology*.

Используемый коэффициент риска рассчитывается относительно индекса РТС. На практике допустимо заменять «бету» относительно рыночного портфеля (согласно CAPM) на «бету» относительно рыночного индекса, в связи с тем что точно определить структуру рыночного портфеля, состоящего из всех акций, обращающихся на рынке, не удается. Индекс РТС рассчитывается для 68 российских акций; по состоянию на 30 мая 2005 г. он равнялся 666,79.

☐ В целях инвестирования рассмотрены семь видов российских акций, вращающихся на российском фондовом рынке и входящих в двадцатку высоколиквидных ценных бумаг, так называемые голубые фишки. Акции намеренно выбираются из различных отраслей российской экономики, поскольку такая диверсификация способствует уменьшению собственного риска портфеля.

Итак, портфель будет состоять из следующих ценных бумаг:

1) EESR;
2) LKOH;
3) RTKM;
4) GUMM;
5) SNGSP;
6) TATN;
7) YUKO.

* Компьютерные расчеты по данным примерам проведены Е.В. Виноградовой.

1. ***EESR — РАО «ЕЭС России» обыкновенные***

Отрасль: энергетика. Предприятие осуществляет контроль за использованием более 70% электрической мощности и передачей 75% электроэнергии в России.

Уставный капитал 21 558,451684 млн руб. разделен на 41 041 753 984 обыкновенных и 2 075 149 384 привилегированных акций номиналом 50 коп.

Крупнейшие акционеры: государство — 52,5%; иностранные инвесторы — 30,7%; российские юридические лица — 11,3%; российские физические лица — 5,5%.

Балансовая прибыль компании за 2000 г. составила 6430 млн руб., *чистая прибыль* — 5735 млн руб.

Капитализация: 1 374 898 758,46 долл. США.

В табл. 11.1 приведены значения β-коэффициента, а на рис. 11.1 и 11.2 — соответственно динамика β-коэффициента и курса акций EESR.

Таблица 11.1

Коэффициент риска акций EESR на 30 мая 2005 г.

Term	Current	Change(%)	1 Week Ago	1 Month Ago
30	0.92	0.02 (3.93)	0.82	0.84

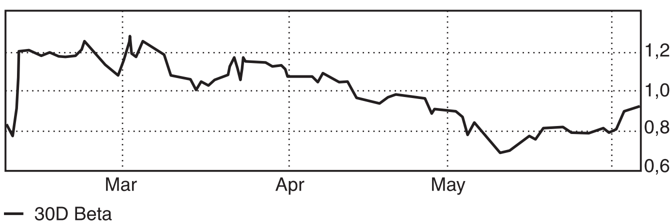

Рис. 11.1. Изменение коэффициента риска акций EESR за февраль — май 2005 г.

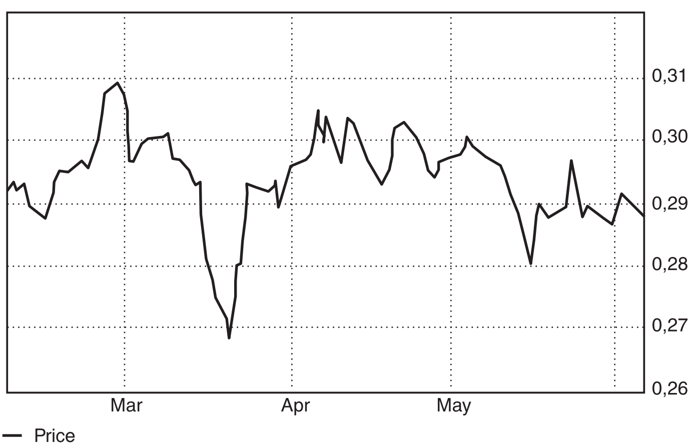

Рис. 11.2. Изменение курса акций EESR за февраль — май 2005 г. (долл. США)

2. ***LKOH — ЛУКойл-Холдинг обыкновенные***

Отрасль: нефтегазодобывающая промышленность. В состав компании входят 39 дочерних и 10 зависимых обществ.

Уставный капитал 18,664081 млн руб. разделен на 669 351 391 обыкновенную и 77 211 864 привилегированных акций номиналом 2,5 коп.

Крупнейшие акционеры: государство — 26,9%; НИК «НИКойл» — 10,5%; The Bank of New York — 22,9%; ОАО «Регистратор-НИКойл» — 7,3%; НПФ «ЛУКойл-Гарант» — 7,3%.

Балансовая прибыль компании за 2000 г. составила 4203 млн руб., *чистая прибыль* — 1807 млн руб.

Капитализация: 2 854 957 713,98 долл. США.

В табл. 11.2 приведены значения β-коэффициента, а на рис. 11.3 и 11.4 — соответственно динамика β-коэффициента и курса акций LKOH.

Таблица 11.2

Коэффициент риска акций LKOH на 30 мая 2005 г.

Term	Current	Change(%)	1 Week Ago	1 Month Ago
30	1.45	–0.01 (–1.91)	1.25	0.94

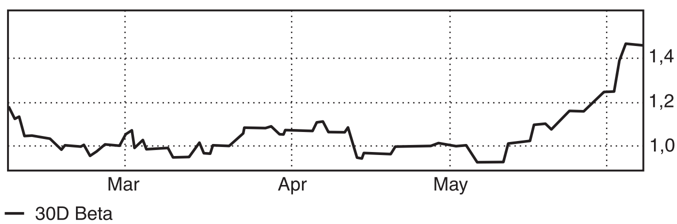

Рис. 11.3. Изменение коэффициента риска акций LKOH за февраль — май 2005 г.

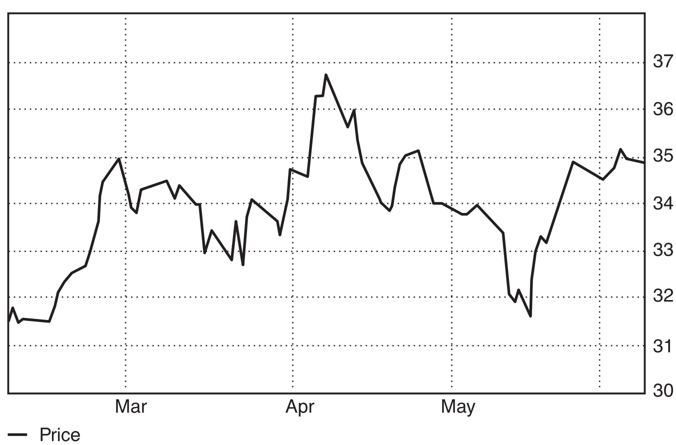

Рис. 11.4. Изменение курса акций LKOH за февраль — май 2005 г. (долл. США)

3. ***RTKM — Ростелеком обыкновенные***

Отрасль: междугородная, международная связь. ОАО «Ростелеком» является монополистом в своей отрасли.

Уставный капитал 2334 млн руб. разделен на 700 312 800 обыкновенных и 233 437 600 привилегированных акций номиналом 0,0025 руб.

Крупнейшие акционеры: ОАО «Связьинвест» — 50,66%; работники ОАО «Ростелеком» — 2,56%; иностранные акционеры — 24,64%; российские акционеры — 22,14%.

Балансовая прибыль компании за 2000 г. составила 1783 млн руб., *чистая прибыль* — 379,5 млн руб.

Капитализация: 609 272 136 долл. США.

В табл. 11.3 приведены значения β-коэффициента, а на рис. 11.5 и 11.6 — соответственно динамика β-коэффициента и курса акций RTKM.

Таблица 11.3

Коэффициент риска акций RTKM на 30 мая 2005 г.

Term	Current	Change(%)	1 Week Ago	1 Month Ago
30	0.88	0.07 (16.49)	0.71	1.06

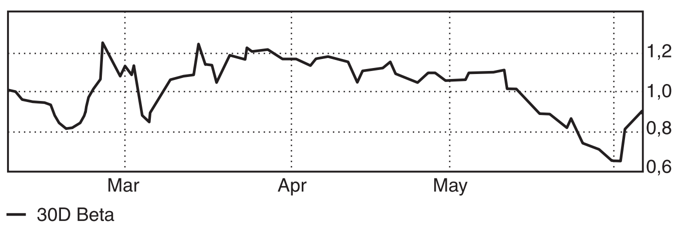

Рис. 11.5. Изменение коэффициента риска акций RTKM за февраль — май 2005 г.

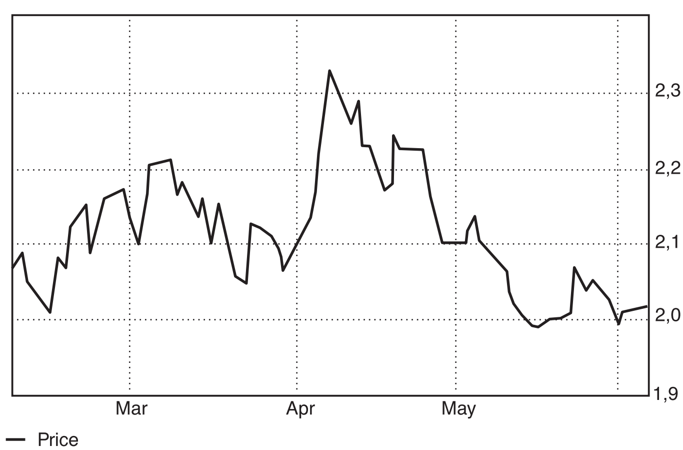

Рис. 11.6. Изменение курса акций RTKM за февраль — май 2005 г. (долл. США)

4. ***GUMM — ГУМ обыкновенные***

Отрасль: розничная торговля. Основой компании является универмаг, расположенный в здании на Красной площади; ГУМ имеет сеть из 14 крупных магазинов в Москве.

Уставный капитал 60 млн руб. разделен на 60 000 000 обыкновенных акций номиналом 1 руб.

Крупнейшие акционеры: The bank of New York (номинальный держатель) — 29,13%; Diversified Investment Company — 10,14%; ЗАО «ГУМ-Траст» — 9,69%; АКБ «СБС-Агро» — 6,26%; КБ «Чейз Манхэттен Банк Интернешнл» (номинальный держатель) — 5,68%; Bank of Bermuda (cayman) ltd.— 4,4%; Мосбизнесбанк — 3,49%.

Балансовая прибыль компании за 2000 г. составила 245,6 млн руб., *чистая прибыль* — 172,7 млн руб.

Капитализация: 33 300 000 долл. США.

В табл. 11.4 приведены значения β-коэффициента, а на рис. 11.7 и 11.8 — соответственно динамика β-коэффициента и курса акций GUMM.

Таблица 11.4

Коэффициент риска акций GUMM на 30 мая 2005 г.

Term	Current	Change(%)	1 Week Ago	1 Month Ago
30	0.31	0.34 (–33,839.46)	–0.03	0.24

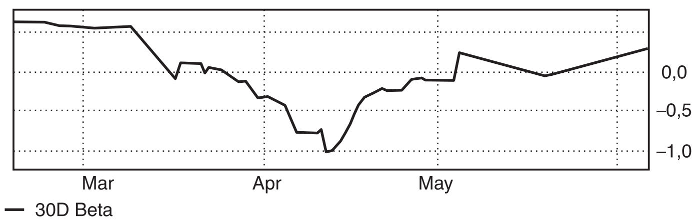

Рис. 11.7. Изменение коэффициента риска акций GUMM за февраль — май 2005 г.

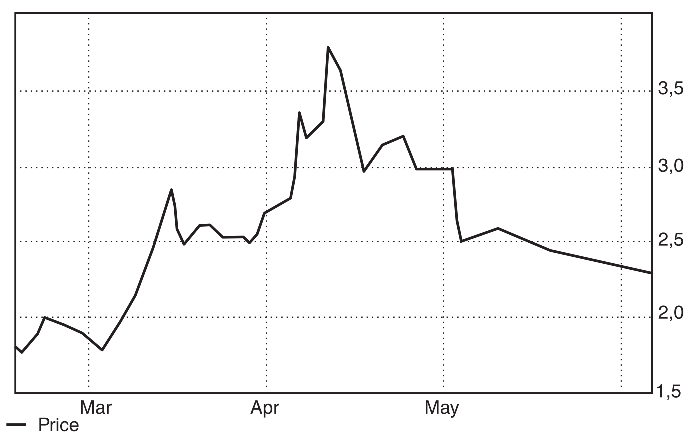

Рис. 11.8. Изменение курса акций GUMM за февраль — май 2005 г. (долл. США)

5. *SNGSP — Сургутнефтегаз привилегированные*

Отрасль: нефтегазодобывающая промышленность.
Уставный капитал 31 427,992 млн руб. разделен на 23 725 994 705 обыкновенных и 7 701 998 235 привилегированных акций номиналом 1 руб.
Крупнейший акционер: НК «Сургутнефтегаз» — 38%.
Балансовая прибыль компании за 2000 г. составила 4697,2 млн руб., *чистая прибыль* — 1994,1 млн руб.
Капитализация: 1 779 449 602,88 долл. США.

В табл. 11.5 приведены значения β-коэффициента, а на рис. 11.9 и 11.10 — соответственно динамика β-коэффициента и курса акций SNGSP.

Таблица 11.5

Коэффициент риска акций SNGSP на 30 мая 2005 г.

Term	Current	Change(%)	1 Week Ago	1 Month Ago
30	1.21	0.02 (4.24)	1.15	1.07

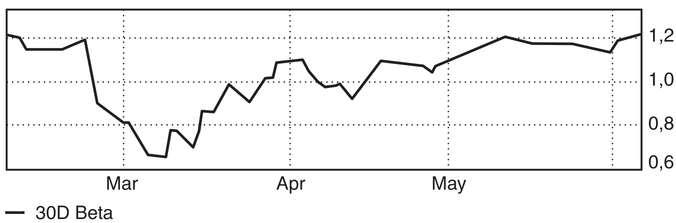

Рис. 11.9. Изменение коэффициента риска акций SNGSP за февраль — май 2005 г.

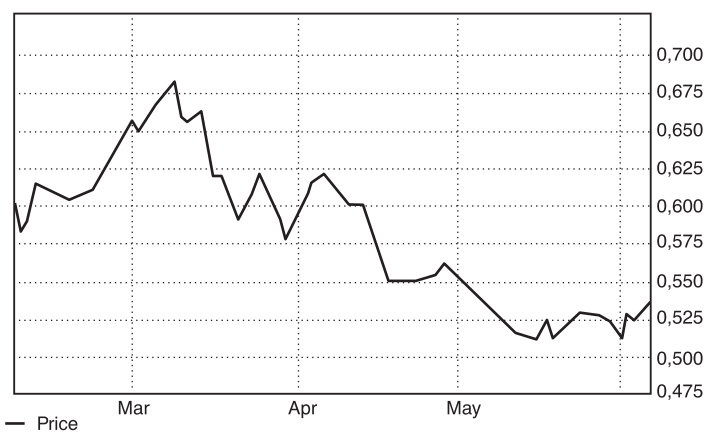

Рис. 11.10. Изменение курса акций SNGSP за февраль — май 2005 г. (долл. США)

6. *TATN — Татнефть обыкновенные*

Отрасль: нефтегазодобывающая промышленность. АО «Татнефть» осуществляет производственную деятельность на территории Республики Татарстан.
Уставный капитал 232,62 млн руб. разделен на 2 178 690 700 обыкновенных и 147 508 500 привилегированных акций номиналом 10 коп.
Крупнейший акционер: государство — 30%.
Балансовая прибыль компании за 2000 г. составила 971 млн руб.
Капитализация: 234 209 250,25 долл. США.

В табл. 11.6 приведены значения β-коэффициента, а на рис. 11.11 и 11.12 — соответственно динамика β-коэффициента и курса акций TATN.

Таблица 11.6

Коэффициент риска акций TATN на 30 мая 2005 г.

Term	Current	Change(%)	1 Week Ago	1 Month Ago
30	1.25	–0.00 (–0.72)	1.30	1.15

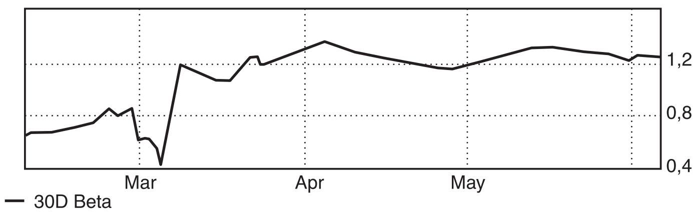

Рис. 11.11. Изменение коэффициента риска акций TATN за февраль — май 2005 г.

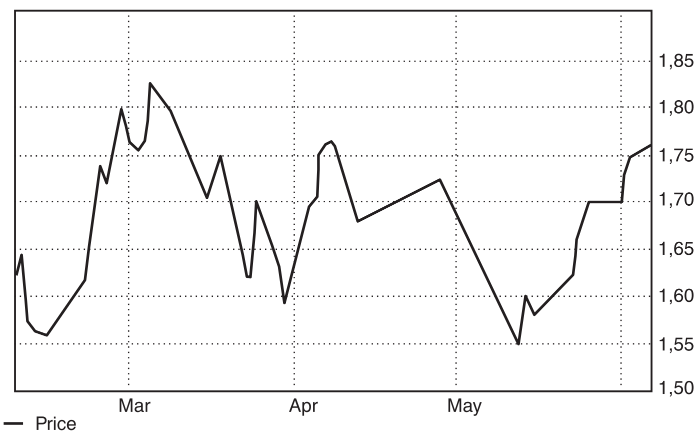

Рис. 11.12. Изменение курса акций TATN за февраль — май 2005 г. (долл. США)

7. *YUKO — ЮКОС обыкновенные*

Отрасль: нефтегазодобывающая промышленность. В состав компании входят 14 нефтедобывающих и нефтеперерабатывающих предприятий.
Уставный капитал 8,95 млн руб. разделен на 2 236 991 750 обыкновенных акций номиналом 0,4 коп.
Крупнейшие акционеры: ЗАО «Монблан» — 33,33%; ЗАО «ФЛЕКС-ОЙЛ» — 18%; ЗАО «ЮКОС-ТРАСТ» — 15%; ЗАО «Вагант» — 8,81%; ЗАО «Крекинг» — 6,13%; ЗАО «Махаон» — 5,57%; ЗАО «ИК "ЮКОС-Инвест"» — 5,3%.
Балансовая прибыль компании в 2000 г. составила 1703 млн руб.
Капитализация: 1 185 605 627,50 долл. США.

В табл. 11.7 приведены значения β-коэффициента, а на рис. 11.13 и 11.14 — соответственно динамика β-коэффициента и курса акций YUKO.

Таблица 11.7

Коэффициент риска акций YUKO на 30 мая 2005 г.

Term	Current	Change(%)	1 Week Ago	1 Month Ago
30	1.62	–0.00 (–4.65)	1.30	0,73

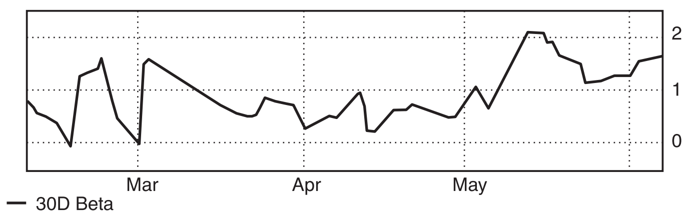

Рис. 11.13. Изменение коэффициента риска акций YUKO за февраль — май 2005 г.

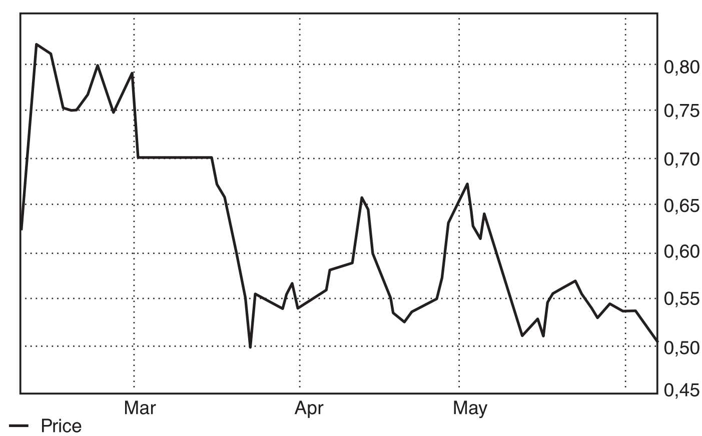

Рис. 11.14. Изменение курса акций YUKO за февраль — май 2005 г. (долл. США)

РосБизнесКонсалтинг предоставил недельный прогноз (до 7 июня 2005 г.) относительно будущих изменений курсов рассматриваемых акций (табл. 11.8).

Таблица 11.8

Прогнозируемое изменение курсов акций на 7 июня 2005 г. (долл. США за акцию)

Акция	*Курс*	
	текущий	*прогнозируемый*
EESR	0,28	0,34
LKOH	34,6	39,88
RTKM	2	2,41
GUMM	2,3	1,92
SNGSP	0,54	0,64
TATN	1,76	1,74
YUKO	0,5	0,55

Выбранные акции торгуются лотами в стандартном объеме по 100 акций.

Сформируем *начальный портфель ценных бумаг из четырех видов акций*: EESR, LKOH, RTKM и GUMM. Предположим, что мы располагаем суммой в размере 1900 долл. США и нам необходимо, чтобы общий риск портфеля ($\beta_п$) не превышал 1,25.

Решая непрерывную задачу линейного программирования (**лоты могут приобретаться частями**) с применением процедуры «Поиск решения» программы Excel, получаем следующие результаты (табл. 11.9).

Таблица 11.9

Оптимальный портфель, состоящий из четырех видов акций, при условии дробления лотов

Характеристика активов	*EESR*	*LKOH*	*RTKM*	*GUMM*	*Итого*	*Лимит*
Начальная стоимость одной акции	0,28	34,6	2	12,3		
Будущая стоимость одной акции	0,34	39,88	2,41	1,92		
Количество акций в лоте	100	100	100	100		
Коэффициент риска акций	0,92	1,45	0,88	0,31		
Инвестиции в акции	28	1451,68	200	220,32	1900	1900
Общая доходность по акциям	6	221,53	41	–36,4	232,13	
Доля риска акций в портфеле	0,01	1,11	0,09	0,04	1,25	1,25
Доля акций в портфеле	1	0,42	1	0,96		

В ячейках, выделенных жирными линиями, представлены искомые переменные (x_i) непрерывной оптимизационной задачи, иначе говоря, пропорции, в которых необходимо приобрести лоты, чтобы получить максимальный доход 232,13 долл. и не превысить граничного значения риска всего портфеля 1,25 (см. затененные ячейки).

Теперь расширим инвестируемую область на одну акцию SNGSP, присоединив ее к сформированному ранее портфелю и сохранив все ограничения на риск и инвестируемую сумму. Используя средства автоматизации Excel, получаем ответ, что при выбранных условиях оптимальное решение не может быть найдено. Тогда, увеличив инвестируемую сумму до 2000 долл., получим следующее решение (табл. 11.10).

Таблица 11.10

Оптимальный портфель, состоящий из пяти видов акций, при условии дробления лотов

Характеристика активов	*EESR*	*LKOH*	*RTKM*	*GUMM*	*SNGSP*	*Итого*	*Лимит*
Начальная стоимость одной акции	0,28	34,6	2	12,3	0,54		
Будущая стоимость одной акции	0,34	39,88	2,41	1,92	0,64		
Количество акций в лоте	100	100	100	100	100		
Коэффициент риска акций	0,92	1,45	0,88	0,31	1,21		
Инвестиции в акции	28	1504,66	200	230	37,34	2000	2000
Общая доходность по акциям	6	229,61	41	–38	6,91	245,52	
Доля риска акций в портфеле	0,01	1,09	0,09	0,04	0,02	1,2499	1,25
Доля акций в портфеле	1	0,43	1	1	0,69		

Несмотря на то что была добавлена акция с высоким коэффициентом риска ($\beta = 1,21$), это все равно позволило незначительно снизить общий риск портфеля до 1,2499, что подтверждает основную аксиому диверсификации о снижении собственного риска портфеля инвестиций. Проще говоря, чем диверсифицированнее портфель (т.е. чем больше в него входит различных акций), тем ниже одна из составляющих общего риска портфеля — собственный риск.

Подтвердим данное утверждение несколькими примерами, увеличив последовательно портфель до шести и семи видов акций (табл. 11.11 и 11.12).

Таблица 11.11

Оптимальный портфель, состоящий из шести видов акций, при условии дробления лотов

Характеристика активов	*EESR*	*LKOH*	*RTKM*	*GUMM*	*SNGSP*	*TATN*	*Итого*	*Лимит*
Начальная стоимость одной акции	0,28	34,6	2	12,3	0,54	1,76		
Будущая стоимость одной акции	0,34	39,88	2,41	1,92	0,64	1,74		
Количество акций в лоте	100	100	100	100	100	100		
Коэффициент риска акций	0,92	1,45	0,88	0,31	1,21	1,25		
Инвестиции в акции	28	1158,66	200	230	37,25	176	1829,91	2000
Общая доходность по акциям	6	176,81	41	–38	6,90	–2	190,71	
Доля риска акций в портфеле	0,01	0,84	0,09	0,04	0,02	0,11	1,11	1,25
Доля акций в портфеле	1	0,33	1	1	0,69	1		

Акции TATN имеют еще больший коэффициент риска ($\beta = 1{,}25$), чем акции SNGSP, но независимо от этого благодаря дополнительной диверсификации сильно уменьшился риск портфеля (с 1,25 до 1,11). А поскольку курс акций TATN понизился с 1,76 до 1,74, это привело к более низкой общей доходности портфеля (190,71 против прежнего значения 245,52).

Согласно теории риска общий риск портфеля в о з р а с т а е т, если в него намеренно включить хотя бы одну *акцию с очень высокой «бетой»*, и с н и ж а е т с я, если в портфель добавить *акцию с очень низкой «бетой»*. Акции YUKO были очень рискованными на тот момент, и хотя они не были приобретены, риск всего портфеля резко возрос, что является случайным совпадением практики с теорией.

Доходность портфеля из семи видов акций самая большая из четырех рассмотренных, что происходит главным образом за счет покупки акций LKOH, как и в первом портфеле, включающем в себя четыре вида акций.

Теперь для тех же самых портфелей рассмотрим более реалистичную для рынка ситуацию, когда **акции приобретаются лотами**, и сравним полученные результаты. Для *портфеля, состоящего из четырех видов акций*, оптимальное решение не может быть найде-

Таблица 11.12

Оптимальный портфель, состоящий из семи видов акций, при условии дробления лотов

Характеристика активов	*EESR*	*LKOH*	*RTKM*	*GUMM*	*SNGSP*	*TATN*	*YUKO*	*Итого*	*Лимит*
Начальная стоимость одной акции	0,28	34,6	2	12,3	0,54	1,76	0,5		
Будущая стоимость одной акции	0,34	39,88	2,41	1,92	0,64	1,74	0,55		
Количество акций в лоте	100	100	100	100	100	100	100		
Коэффициент риска акций	0,92	1,45	0,88	0,31	1,21	1,25	1,62		
Инвестиции в акции	28	1539,93	200	0	54	0	0	1821,93	2000
Общая доходность по акциям	6	235	41	0	10	0	0	292	
Доля риска акций в портфеле	0,01	1,12	0,09	0	0,03	0	0	1,25	1,25
Доля акций в портфеле	1	0,45	1	0	1	0	0		

но при прежних ограничениях, поэтому увеличим сумму инвестирования до 2000 долл. (табл. 11.13).

Таблица 11.13

Оптимальный портфель, состоящий из четырех видов акций, при покупке акций лотами

Характеристика активов	*EESR*	*LKOH*	*RTKM*	*GUMM*	*Итого*	*Лимит*
Начальная стоимость одной акции	0,28	34,6	2	12,3		
Будущая стоимость одной акции	0,34	39,88	2,41	1,92		
Количество акций в лоте	100	100	100	100		
Коэффициент риска акций	0,92	1,45	0,88	0,31		
Инвестиции в акции	28	0	200	0	228	2000
Общая доходность по акциям	6	0	41	0	47	
Доля риска акций в портфеле	0,11	0	0,77	0	0,88	1,5
Доля акций в портфеле	1	0	1	0		

Целочисленная задача по поиску оптимального портфеля ценных бумаг выглядит значительно проще, но условия целочисленности сильно ограничивают возможности инвестирования и получения «дополнительной» доходности за счет дробления лотов.

Для *инвестиционного портфеля, состоящего из пяти видов акций*, в условиях целочисленных ограничений на покупку лотов также не может быть найдено оптимальное решение. Увеличение суммы инвестиций до 4500 долл. дает возможность сформировать представленный в табл. 11.14 оптимальный портфель.

Таблица 11.14

Оптимальный портфель, состоящий из пяти видов акций, при покупке акций лотами

Характеристика активов	*EESR*	*LKOH*	*RTKM*	*GUMM*	*SNGSP*	*Итого*	*Лимит*
Начальная стоимость одной акции	0,28	34,6	2	12,3	0,54		
Будущая стоимость одной акции	0,34	39,88	2,41	1,92	0,64		
Количество акций в лоте	100	100	100	100	100		
Коэффициент риска акций	0,92	1,45	0,88	0,31	1,21		
Инвестиции в акции	28	3460	200	0	54	3742	4500
Общая доходность по акциям	6	528	41	0	10	585	
Доля риска акций в портфеле	0,01	1,11	0,04	0	0,01	1,17	1,25
Доля акций в портфеле	1	1	1	0	1		

Оптимальные портфели в табл. 11.14 и 11.15 идентичны по своему составу ввиду того, что добавление шестого вида акций (TATN) во второй портфель никак не повлияло на его формирование.

Последний пример, представленный в табл. 11.16, наглядно демонстрирует повышение общего риска портфеля ценных бумаг вследствие включения в него акций с высокой «бетой». ■

☐ Рассмотрим еще один пример, показывающий применение модели (11.1)–(11.4). Финансовому консультанту необходимо дать рекомендации клиенту-инвестору по формированию инвестиционного портфеля согласно выдвинутым им требованиям. Частный инвестор располагает свободными денежными средствами в размере 50 тыс. долл. и анализирует варианты формирования портфеля

Таблица 11.15

Оптимальный портфель, состоящий из шести видов акций, при покупке акций лотами

Характеристика активов	*EESR*	*LKOH*	*RTKM*	*GUMM*	*SNGSP*	*TATN*	*Итого*	*Лимит*
Начальная стоимость одной акции	0,28	34,6	2	12,3	0,54	1,76		
Будущая стоимость одной акции	0,34	39,88	2,41	1,92	0,64	1,74		
Количество акций в лоте	100	100	100	100	100	100		
Коэффициент риска акций	0,92	1,45	0,88	0,31	1,21	1,25		
Инвестиции в акции	28	3460	200	0	54	0	3742	4500
Общая доходность по акциям	6	528	41	0	10	0	585	
Доля риска акций в портфеле	0,01	1,11	0,04	0	0,01	0	1,17	1,25
Доля акций в портфеле	1	1	1	0	1	0		

Таблица 11.16

Оптимальный портфель, состоящий из семи видов акций, при покупке акций лотами

Характеристика активов	*EESR*	*LKOH*	*RTKM*	*GUMM*	*SNGSP*	*TATN*	*YUKO*	*Итого*	*Лимит*
Начальная стоимость одной акции	0,28	34,6	2	12,3	0,54	1,76	0,5		
Будущая стоимость одной акции	0,34	39,88	2,41	1,92	0,64	1,74	0,55		
Количество акций в лоте	100	100	100	100	100	100	100		
Коэффициент риска акций	0,92	1,45	0,88	0,31	1,21	1,25	1,62		
Инвестиции в акции	28	3460	200	0	54	0	50	3792	4500
Общая доходность по акциям	6	528	41	0	10	0	5	590	
Доля риска акций в портфеле	0,001	1,11	0,04	0	0,01	0	0,02	1,19	1,25
Доля акций в портфеле	1	1	1	0	1	0	1		

акций нефтедобывающих и нефтеперерабатывающих компаний. Перечень организаций, чьи ценные бумаги инвестор рассматривает как составляющую портфеля, следующий:

- СИДАНКО (SDNK);
- Салаватнефтеоргсинтез (SNOZ);
- Роснефть-Пурнефтегаз (PFGS);
- Оренбургнефть (ORNB);
- Варьеганнефтегаз (VJGZ).

Ограничение выбора обусловлено желанием инвестора стать акционером именно этих компаний, а также его профессиональной близостью к нефтеперерабатывающему и нефтедобывающему бизнесу.

Процесс формирования портфеля можно разбить на два этапа:

1. Расчет коэффициентов риска каждой ценной бумаги.
2. Формирование портфеля ценных бумаг при ограничениях на суммарный риск портфеля.

На сайте quote.ru располагаются текущие котировки ценных бумаг и прогнозы от ведущих игроков рынка. Инвестор имеет доступ к этой информации и желает ограничить свой риск, использовав ее. Прогнозы инвестор использует в качестве экспертных оценок будущих стоимостей акций и на основе текущей стоимости активов и прогнозов рассчитывает коэффициент риска каждой ценной бумаги. В качестве коэффициента риска выберем β-коэффициент [см. формулу (10.13)]. Для удобства расчетов все данные представлены в долларах США.

Текущая стоимость активов приведена в табл. 11.17, прогнозы цен на акции возьмем из табл. 11.18.

Таблица 11.17

Текущая стоимость активов на 15 мая 2005 г.

Акция	SDNK	SNOZ	PFGS	ORNB	VJGZ
Цена	26	35	26	37	36

Таблица 11.18

Прогнозы будущих стоимостей акций на 15 мая 2005 г.

Эксперт	SDNK	SNOZ	PFGS	ORNB	VJGZ
1. SOVLINK	36	27	30	44	45
2. БрокерКредитСервис ИК	24	32	20	47	34
3. ТройкаДиалог	35	24	18	49	44
4. ЦентрИнвестСекьюритис ИК	30	47	36	35	52
5. УРАЛСИБ ФК	27	39	34	29	36
Среднее значение будущей стоимости акции	30,40	33,80	27,60	40,80	42,20

Также для расчетов потребуется информация о ценных бумагах из табл. 11.19.

Таблица 11.19

Дополнительная информация по ценным бумагам

Акция	*Цена*	*Количество, шт.*	*Стоимость*	*Доля рынка*
А	*1*	*2*	*3 (Гр. 1 × Гр. 2)*	*4*
SDNK	26	232 415 000	6 042 790 000,00	0,51
SNOZ	35	18 550 851	649 279 785,00	0,05
PFGS	26	83 524 525	2 171 637 650,00	0,18
ORNB	37	66 060 625	2 444 243 125,00	0,20
VJGZ	36	18 091 110	651 279 960,00	0,05

Столбец «Доля рынка» определяется как отношение каждого элемента столбца 3 к сумме всех его элементов.

На основании представленных данных строим ковариационную матрицу (табл. 11.20).

Таблица 11.20

Ковариационная матрица

21,04	–18,92	–1,44	11,68	18,72
–18,92	69,36	47,12	–50,24	15,04
–1,44	47,12	53,44	–48,48	18,88
11,68	–50,24	–48,48	57,76	–2,16
18,72	15,04	18,88	–2,16	42,56

Дисперсию всего портфеля находим по формуле

$$\sigma_{п}^2 = \left(V_1 \; V_2 \ldots V_n\right) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \ldots \\ V_n \end{pmatrix},$$

где V_i — доля (вес) актива i в портфеле;

σ_{ij} — ковариация активов i и j.

В итоге получаем, что дисперсия портфеля равна 6,633.

Для расчета β найдем ковариацию каждой акции и портфеля, а также сразу вычислим значения коэффициента риска для каждой ценной бумаги (табл. 11.21). Коэффициент β рассчитывается как отношение ковариации ценной бумаги и портфеля к дисперсии портфеля.

Таблица 11.21

Расчет β-коэффициентов

Акция	*Ковариация ценной бумаги и портфеля*	β
SDNK	12,749	1,922
SNOZ	–6,687	–1,008
PFGS	2,654	0,400
ORNB	6,058	0,913
VJGZ	15,580	2,349

На этом первая часть расчетов заканчивается, мы располагаем всеми данными для формализации этапа формирования портфеля.

Указанные ценные бумаги можно приобрести на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ), лотом для торгов являются 100 единиц актива.

Для наглядности рассмотрим **четыре варианта условий для формирования портфеля**:

1. Акции покупаются на внебиржевом рынке (нет ограничений на размер лота) ($V_i = 1$), инвестор готов принять на себя риск больше среднерыночного ($\beta < 2$).
2. Акции покупаются на внебиржевом рынке (нет ограничений на размер лота) ($V_i = 1$), риск портфеля не должен превышать среднерыночного ($\beta < 1$).
3. Акции покупаются на ММВБ ($V_i = 100$), инвестор готов принять на себя риск больше среднерыночного ($\beta < 2$).
4. Акции покупаются на ММВБ ($V_i = 100$), риск портфеля не должен превышать среднерыночного ($\beta < 1$).

Для решения задачи можно использовать метод ветвей и границ, описанный ранее, либо воспользоваться сервисом MS Excel «Поиск решения» (Tool Solver). На рис. 11.15—11.18 приведены условия и результат решения для формирования каждого из четырех портфелей.

Случай 1

Условия задачи:

доступная сумма — 50 000,00 долл.

$\beta_{max} = 2$

Акция	α_i, *долл.*	γ_i, *долл.*	V_i	β_i
SDNK	26,00	30,40	1	1,922
SNOZ	35,00	33,80	1	–1,008
PFGS	26,00	27,60	1	0,400
ORNB	37,00	40,80	1	0,913
VJGZ	36,00	42,20	1	2,349

Оптимальное решение:

Акция	x_i
SDNK	**1574**
SNOZ	**0**
PFGS	**0**
ORNB	**0**
VJGZ	**252**

Акция	$x_i V_i \alpha_i$, *долл.*	$x_i V_i \gamma_i$, *долл.*	$[(x_i V_i \alpha_i / F)]\, \beta_i$
SDNK	40 924,00	47 849,60	1,573
SNOZ	0,00	0,00	0,000
PFGS	0,00	0,00	0,000
ORNB	0,00	0,00	0,000
VJGZ	9072,00	10 634,40	0,426

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \gamma_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} x_i V_i \alpha_i \right) = \mathbf{58\,488,00\ долл.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i V_i \alpha_i) / F \right] \beta_i = \mathbf{1,999}$$

Рис. 11.15. Условия и результат решения для формирования первого портфеля

Случай 2

Условия задачи:

доступная сумма — 50 000,00 долл.

$\beta_{max} = 1$

Акция	α_i, *долл.*	γ_i, *долл.*	V_i	β_i
SDNK	26,00	30,40	1	1,922
SNOZ	35,00	33,80	1	–1,008
PFGS	26,00	27,60	1	0,400
ORNB	37,00	40,80	1	0,913
VJGZ	36,00	42,20	1	2,349

Оптимальное решение:

Акция	x_i
SDNK	**170**
SNOZ	**2**
PFGS	**0**
ORNB	**1230**
VJGZ	**0**

Акция	$x_i V_i \alpha_i$, *долл.*	$x_i V_i \gamma_i$, *долл.*	$[(x_i V_i \alpha_i / F)]\, \beta_i$
SDNK	4420,00	5168,00	0,170
SNOZ	70,00	67,60	–0,001
PFGS	0,00	0,00	0,000
ORNB	45 510,00	50 184,00	0,831
VJGZ	0,00	0,00	0,000

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \gamma_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} x_i V_i \alpha_i \right) = \mathbf{55\,419,60\ долл.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i V_i \alpha_i) / F \right] \beta_i = \mathbf{1,000}$$

Рис. 11.16. Условия и результат решения для формирования второго портфеля

Случай 3

Условия задачи:

доступная сумма — 50 000,00 долл.

$\beta_{max} = 2$

Акция	α_i, *долл.*	γ_i, *долл.*	V_i	β_i
SDNK	26,00	30,40	100	1,922
SNOZ	35,00	33,80	100	–1,008
PFGS	26,00	27,60	100	0,400
ORNB	37,00	40,80	100	0,913
VJGZ	36,00	42,20	100	2,349

Оптимальное решение:

Акция	x_i
SDNK	**19**
SNOZ	**0**
PFGS	**0**
ORNB	**0**
VJGZ	**0**

Акция	$x_i V_i \alpha_i$, *долл.*	$x_i V_i \gamma_i$, *долл.*	$[(x_i V_i \alpha_i / F)]\, \beta_i$
SDNK	49 400,00	57 760,00	1,899
SNOZ	0,00	0,00	0,000
PFGS	0,00	0,00	0,000
ORNB	0,00	0,00	0,000
VJGZ	0,00	0,00	0,000

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \gamma_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} x_i V_i \alpha_i \right) = \mathbf{58\ 360{,}00\ долл.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i V_i \alpha_i) / F \right] \beta_i = \mathbf{1{,}899}$$

Рис. 11.17. Условия и результат решения для формирования третьего портфеля

Случай 4

Условия задачи:

доступная сумма — 50 000,00 долл.

$\beta_{max} = 1$

Акция	α_i, *долл.*	γ_i, *долл.*	V_i	β_i
SDNK	26,00	30,40	100	1,922
SNOZ	35,00	33,80	100	–1,008
PFGS	26,00	27,60	100	0,400
ORNB	37,00	40,80	100	0,913
VJGZ	36,00	42,20	100	2,349

Оптимальное решение:

Акция	x_i
SDNK	**2**
SNOZ	**0**
PFGS	**1**
ORNB	**11**
VJGZ	**0**

Акция	$x_i V_i \alpha_i$, *долл.*	$x_i V_i \gamma_i$, *долл.*	$[(x_i V_i \alpha_i / F)]\ \beta_i$
SDNK	5200,00	6080,00	0,200
SNOZ	0,00	0,00	0,000
PFGS	2600,00	2760,00	0,021
ORNB	40 700,00	44 880,00	0,743
VJGZ	0,00	0,00	0,000

$$\sum_{i=1}^{n} x_i V_i \gamma_i + \left(F - \sum_{i=1}^{n} x_i V_i \alpha_i \right) = \mathbf{55\,220{,}00\ долл.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i V_i \alpha_i) / F \right] \beta_i = \mathbf{0{,}964}$$

Рис. 11.18. Условия и результат решения для формирования четвертого портфеля

По результатам расчетов составим сводную таблицу (табл. 11.22).

Таблица 11.22

Анализ результатов проведенных расчетов

Случай	Целевая функция, долл.	Доходность портфеля	«Бета» портфеля
1 ($V_i = 1$; $\beta < 2$)	58 488,00	0,170	1,999
2 ($V_i = 1$; $\beta < 1$)	55 419,60	0,108	1
3 ($V_i = 100$; $\beta < 2$)	58 360,00	0,167	1,899
4 ($V_i = 100$; $\beta < 1$)	55 220,00	0,105	0,964

Из приведенной таблицы видно, что различие в результатах не очень существенное, но при этом доходность портфелей, сформированных на ММВБ, чуть ниже доходностей портфелей, сформированных на внебиржевом рынке. В то же время дополнительным плюсом является само заключение сделки на бирже, так как здесь существуют гарантии ее совершения.

Теперь подробнее рассмотрим структуру портфелей, сформированных в соответствии с заданными условиями.

В случае 1 оптимальным решением является приобретение 1574 акций SDNK и 252 акций VJGZ (см. рис. 11.15). При аналогичном отношении инвестора к риску (риск портфеля выше среднерыночного в 2 раза), но при условии, что акции торгуются лотами, оптимальным будет уже другое решение, а именно случай 3 — приобретение 1900 (19 лотов) акций SDNK (см. рис. 11.17).

Рассмотрим табл. 11.23, в которой представлена структура портфеля для различных случаев. Перемножим количество бумаг в лотах на количество лотов, чтобы структура стала нагляднее.

Таблица 11.23

Структура портфеля

Акция	Случай 1 ($V_i = 1$; $\beta < 2$)	Случай 2 ($V_i = 1$; $\beta < 1$)	Случай 3 ($V_i = 100$; $\beta < 2$)	Случай 4 ($V_i = 100$; $\beta < 1$)
SDNK	1574	170	1900	200
SNOZ	0	2	0	0
PFGS	0	0	0	100
ORNB	0	1230	0	1100
VJGZ	252	0	0	0

Исходя из начальных условий случаи 1 и 3, так же как случаи 2 и 4, схожи по отношению инвестора к риску, но мы видим, что дополнительные условия, касающиеся количества ценных бумаг в лоте, накладывают свои ограничения на структуру портфеля.

Таким образом, на основе расчетов можно дать следующее заключение. Инвестору предлагается воспользоваться услугами ММВБ для приобретения ценных бумаг, так как в результате анализа возможных вариантов приобретения было установлено, что доходность портфеля практически не зависит от места приобретения ценных бумаг, но при этом инвестор страхует себя от возможных рисков неисполнения обязательств, которые имеют место на внебиржевом рынке.

В зависимости от прогноза инвестора на развитие общей экономической ситуации в отрасли и его стремления получить определенный доход он может выбрать один из **двух вариантов формирования портфеля**:

1. Если инвестор не склонен к риску и считает, что ситуация в отрасли стабильна, то в случае покупки 2 лотов SDNK, 1 лота PFGS и 11 лотов VJGZ риск портфеля будет на уровне среднерыночного и доходность составит 10,5%.

2. Если инвестор склонен оценивать общую экономическую ситуацию в отрасли как стабильную, имеющую тенденцию к росту, то ему следует обратить внимание на вариант покупки 19 лотов SDNK; и хотя при этом значительно возрастает риск, но и доходность увеличивается более чем в 2 раза и составит 16,7%. ■

ГЛАВА 12

УПРАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЬНЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ЛОГИСТИКЕ

12.1. ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КРЕДИТОМ, ПРИВЛЕКАЕМЫМ ДЛЯ ПОПОЛНЕНИЯ ОБОРОТНЫХ СРЕДСТВ ПРЕДПРИЯТИЯ

Содержательно моделируемая ситуация заключается в следующем. Предприятие, производственная база которого позволяет выпускать н е с к о л ь к о видов продукции, привлекает кредит для закупки материальных ресурсов производства. Известен спрос по каждому виду продукции, нормы потребления материальных ресурсов и нормы времени обработки на каждом виде оборудования по каждому виду выпускаемой продукции. Необходимо, учитывая ограниченность производственной мощности предприятия и кредитных ресурсов, выпустить те виды продукции и в таком объеме, которые позволили бы в результате их реализации получить *максимальную прибыль*, являющуюся источником погашения суммы кредита и процентов по кредиту. Иными словами, необходимо потратить заемный капитал на приобретение тех видов материальных ресурсов, использование которых для выпуска конечной продукции позволяет обеспечить наиболее высокий финансовый результат в виде прибыли.

В общем виде модель может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \quad \text{(целевая функция максимизации прибыли)} \qquad (12.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij} x_i \le z_j, \; j=\overline{1,L} \quad \text{(ограничение на объем дополнительных материально-сырьевых ресурсов);} \qquad (12.2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j z_j \le V \quad \text{(ограничение на приобретение дополнительных материально-сырьевых ресурсов в пределах объема кредита);} \qquad (12.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \le k_j \tau_j, \quad j = \overline{1, K} \quad \text{(ограничение на производственные мощности);} \qquad (12.4)$$

$$x_i \le D_i, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{(ограничение по спросу на продукцию);} \qquad (12.5)$$

$$x_i \ge P_i, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{(ограничение на заказ по выпуску продукции);} \qquad (12.6)$$

$$x_i \ge 0 \quad \text{(ограничение на неотрицательность переменных);} \qquad (12.7)$$

$$x_i \in \mathbf{Z} \quad \text{(ограничение на целочисленность переменных),} \qquad (12.8)$$

где c_i — разница между ценой реализации и переменными затратами для продукции вида i ($i = 1, ..., n$);

x_i — объем выпуска продукции вида i ($i = 1, ..., n$);

l_{ij} — объем материально-сырьевых ресурсов вида j для производства единицы продукции вида i ($i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., L$);

z_j — объем дополнительных материально-сырьевых ресурсов вида j ($j = 1, ..., L$);

β_j — стоимость единицы дополнительных материально-сырьевых ресурсов вида j ($j = 1, ..., L$);

V — объем кредита;

t_{ij} — время обработки единицы продукции вида i на оборудовании вида j ($i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., K$);

k_j — число единиц оборудования вида j ($j = 1, ..., K$);

τ_j — эффективное время использования единицы оборудования вида j ($j = 1, ..., K$);

D_i — спрос на продукцию вида i ($i = 1, ..., n$);

P_i — заказ на продукцию вида i ($i = 1, ..., n$).

Оптимизационная задача (12.1)–(12.8) является задачей линейного программирования и может быть решена с использованием, например, программных средств Microsoft Excel.

Решение задачи (12.1)–(12.8) дает *распределение заемного капитала по видам и объемам закупок материальных ресурсов производства*.

Необходимо отметить, что в условиях российской банковской системы процедура получения кредита может быть достаточно продолжительной, вследствие чего могут возрасти цены как на материальные ресурсы производства, так и на конечную продукцию.

Будем считать, что цена единицы продукции вида i равна a_i, а переменные затраты на выпуск единицы продукции вида i равны b_i, следовательно, маржа

$$c_i = a_i - b_i,\ i = \overline{1, n}.$$

Далее будем предполагать, что если темп инфляции (в долях) составляет ξ, то цена единицы продукции меняется как $a_i + a_i n_i \xi$ ($i = 1, ..., n$). Здесь n_i — коэффициент, отражающий темп изменения цены на продукцию с учетом инфляции:

- если $n_i > 1$, то рост цены на продукцию вида i опережает темп инфляции;
- если $n_i < 1$, то рост цены на продукцию вида i отстает от темпа инфляции.

Переменные затраты на единицу продукции вида i представим в виде суммы:

$$b_i = b_i^1 + b_i^2,$$

где b_i^1 — переменные затраты на материально-сырьевые ресурсы;
b_i^2 — прочие переменные затраты.

Тогда увеличение переменных затрат в случае роста цен на материально-сырьевые ресурсы определяется следующим образом.

Пусть потребление материально-сырьевых ресурсов для выпуска единицы продукции вида i задается величинами $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{iL}$, а стоимость единицы материально-сырьевого ресурса вида j ($j = 1, ..., L$) — величиной β_j. Тогда переменные затраты на всю производственную программу $x = (x_1, ..., x_n)$ при уровне инфляции ξ можно представить в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{n} x_1 b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{L} (\beta_j \alpha_{ij} + m_j \beta_j \alpha_{ij} \xi),$$

где m_j — коэффициент, отражающий степень изменения цены на материально-сырьевой ресурс j-го вида при инфляции ξ.

С учетом этой формулы целевая функция (12.1) при темпе инфляции ξ будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i n_i \xi)x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{L}(\beta_j \alpha_{ij} + m_j \beta_j \alpha_{ij} \xi) \to \max. \quad (12.1')$$

В этой ситуации возникает следующий вопрос. Если на начальный момент времени эксплуатационной фазы проекта решена оптимизационная задача (12.1)–(12.8), то *будет ли меняться эта программа при линейном росте цен на готовую продукцию и материально-сырьевые ресурсы производства вместе с ростом инфляции*?

Чтобы ответить на этот вопрос, проведем анализ с учетом целочисленности решения задачи (12.1)–(12.8). Число допустимых решений (допустимых производственных программ) есть множество $X = \{x^1, ..., x^N\}$, где x^j — одно из допустимых решений $x^j = (x_1^j, ..., x_n^j)$ ($j = 1, ..., N$), а x^l ($1 \le l \le n$) — оптимальное решение задачи (12.1)–(12.8). Оценим скорость роста целевой функции (12.1′) на каждом допустимом решении. Для этого определим функцию $f^j(\xi)$ ($j = 1, ..., N$) следующим образом:

$$f^j(\xi) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i n_i \xi)x_i^j - \sum_{i=1}^{n} x_i^j b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^j \sum_{l=1}^{L}(\beta_l \alpha_{il} + m_l \beta_l \alpha_{il} \xi). \quad (12.9)$$

Сравнивая (12.1′) и (12.9), отметим, что $f^j(\xi)$ — это значение целевой функции (12.1′) на допустимом решении x^j. Нетрудно видеть, что $f^j(\xi)$ является линейной функцией ξ при фиксированной производственной программе, и, следовательно, скорость ее роста по ξ определяется величиной первой производной по ξ, т.е.

$$\frac{df^j(\xi)}{d\xi} = \sum_{i=1}^{n} a_i n_i x_i^j - \sum_{i=1}^{n} x_i^j \sum_{l=1}^{L} m_l \beta_l \alpha_{il}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Далее будем считать, что множество $X = \{x^1, ..., x^N\}$ упорядочено по возрастанию производных $(f^1(\xi))'$, $(f^2(\xi))'$, ..., $(f^N(\xi))'$, т.е.

$$(f^1(\xi))' \le (f^2(\xi))' \le ... \le (f^N(\xi))'.$$

В том случае, если *оптимальным решением исходной задачи* (12.1)–(12.8) *является решение* x^N, оно о с т а е т с я оптимальным и для задачи (12.1′)–(12.8) при любом значении $\xi \in (0, \infty)$.

Наглядную графическую интерпретацию последнего утверждения дает рис. 3.1. При $\xi = 0$ значение $f^N(\xi) > f^j(\xi)$ ($j = 1, ..., N - 1$) в силу оптимальности производственной программы для задачи (12.1)–(12.8). Далее, с учетом того, что $(f^N(\xi))' \ge (f^j(\xi))'$ ($j = 1, ...,$

$N - 1$), значение функции $f^N(\xi)$ (а значит, и значение целевой функции (12.1′) на решении x^N) остается наибольшим при любом значении параметра ξ (инфляции).

Исследуем ситуацию, когда *оптимальным является решение* x^l ($1 \le l < N$). В этом случае с ростом ξ оптимальное решение задачи (12.1′)–(12.8) будет м е н я т ь с я. Это связано с тем, что, начиная с некоторого ξ^j ($j = l+1, ..., N$), будет выполняться

$$f^j(\xi) \ge f^l(\xi) \quad \forall \xi > \xi^j, \quad j = \overline{l+1, N}.$$

Значение ξ^j, при котором $f^j(\xi^j) = f^l(\xi^j)$, можно определить из следующего соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i n_i \xi^j) x_i^j - \sum_{i=1}^{n} x_i^j b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^j \sum_{p=1}^{L}(\beta_p \alpha_{ip} + m_p \beta_p \alpha_{ip} \xi^j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i + a_i n_i \xi^j) x_i^l - \sum_{i=1}^{n} x_i^l b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^l \sum_{p=1}^{L}(\beta_p \alpha_{ip} + m_p \beta_p \alpha_{ip} \xi^j).$$

Разрешая последнее уравнение относительно ξ^j ($j = l+1, ..., N$), получим

$$\xi^j = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^l - \sum_{i=1}^{n} x_i^l b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^l \sum_{p=1}^{L} \beta_p \alpha_{ip} - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^j + \sum_{i=1}^{n} x_i^j b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^j \sum_{p=1}^{L} \beta_p \alpha_{ip}}{\sum_{i=1}^{n} a_i n_i x_i^j - \sum_{i=1}^{n} a_i n_i x_i^l - \sum_{i=1}^{n} x_i^j \sum_{p=1}^{L} m_p \beta_p \alpha_{ip} + \sum_{i=1}^{n} x_i^l \sum_{p=1}^{L} m_p \beta_p \alpha_{ip}} \tag{12.10}$$

Определив все точки ξ^j по формуле (12.10), выберем среди них минимальное значение ξ^k, т.е. $\xi^k = \min \xi^j$ ($j = l+1, ..., N$; $l < k \le N$).

Очевидно, что на интервале изменения инфляции $\xi \in (0, \xi^k)$ оптимальным будет решение x^l. При уровне инфляции более ξ^k оптимальным станет решение x^k. Этот факт имеет геометрическую интерпретацию (см. рис. 3.2).

Если $k < N$, то при дальнейшем увеличении ξ получим, что для некоторого значения ξ^{k_1} ($\xi^{k_1} > \xi^k$) значение функции $f^{k_1}(\xi) > f^k(\xi)$ ($k_1 > k$ при $\xi > \xi^{k_1}$), и это означает, что если уровень инфляции будет больше чем ξ, то оптимальным для задачи (12.1′)–(12.8) будет уже решение x^{k_1} ($k_1 > k$).

Продолжим эту процедуру до тех пор, пока оптимальным не станет решение x^N. Последующего перехода на другие оптимальные решения не произойдет при дальнейшем увеличении уровня инфляции на интервале (ξ^N, ∞). Это следует из того, что $(f^N(\xi))' \geq$ $\geq (f^j(\xi))'$ для всех $j = 1, ..., N - 1$.

Таким образом, доказано следующее **утверждение**.

Пусть $X = \{x^1, ..., x^N\}$ — множество допустимых решений задачи (12.1′)–(12.8). Если оптимальным решением (12.1′)–(12.8) при $\xi = 0$ является решение x^N, то оно останется оптимальным для любого уровня инфляции $\xi \in (0, \infty)$. Если же оптимальным решением задачи (12.1′)–(12.8) является решение x^l $(1 \leq l < N)$, то существует такое разбиение интервала изменения инфляции $(0, \infty)$ на конечное число отрезков (не более чем $N - l + 1$), что каждому отрезку можно поставить в соответствие одно из допустимых решений множества X, которое будет оставаться оптимальным при изменении инфляции в рамках соответствующего отрезка.

12.2. ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ОБОРОТНЫМ КАПИТАЛОМ ПРЕДПРИЯТИЯ С УЧЕТОМ РИСКА

В условиях переходной экономики такие параметры, как спрос на продукцию, цены реализации продукции, цены на материально-сырьевые ресурсы, в большой степени являются малопрогнозируемыми и недетерминированными величинами. Далее будем предполагать, что уровень маржи $c_i = a_i - b_i$ $(i = 1, ..., n)$ по каждому виду продукции есть величина случайная с заданным вероятностным распределением, т.е. значениями маржи могут быть числа $c_i^1, ..., c_i^m$ с вероятностями $p_1, ..., p_m$:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1; \quad p_j \geq 0.$$

В условиях этих предположений можно говорить о таком распределении кредитных ресурсов, которое одновременно *максимизировало бы ожидаемую прибыль* и *минимизировало бы риск портфельных закупок материальных ресурсов производства*. Учитывая, что существование решения, которое одновременно оптимизировало бы оба показателя, крайне маловероятно, можно говорить, следуя теории портфельных инвестиций, о решении, которое оптимизирует хотя бы один показатель, вводя численные ограничения на значения других целевых функций.

Сформулируем теперь в этих предположениях **задачу минимизации риска портфельных закупок материальных ресурсов производства**.

Обозначим через Zt_i затраты на материальные ресурсы при производстве единицы продукции вида i ($i = 1, ..., n$). Легко видеть, что с использованием введенных ранее обозначений

$$Zt_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_j .$$

Тогда, если обозначим объем выделенного кредита через V, получим, что величина затрат на материальные ресурсы при производственной программе, заданной вектором $x = (x_1, ..., x_n)$, должна удовлетворять следующему неравенству:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Zt_i \le V, \text{ или } \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Zt_i \right) / V \le 1.$$

Введем новую переменную $y_i = x_i \cdot Zt_i / V$ ($i = 1, ..., n$).

Тогда согласно теореме Марковица о п т и м а л ь н ы й по критерию минимизации риска портфель закупок материальных ресурсов будет определен при решении следующей задачи квадратичного программирования:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \mathrm{cov}_{ij}\, y_i y_j \to \min, \tag{12.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le 1, \quad y_i \ge 0, \tag{12.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{V}{Zt_i} l_{ij} \le z_j, \quad j = \overline{1, L}, \tag{12.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{V}{Zt_i} t_{il} \le k_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \tag{12.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \overline{c}_i \frac{V}{Zt_i} \ge Д_{\text{гр}}, \tag{12.15}$$

$$y_i \frac{V}{Zt_i} \le D_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{12.16}$$

где $\overline{c}_i$ — математическое ожидание маржи по i-му виду выпускаемой продукции: $\overline{c}_i = \sum_{j=1}^{m} c_i^j p_j$;

$Д_{гр}$ — граничное значение маржи по производственной программе предприятия, минимизирующей целевую функцию (12.11).

Решение задачи (12.11)–(12.16), переменными которой являются $y_1, ..., y_n$ и $z_1, ..., z_m$, дает *затраты кредитных ресурсов по каждому виду продукции* и *объем закупки материальных ресурсов производства*.

12.3. ПРИМЕР ОПТИМИЗАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ ПО УПРАВЛЕНИЮ КРЕДИТНЫМИ РЕСУРСАМИ, ПРИВЛЕКАЕМЫМИ ДЛЯ ПОПОЛНЕНИЯ ОБОРОТНЫХ СРЕДСТВ

Расчеты, связанные с определением производственной программы и закупок материальных ресурсов с использованием привлеченного заемного капитала, проводились на кондитерской фабрике ООО «Одинцовская кондитерская фабрика».

В таблицах заданы номенклатура выпускаемой продукции и цены реализации (табл. 12.1), нормы и расход времени обработки по каждому виду продукции на каждой операции (табл. 12.2 и 12.3), нормы потребления сырья по каждому виду выпускаемой продукции (табл. 12.4). Кроме того, приведены результаты компьютерных расчетов с использованием программного обеспечения Microsoft Excel: в табл. 12.5 — расчетные данные по объему закупки материальных ресурсов производства с учетом ограничений по кредиту, а в табл. 12.6 — оптимальная производственная программа предприятия.

Таблица 12.1

Прайс-лист на продукцию

Наименование	*Масса, г*	*Количество штук в коробке*	*Цена за штуку, руб.*	*Цена за коробку, руб.*
Горький шоколад	100	20	54	1080
Шоколадные конфеты в подарочных коробках				
Арриеро	150	12	48	576
Доминго	150	12	48	576
Криолло	150	12	48	576
Монти	150	12	48	576
Портобело	150	12	48	576

Окончание табл. 12.1

Наименование	*Масса, г*	*Количество штук в коробке*	*Цена за штуку, руб.*	*Цена за коробку, руб.*
Арриеро (пенал с окошком)	200	12	60	720
Доминго (пенал с окошком)	200	12	60	720
Криолло (пенал с окошком)	200	12	60	720
Монти (пенал с окошком)	200	12	60	720
Портобело (пенал с окошком)	200	12	60	720
Арриеро (ларец)	200	12	63	756
Доминго (ларец)	200	12	63	756
Криолло (ларец)	200	12	63	756
Монти (ларец)	200	12	63	756
Портобело (ларец)	200	12	63	756
Арриеро (с окошком)	200	12	69	828
Демонте (с окошком)	200	12	69	828
Пуэррто (с окошком)	200	12	69	828
Ассорти (с окошком)	200	12	69	828
Роншари	200	12	84	1008
Вильена	275	8	84	672
Доминго	265	8	84	672
Монти	275	8	84	672
Морелия	275	8	84	672
Портобело	275	8	84	672
Линия РОССО	290	8	140	1120
Порционные конфеты (блок 20 штук)				
Ассорти (сундучок)	512	4	225	900
Вильена	260	8	114	912
Портобело	260	8	114	912
Вильена	520	8	213,2	1705,6
Портобело	520	8	213,2	1705,6
Шоколадные конфеты весовые				
Золотое сердце	4 кг	1	201	804
Олений лес	4 кг	1	188	752
Снежное сердце	4 кг	1	188	752
Речной край	4 кг	1	188	752

Таблица 12.2

Нормы времени обработки 1 т продукции на каждой операции, ч

Вид продукции	*Воздушно-ситовая очистительная машина (М1)*	*Дробильно-сортировочная очис-тительная машина (М2)*	*Измельчительная машина (М3)*	*Машина для коншировакия шоколадных масс (М4)*	*Темпирующая машина (М5)*	*Агрегат для формирования шоколада (М6)*
Вильена	2	4	2	3	2	3
Портобело	2	4	2	2	1,5	2
Криолло	2	4	2	3	2	2
Роншари	2	4	2	3	2	3
Доминго	2	4	2	3	2	2
Морелия	2	4	2	3	2	2
Монти	2	4	2	3	2	2
Пуэррто	2	4	2	3	2	2
Арриеро	2	4	2	3	2	2
Горький шоколад	2	4	0	3	2	1
Демонте	2	4	2	2	1,5	2

Таблица 12.3

Время, затраченное на каждой операции по каждому виду выпускаемой продукции, ч

Вид продукции	*М1*	*М2*	*М3*	*М4*	*М5*	*М6*
Вильена	16	32	16	24	16	24
Портобело	16	32	16	16	12	16
Криолло	14	28	14	21	14	14
Роншари	18	36	18	27	18	27
Доминго	16	32	16	24	16	16
Морелия	16	32	16	24	16	16
Монти	16	32	16	24	16	16
Пуэррто	16	32	16	24	16	16
Арриеро	16	32	16	24	16	16
Горький шоколад	4	8	0	6	4	2
Демонте	16	32	16	16	12	16
Итого времени на обработку	164	328	160	230	156	179
Количество машин каждого вида	2	2	1	2	1	1
Время работы одной машины каждого вида, ч	180	180	180	180	180	180
Эффективный фонд рабочего времени по видам машин, ч	360	360	180	360	180	180

Таблица 12.4

Нормы потребления сырья, кг, для выпуска 1 кг продукции каждого вида

Вид продукции	*Какао-бобы*	*Какао-масло*	*Сахар*	*Молочная компонента*	*Эмульгатор-лецитин*	*Светлый крем*	*Темный крем*	*Лесной орех*	*Миндаль*	*Воздушный рис*
Вильена	0,2	0,15	0,1	0	0,05	0,28	0	0,22	0	0
Портобело	0,15	0,1	0,1	0,1	0,05	0,28	0	0,22	0	0
Криолло	0,2	0,15	0,1	0	0,05	0	0,28	0	0,22	0
Роншари	0,2	0,15	0,1	0	0,05	0	0	0,5	0	0
Доминго	0,15	0,1	0,1	0,1	0,05	0,35	0		0	0,15
Морелия	0,2	0,15	0,1	0	0,05	0,23	0	0,22	0,05	0
Монти	0,2	0,15	0,1	0	0,05	0	0,28	0,22	0	0
Пуэррто	0,2	0,15	0,1	0	0,05	0	0,28	0,22	0	0
Арриеро	0,2	0,15	0,1	0	0,05	0,25	0	0,25	0	0
Горький шоколад	0,4	0,32	0,2	0	0,08	0	0	0	0	0
Демонте	0,15	0,1	0,1	0,1	0,05	0	0,25	0,25	0	0

Таблица 12.5

Расход ресурсов, кг, для выпуска 1 кг продукции каждого вида

Вид продукции	*Какао-бобы*	*Какао-масло*	*Сахар*	*Молочная компонента*	*Эмульгатор-лецитин*	*Светлый крем*	*Темный крем*	*Лесной орех*	*Миндаль*	*Воздушный рис*
Вильена	1563,4	1172,55	781,7	0	390,85	2188,76	0	1719,74	0	0
Портобело	1138,95	759,3	759,3	759,3	379,65	2126,04	0	1670,46	0	0
Криолло	1387,6	1040,7	693,8	0	346,9	0	1942,64	0	1526,36	0
Роншари	1600,2	1200,15	800,1	0	400,05	0	0	4000,5	0	0
Доминго	1118,25	745,5	745,5	745,5	372,75	2609,25	0	0	0	1118,25
Морелия	1458,4	1093,8	729,2	0	364,6	1677,16	0	1604,24	364,6	0
Монти	1600	1200	800	0	400	0	2240	1760	0	0
Пуэррто	1600	1200	800	0	400	0	2240	1760	0	0
Арриеро	1567,6	1175,7	783,8	0	391,9	1959,5	0	1959,5	0	0
Горький шоколад	759,6	607,68	379,8	0	151,92	0	0	0	0	0
Демонте	1166,1	777,4	777,4	777,4	388,7	0	1943,5	1943,5	0	0
Итого затрат ресурсов	14 960,1	10 972,78	8050,6	2282,2	3987,32	10 560,71	8366,14	16 417,94	1890,96	1118,25
Запасы ресурсов, кг	**15 134**	**11 089**	**8167**	**2399**	**4045**	**10 807**	**8463**	**16 600**	**1891**	**1176**
Цена за 1 кг ресурсов, руб.	35	140	15	10	3	23	23	18	52	16
Итого, руб.	529 690	1 552 460	122 505	23 990	12 135	248 561	194 649	298 800	98 332	18 816
Инвестиции, руб.	3 099 028									

Таблица 12.6

Оптимальная производственная программа предприятия

Вид продукции	*Цена, руб./кг*	*Переменные издержки, руб./кг*	*Количество коробок*	*Выручка, руб.*	*Затраты*
Вильена	440	225	**7817**	3 439 480	1 758 825
Портобело	320	105	**7593**	2 429 760	797 265
Криолло	320	105	**6938**	2 220 160	728 490
Роншари	420	205	**8001**	3 360 420	1 640 205
Доминго	320	105	**7455**	2 385 600	782 775
Морелия	305	90	**7292**	2 224 060	656 280
Монти	320	105	**8000**	2 560 000	840 000
Пуэррто	345	130	**8000**	2 760 000	1 040 000
Арриеро	320	105	**7838**	2 508 160	822 990
Горький шоколад	540	380	**1899**	1 025 460	7 216 20
Демонте	345	130	**7774**	2 682 030	1 010 620
Суммарная выручка, руб.				27 595 130	
Переменные затраты, руб.				10 799 070	
Постоянные затраты, руб.				2 000 000	
Прибыль (целевая функция), руб.				14 796 060	

ГЛАВА 13
ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ОПТОВЫЕ ЗАКУПКИ С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Одним из показателей эффективности работы предприятия в условиях рыночных отношений является прибыль за определенный период его работы. Если рассматривать предприятия розничной торговли, то коммерческая прибыль, в частности, зависит от того, насколько рационально использовались оборотные средства предприятия (в том числе и привлеченные кредитные ресурсы для осуществления оптовых закупок, а также ценовая политика при реализации товаров в розничной сети).

В предложенной работе сформирован ряд моделей и методов оптимизации оптовых закупок торговой фирмы с учетом спроса на товары, ограничений на объем используемых оборотных средств и грузообработку склада.

В работе рассмотрены как детерминированные модели, так и ситуации, связанные с недетерминированным спросом и изменяющейся розничной ценой товаров. В этих условиях будут использованы методы многокритериальной оптимизации и методы анализа устойчивости решений при локальном возмущении исходных параметров модели. В качестве иллюстрации теоретических моделей и методов предложены численные примеры построения оптимальных решений.

13.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ОПТОВЫХ ЗАКУПОК

Вербальная постановка задачи оптимизации оптовых закупок в общем случае заключается в следующем. Торговое предприятие закупает по оптовым ценам различные виды товаров, которые затем продаются в розничной сети по ценам более высоким, чем оптовые. Необходимо закупить по оптовым ценам те товары, которые на заданном временно́м интервале будут проданы в магазине, максимизируя маржинальный доход предприятия. Ограничениями в этой задаче являются: ограничения на спрос, ограничения на объемы товаров на оптовом складе, ограничения на грузопереработку склада торгового предприятия, ограничения на бюджет закупок.

Математическая постановка такой задачи заключается в следующем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \gamma_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i \to \max; \tag{13.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i \le F; \tag{13.2}$$

$$x_i \upsilon_i \le \int_0^T \nu_i(t)\,dt, \;\; i = 1, 2, \ldots, n; \tag{13.3}$$

$$0 \le x_i \le k_i, \text{ где } k_i = \frac{V_i}{\upsilon_i}; \;\; x_i \in \mathbf{Z}^+. \tag{13.4}$$

В задаче (13.1)—(13.4) используются следующие обозначения:

υ_i — объем минимальной партии товара i при оптовой закупке ($i = 1, 2, \ldots, n$);

x_i — число минимальных партий товара i, закупаемого оптом ($i = 1, 2, \ldots, n$);

γ_i — цена продажи товара вида i в розницу ($i = 1, 2, \ldots, n$);

F — ограничение на бюджет закупок;

V_i — объем товара i на складе ($i = 1, 2, \ldots, n$);

$k_i = V_i/\upsilon_i$ — количество минимальных партий оптовых закупок на складе;

$\nu_i(t)$ — интенсивность спроса на товары вида i при розничной цене γ_i;

α — оптовая цена товара i ($i = 1, 2, \ldots, n$);

$\mathbf{Z}^+$— множество целых положительных чисел.

Таким образом, целевая функция (13.1) задает прибыль от продажи товаров. Ограничение (13.2) говорит о том, что при оптовых закупках затраты не могут превышать ограничения на бюджет закупок F. Ограничение (13.3) свидетельствует о том, что все закупленные оптом товары должны быть проданы в розничной торговле на периоде времени $(0, T)$. И, наконец, ограничение (13.4) свидетельствует о том, что объем оптовых закупок товаров не может превышать объемов, имеющихся в данный момент на складе.

Задача (13.1)—(13.4) является задачей целочисленного линейного программирования и может быть, в частности, решена с использованием метода ветвей и границ.

Вместо ограничения (13.3) в модели (13.1)—(13.4) может использоваться ограничение (13.3.1)—(13.3.2), имеющее вид

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \upsilon_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \int_0^T \nu_i(t)dt \le \theta \cdot F, \tag{13.3.1}$$

где $\theta \in [0,1]$ — наибольшая допустимая доля бюджета закупок, замороженная в нераспроданных остатках на конец периода.

Суть ограничения (3.1) состоит в допущении, что часть товара может быть не продана к концу периода $(0,T)$, но стоимость этих товаров не должна превышать величину θF.

$$\int_0^{T+\Delta T} \nu_i(t)dt \ge x_i \upsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.3.2}$$

Ограничение (3.2) свидетельствует о том, что при некотором увеличении периода $(0,T)$ на величину ΔT весь закупаемый оптом товар будет распродан.

Кроме перечисленных ограничений, в задаче (13.1)—(13.4) дополнительно могут быть заданы ограничения на грузопереработку товаров у предприятия розничной торговли с учетом возможности дополнительной аренды рабочей силы. В этой ситуации постановка задачи будет заключаться в следующем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \gamma_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \upsilon_i - W_1 \Delta_1 \to \max. \tag{13.5}$$

Здесь W_1 — дополнительно арендуемая рабочая сила, Δ_1 — цена аренды одной единицы рабочей силы.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i + W_1 \Delta_1 \le F. \tag{13.6}$$

Уравнение (13.6) — это ограничение на объем используемых средств с учетом затрат на дополнительную аренду рабочей силы.

$$x_i \upsilon_i \le \int_0^T \nu_i(t)dt,\ i = 1, 2, \ldots, n; \tag{13.7}$$

$$0 \le x_i \le k_i,\ x_i \in Z^+,\ i = 1, 2, \ldots, n; \tag{13.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i S_i \le W + W_1,\ W_1 \ge 0. \tag{13.9}$$

Здесь S_1 — трудоемкость, обработки одной минимальной партией товара с номером i;

W — имеющаяся рабочая сила склада торговой фирмы.

Очевидно, что если дополнительная аренда рабочей силы не планируется, т.е. $W_1 = 0$, то вместо ограничения (13.9) необходимо использовать ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i S_i \le W. \qquad (13.9.1)$$

Рассмотрим вычислительную схему метода ветвей и границ для решения задачи (13.5)—(13.9).

1. Определение верхней оценки для оптимального значения целевой функции (13.5).

Для этого будем предполагать, что оптовые закупки можно осуществлять в любом объеме, а не партиями минимального объема. Далее определим доходность каждого товара по формуле

$$d_i = \frac{\gamma_i}{\alpha_i}; \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и отсортируем товар в порядке убывания доходности так, чтобы $d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n$.

Сформируем непрерывный портфель оптовых закупок следующим образом: вначале в максимально возможном объеме закупается продукция первого вида, на остаток дней закупается продукция второго вида и т.д., пока либо не закончатся деньги, либо все виды товаров не будут закуплены, либо не будет нарушено одно из ограничений (13.6)—(13.9). Далее определяется значение целевой функции (13.5) на полученном портфеле оптовых закупок. Значение целевой функции на этом портфеле будем считать верхней оценкой F_u.

2. Определение нижней оценки F_l значения целевой функции (13.5) на оптимальном решении.

В качестве такой оценки можно принять значение целевой функции (13.5) на одном из допустимых решений. В частности, такое решение можно получить из портфеля, использовавшегося при определении F_u, разделив соответствующие объемы закупок на величину υ_i и отбросив дробные части полученного частного от этого деления. Полученный портфель будет допустимым для целочисленной задачи (13.5)—(13.9), и, вычислив на нем значение целевой функции (13.5), получим нижнюю оценку F_l.

Если $F_l = F_u$, то оптимальное решение задачи (13.5)–(13.9) получено. Этим решением будет допустимое решение, сформированное при определении оценки F_l. Если $F_l < F_u$, то переходим к следующему пункту метода.

3. Формирование следующего допустимого портфеля оптовых закупок с вычислением текущих верхних оценок целевой функции на этом решении.

Текущие верхние оценки целевой функции вычисляются каждый раз, когда в портфель закупок включается очередная минимальная партия товара, приобретаемого оптом. Вычисление текущей верхней оценки целевой функции на формируемом портфеле оптовых закупок производится по следующей формуле:

$$F_u^{cur}\left(\tilde{\upsilon}_1, \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\upsilon}_i \gamma_i + F_{\text{в}}\left(V \setminus \tilde{\upsilon}\right).$$

Здесь $F_u^{cur}\left(\tilde{\upsilon}_1, \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right)$ — текущая верхняя оценка целевой функции (13.5) при условии, что оптом уже закуплены товары в объеме $\left(\tilde{\upsilon}_1, \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right)$;

$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\upsilon}_i \gamma_i$ — выручка от оптовой продажи закупленных товаров в объеме $\left(\tilde{\upsilon}_1, \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right)$;

$F_в\left(V \setminus \tilde{\upsilon}\right)$ — верхняя оценка целевой функции на объеме товаров, оставшихся на складе, после покупки товаров в объеме $\tilde{\upsilon} = \left(\tilde{\upsilon}_1, \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right)$ и при условии, что оборотные средства F', используемые для этого равны

$$F' = F - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\upsilon}_i \alpha_i.$$

Здесь F' — остаток оборотных средств;

F — первоначальный объем оборотных средств;

$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\upsilon}_i \alpha_i$ — объем финансовых ресурсов, потраченных на оптовые закупки товаров в количестве $\left(\tilde{\upsilon}_1, \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right)$.

Если полученное значение $F_u^{cur}\left(\tilde{\upsilon}\ , \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right) \le F_l$, то дальнейшее формирование портфеля закупок прекращается, и переходим к формированию нового портфеля для оптовых закупок.

Если $F_u^{cur}\left(\tilde{\upsilon}_1, \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right) > F_l$, формирование портфеля оптовых закупок продолжается, т.е. выбирается очередная партия товара для оптовой закупки; она закупается, и на множестве закупленных оптом товаров снова вычисляются $F_u^{cur}\left(\tilde{\upsilon}_1, \ldots, \tilde{\upsilon}_n\right)$. Анализируя каждый раз таким образом каждое допустимое решение, мы либо отбраковываем его как неоптимальное, либо полностью сформировываем при этом значение целевой функции (13.5). F^* на данном решении будет больше, чем F_l. В этом случае корректируем значение F_l, полагая его равным F^*. Если новое значение $F_l = F_u$, то оптимальное решение найдено. Или будет решение, на котором значение целевой функции (13.1) равно F^*. Если $F^* < F_u$, продолжаем процедуру анализа допустимых портфелей с вычислением текущих верхних оценок до тех пор, пока не произойдет одно из следующих событий.

1. При очередной корректировке F_l его значение становится равным F_u.

2. Все допустимые портфели рассчитаны и $F_l < F_u$.

В первом случае оптимальным решением будет тот допустимый портфель, значение целевой функции на котором равно F_u. Во втором случае оптимальным будет допустимый портфель, которому соответствует последнее (максимальное) значение F_l.

При формировании портфеля оптовых закупок существенное влияние на результат оказывает розничная цена товара. С учетом того что повышение розничной цены товара снижает спрос на этот товар, задача оптимизации портфеля оптовых закупок может быть сформирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \gamma_i - W_1 \Delta_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i \to \max; \tag{13.5.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i + W_1 \Delta_1 \le F; \tag{13.6.1}$$

$$x_i \upsilon_i \le \int_0^T \left(\nu_i(t) - \delta_i\left(\gamma_i - \gamma_i^1\right)\right) dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.7.1}$$

Здесь δ_i — коэффициент, показывающий интенсивность спроса на товар i при увеличении розничной цены γ_i.

$$\gamma_i^1 \le \gamma_i \le \gamma_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13.8.1}$$

где γ_i^1 и γ_i^2 — соответственно максимальная и минимальная розничная цена на товар i.

$$0 \le x_i \le k_i, \ \ x_i \in \mathbf{Z}^+; \ \ i = 1, 2, \ldots, n; \ \ W_1 \ge 0; \tag{13.9.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i S_i \le W + W_1. \tag{13.9.2}$$

Таким образом, задача с переменной розничной ценой является нелинейной. Ее решение состоит из трех компонентов: объем оптовых закупок товара, задаваемый целочисленным вектором

$x = (x_1, ..., x_n)$, вектор розничных цен $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ и объем дополнительной аренды рабочей силы W_1. Отметим также, что величина $W + W_1$ в правой части неравенства (13.9.2) — это общая потребность в рабочей силе для обработки закупаемых оптом товаров.

На практике в ряде случаев торговое предприятие при ограничении оптовых закупок и их хранении на складе может дополнительно использовать кредитные ресурсы, привлекаемые под заданный процент. В этой ситуации необходимо понять, целесообразно ли привлекать кредит с точки зрения экономической эффективности и, если ответ положительный, необходимо выяснить, каким образом его использовать (покупать товары, арендовать склад или и то и другое).

Для этого рассмотрим две оптимизационные задачи. Задача 1 — это задача (13.5)—(13.9) (без кредита). Задача 2 — это ситуация, когда кредит привлекается. Математическая постановка Задачи 2 состоит в следующем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_{i(} \gamma_i - \alpha_i) - W_1 \Delta_1 - L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i + W_1 \Delta_1 - F\right) \to \max. \qquad (13.10)$$

Здесь L — процент по кредиту в долях.

$$F < \sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i + W_1 \Delta_1 \le F + V. \qquad (13.11)$$

Здесь V — максимальный объем привлекаемого кредита.

$$x_i \upsilon_i \le \int_0^T V_i(t)\,dt, \; i = 1, 2, ..., n; \qquad (13.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i S_i \le W + W_1; \qquad (13.13)$$

$$0 \le x_i \le k_i, \; x_i \in \mathbf{Z}^+, \; W_1 \ge 0. \qquad (13.14)$$

Таким образом, решая Задачу 1 и Задачу 2, выбираем тот вариант использования оборотных средств (с кредитом или без кредита), который дает большее значение целевой функции, соответственно (13.5) и (13.10).

Можно вычислить максимальную ставку, по которой целесообразно использовать заемные средства. Для этого решим следующую оптимизационную задачу:

$$L \to \max. \qquad (13.15)$$

Здесь L — ставка по кредиту в долях.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_{i(}\gamma_i - \alpha_i) - W_1\Delta_1 - L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i + W_1\Delta_1 - F\right) \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* \upsilon_{i(}\gamma_i - \alpha_i) - W_1\Delta_1. \tag{13.16}$$

Здесь $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ — оптимальное решение задачи (13.5)—(13.9) (без кредита)

$$F < \sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i + W_1\Delta_1 \leq F + V; \tag{13.17}$$

$$x_i \upsilon_i \leq \int_0^T \nu_i(t)dt, \; i = 1, 2, \ldots, n; \tag{13.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i S_i \leq W + W_1; \tag{13.19}$$

$$0 \leq x_i \leq k_i, \; x_i \in \mathbf{Z}^+, \; W_1 \geq 0. \tag{13.20}$$

13.2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ В МОДЕЛИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ОПТОВЫХ ЗАКУПОК ТОВАРОВ

Далее будем считать, что розничные цены растут вместе с ростом накопленной инфляции и также растет цена привлекаемой рабочей силы для закупаемой оптом продукции, т.е.

$$\gamma_i(\xi) = \gamma_i(0) + \varphi_i(\xi); \tag{13.21}$$

$$\Delta_1(\xi) = \Delta_1(0) + \psi(\xi); \tag{13.22}$$

Здесь $\gamma_i(0)$ — начальная розничная цена на продукцию вида i;

$\gamma_i(\xi)$ — розничная доля цена на продукцию i при уровне накопленной инфляции ξ;

$\varphi_i(\xi)$ — приращение цены на продукцию вида i при уровне накопленной инфляции ξ.

$\Delta_1(0)$ — начальная цена аренды единицы рабочей силы;

$\Delta_1(\xi)$ — цена аренды при накопленной инфляции ξ;

$\psi(\xi)$ — приращение цены аренды единицы рабочей силы при уровне накопленной инфляции ξ.

Рассмотрим множество допустимых решений задачи (13.5)—(13.9). Очевидно, что это множество конечно. Обозначим его как

$XW_1 = \left\{x^1W_1^1,\ldots,x^NW_1^N\right\}$. Здесь $x^jW_1^j$ — это вектор размерности $n+1$ и $x^jW_1^j = \left(x_1^j,\ldots,x_n^j,W_1^j\right)$.

Обозначим через $F^j(\xi)$ значение целевой функции (13.5) на решении $x^jW_1^j$ при уровне накопленной инфляции ξ, т.е.

$$F^j(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^j \upsilon_i \gamma_i(\xi) - \sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i - W_1^j \Delta_1(\xi). \tag{13.23}$$

Рассчитаем производную функции $F^j(\xi)$

$$\frac{dF^j(\xi)}{d\xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} \cdot x_i^j \upsilon_i - \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} W_1^j. \tag{13.24}$$

Очевидно, что если $\varphi_i(\xi)$ и $\psi(\xi)$ линейны, то правая часть неравенства (13.24) является постоянной величиной, и в том случае, если правая часть положительна, значение целевой функции (13.5) растет на решении $x^jW_1^j$ при росте инфляции линейными этапами. В случае если правая часть (13.24) отрицательна, значение целевой функции (13.5) на решении $x^jW_1^j$ будет убывать.

С учетом этого факта, а также конечности количества допустимых решений задачи (13.5)—(13.9) можно сделать следующие выводы.

1. Число решений любого уравнения $F^p(\xi) = F^q(\xi)$ на области $\xi > 0$ не более одного в силу линейности функций $F^p(\xi)$ и $F^q(\xi)$.
2. При росте инфляции на любом конечном интервале $\xi \in (0,\theta)$ возможны переходы от одного оптимального решения $x^pW_1^p$ к другому $x^qW_1^q$ в том случае, если $\dfrac{dF^p(\xi)}{d\xi} < \dfrac{dF^q(\xi)}{d\xi}$.
3. Число таких переходов на любом конечно интервале $(0,\theta)$ не более чем N-1, где N – число допустимых решений задачи (13.5)—(13.9).
4. Любой конечный интервал изменения инфляции $(0,\theta)$ можно разбить на конечное число отрезков таким образом, что при изменении инфляции в границах этого отрезка сохраняет оптимальность одно и то же допустимое решение задачи (13.5)—(13.9).

В случае если хотя бы одна из функций $\varphi_i(\xi)$, $\psi(\xi)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) нелинейна, очевидно, что число точек перехода может быть больше, чем N-1. В качестве примера можно рассмотреть ситуацию, когда есть два допустимых портфеля: $F^1(\xi)$ и $F^2(\xi)$ – кусочно-линейные и возрастающие на ξ.

График этих функций при изменении инфляции на отрезке $(0,\theta)$ может быть таким (рис. 13.1):

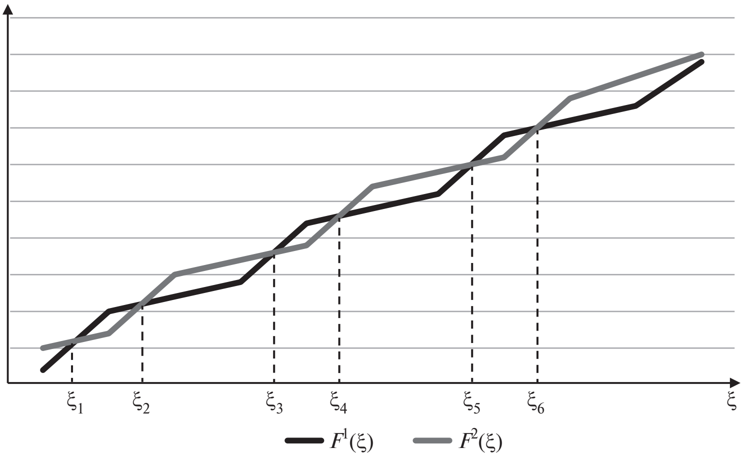

Рис. 13.1. График целевой функции для двух портфелей заказов

Здесь, соответственно, уровни накопляемой инфляции ξ_1, ..., ξ_6 есть точки перехода от оптимального решения $x^1W_1^1$ к решению $x^2W_1^2$ и от решения $x^2W_1^2$ к решению $x^1W_1^1$.

13.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ОПТОВЫХ ЗАКУПОК С УЧЕТОМ РИСКА

Ниже будут рассмотрены подходы для количественной оценки риска избыточных закупок, риска упущенной выгоды и риска доходности портфеля оптовых закупок [Доля, Лежнева, 2008; Панфилова, 2012].

Рассмотрим обобщение задачи (13.1)—(13.4), заключающееся в следующем.

Будем предполагать, что интенсивность спроса $V_i(t)$ есть случайная функция с заданным законом распределения

$$\nu_i(t) = \begin{cases} \nu_i^1(t) - P_1 \\ \nu_i^m(t) - P_m \end{cases}.$$

Здесь $P_j \geq 0; \sum_{e=1}^{m} P_j = 1.$

Тогда ограничение (13.4) может быть представлено как:

$$x_i \upsilon_i \leq \int_0^T \nu_i(t)\,dt. \qquad (13.4.1)$$

Здесь $\nu_i(t) = \sum_{e=1}^{m} \nu_i^e(t) P_e.$

Если заменить в задаче (13.1)–(13.4) ограничение (13.4) на ограничение (13.4.1), то в этом случае возникает два вида рисков.

Риск избыточных закупок связан с тем, что объем закупок выше, чем объем реализации в магазине, что приводит к дополнительным издержкам, связанным с хранением этих товаров на складе, а также к потере потребительских качеств этих товаров.

Если же товары имеют срок годности, ограниченный периодом $(0, T)$, то еще добавляются издержки, связанные с утилизацией товаров, утративших свои потребительские свойства.

Риск упущенной выгоды связан с тем, что объем спроса оказался выше, чем объем закупок, и тогда фирма теряет маржинальный доход от непроданных товаров.

Обозначим математическое ожидание суммарного спроса на продукцию вида i через $\overline{Pt_i}$, т.е. $\overline{Pt_i} = \int_0^T \nu_i(t)dt$. Обозначим $Pt_i^j = \int_0^T \nu_i(t)dt$. Рассмотрим примеры количественной оценки риска упущенной выгоды и риска избыточных закупок. Если в качестве спроса взять величину $\overline{Pt_i}$, то реальная величина спроса может быть в зависимости от ситуации как больше $\overline{Pt_i}$, так и меньше этого значения. Поэтому, если при определении оптимального портфеля закупок получим, что $x_i\upsilon_i = Pt_i$, возможна как ситуация, когда объем закупаемой оптом продукции превышает спрос, так и ситуация, когда реальный спрос оказался больше, чем Pt_i. В первом случае имеют место убытки, связанные с избытком закупаемой продукции, во втором — упущенная прибыль. Определим риск упущенной выгоды как математическое ожидание упущенной прибыли из-за того, что объем оптовых закупок продукции оказался менее реального спроса.

Формула для оценки риска упущенной выгоды R_{mo} может быть определена следующим образом:

$$R_{mo} = \sum_{i=1}^{n}\beta_i \sum_{j=1}^{m}\Delta_i^j P_j, \tag{13.25}$$

где β_i — это маржинальный доход при продаже одной единицы продукции вида i; $\beta_i = \gamma_i - \alpha_i$;

Показатель Δ_i^j задается следующим соотношением:

$$\Delta_i^j = \begin{cases} 0, \text{ если } Pt_i^j - x_i\upsilon_i \le 0 \\ Pt_i^j - x_i\upsilon_i, \text{ если } Pt_i^j - x_i\upsilon_i > 0, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Здесь x_i — количество закупленных минимальных партий товара.

Риск избыточных закупок товара R_s оценивается как математическое ожидание потерь, связанных с тем, что закупленный оптом товар не был продан в розничной сети из-за того, что реальный спрос оказался меньше, чем объем закупок. Формула для количественной оценки R_s, если учитывать только потери, связанные с утратой потребительских качеств товара, при условии, что срок хранения их на складе в магазине превышает интервал времени $(0, T)$:

$$R_s = \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=1}^{m} \theta_i^j P_j, \tag{13.26}$$

где d_i — оптовая цена покупки продукции вида i;

$$\theta_i^j = \begin{cases} 0, \text{ если } x_i \upsilon_i - Pt_i^j \le 0 \\ x_i \upsilon_i - Pt_i^j, \text{ если } x_i \upsilon_i - Pt_i^j > 0, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$.

Далее рассмотрим пример оценки риска избыточных закупок и риска упущенной выгоды с использованием формул (13.25)—(13.26). Будем считать, что объем закупок продукции первого вида $\upsilon_1 x_1 = 30$ ед. и второго вида $\upsilon_1 x_1 = 21$ ед.

Спрос на продукцию первого и второго вида задан как случайная величина с использованием табл. 13.1.

Таблица 13.1

Распределение спроса на продукцию

Вероятность спроса	*Объем спроса на продукцию 1-го вида*	*Объем спроса на продукцию 2-го вида*
$P_1 = 1/2$	30	24
$P_1 = 1/3$	27	9
$P_1 = 1/6$	36	36

Вычислим математическое ожидание спроса на продукцию первого и второго вида.

$$\overline{Pt_1} = \sum_{j=1}^{m} Pt_1^j P_j = 30 \cdot \frac{1}{2} + 27 \cdot \frac{1}{3} + 36 \cdot \frac{1}{6} = 30;$$

$$\overline{Pt_2} = \sum_{j=1}^{m} Pt_2^j P_j = 24 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{3} + 36 \cdot \frac{1}{6} = 21.$$

Учитывая положительные значения $\overline{Pt_1}$ и $\overline{Pt_2}$, портфель закупок $x = (30; 21)$ является допустимым. Воспользуемся формулами для определения риска упущенной выгоды и риска избыточных закупок в условиях, когда $\alpha_1 = 1200$ д.е., $\alpha_2 = 1000$ д.е., $\beta_1 = 800$ д.е., $\beta_1 = 500$ д.е.

$$R_{mo} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sum_{j=1}^{m} \Delta_i^j P_j = \frac{1}{6}(36 - 30) \cdot 800 + \frac{1}{2}(24 - 21) \cdot 500 +$$

$$+\frac{1}{6}(36 - 31) \cdot 500 = 2802 \text{ д.е.}$$

$$R_s = \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=1}^{m} \theta_i^j P_j = \frac{1}{3}(30 - 27) \cdot 1200 +$$

$$+\frac{1}{3}(21 - 9) \cdot 1000 = 5199 \text{ д.е.}$$

Таким образом, риск упущенной выгоды для выбранного примера равен 2802 денежных единицы, а риск избыточных закупок — 5199 денежных единиц.

С учетом определения риска упущенной выгоды и риска избыточных закупок может быть поставлена задача минимизации суммарного риска $R = R_s + R_{mo}$. В этом случае речь идет о выборе такого портфеля закупок, который минимизирует R и максимизирует доходность портфеля (формула (13.26.1)):

$$R = \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{j=1}^{m} \theta_i^j P_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sum_{j=1}^{m} \Delta_i^j P_j \qquad (13.26.1)$$

с учетом ограничений (13.2), (13.4), (13.4.1)

Учитывая многокритериальность такой задачи, может быть использован подход, основанный на сведении этой задачи к задаче однокритериальной оптимизации, определяя, например, минимум функции (26.1) с учетом ограничений на доходность портфеля. Таким образом, целевая функция (26.1) преобразуется в ограничение по доходности.

Рассмотрим методику оценки риска доходности портфеля оптовых закупок.

Оптимизационная модель (13.1)–(13.4) может быть использована для выбора портфеля оптовых закупок товаров в ситуации, когда будущая цена розничных продаж фиксирована. На практике же в силу неопределенной динамики ряда макроэкономических параметров, таких как инфляция, доходы населения, уровень безработицы, мировые цены на энергоносители и т.д., точно предсказать будущий уровень розничных цен чаще всего невозможно.

В этом случае можно использовать различного рода прогнозные модели или мнение экспертов. И в том и в другом случае определить будущую цену можно в лучшем случае как случайную величину с заданным распределением вероятностей ее реализации.

Поэтому часто будущая величина розничных цен на товары задается следующим образом:

$$\gamma_i = \begin{bmatrix} \gamma_i^1 & P_1 \\ \dots & \\ \gamma_i^m & P_m \end{bmatrix}, P_j \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, n,\ \sum_{j=1}^{m} P_j = 1.$$

Здесь γ_i^j — j -е значение розничной цены товара i;

P_j — вероятность того, что значение розничной цены на товар i будет равно γ_i^j.

Соответственно, математическое ожидание розничной цены $\overline{\gamma_i}$ товара i равно

$$\overline{\gamma_i} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_i^j P_j,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

В этой ситуации, формируя портфель оптовых закупок, кроме ожидаемой доходности портфеля, надо еще учитывать и волатильность этой доходности. Для количественной оценки волатильности доходности можно использовать, следуя Г. Марковицу, дисперсию доходности портфеля оптовых закупок. Дисперсия доходности портфеля оптовых закупок также является и показателем риска этого портфеля. Из этого следует, что задача формирования портфеля оптовых закупок может быть сформулирована как двухкритериальная, т.е. обеспечивающая выбор такого портфеля, который обладал бы максимальной ожидаемой доходностью и минимальной волатильностью доходности.

Далее будем учитывать тот факт, что в условиях многокритериальной оптимизации практически никогда не существует допустимого решения, которое оптимизирует оба критерия, поэтому часто используется следующий прием: один из критериев считается главным и определяется его максимум (минимум), а остальные критерии переводятся в ограничения. Это означает, что их значения при решении однокритериальной оптимизационной задачи не должны быть меньше (или больше) заданных значений. Воспользуемся этим подходом при формировании модели выбора портфеля оптовых закупок с учетом риска. Далее будем считать, что доля инвестиций при оптовых закупках товара вида i, если закупается x_i минимальных партий этого товара, составляет:

$$\omega_i = \frac{x_i \upsilon_i \alpha_i}{F}, \ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Здесь ω_i — доля инвестиций в товары вида i;

υ_i — объем минимальной партии оптовых закупок товара i;

x_i — число минимальных партий закупки товара i;

α_i — оптовая цена товара i;

F — величина оборотного капитала торговой фирмы.

С учетом приведенной выше формулы и используя модель Г. Марковица в условиях, когда главным критерием является риск портфеля оптовых закупок, получим следующую оптимизационную модель:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \cdot \left(\frac{x_i \upsilon_i \alpha_i}{F} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} cov_{ij} \cdot \left(\frac{x_i \upsilon_i \alpha_i}{F} \right) \cdot \left(\frac{x_j \upsilon_j \alpha_j}{F} \right) \to \min. \qquad (13.26.2)$$

В формуле (13.26.2):

δ_i^2 — дисперсия доходности товара i ($i = 1, 2, ..., n$);

cov_{ij} — ковариация доходности товаров i и j ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$; $i \neq j$).

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \left(\overline{\gamma_i} - \alpha_i \right) \geq D_b. \qquad (13.27)$$

Здесь D_b — минимально возможная доходность портфеля оптовых закупок товаров.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \upsilon_i \alpha_i}{F} \leq 1. \qquad (13.28)$$

Соотношение (13.28) является следствием ограничения (13.2), если поделить обе части неравенства (13.2) на F.

$$\int_0^T \nu_i(t)\,dt \geq x_i \upsilon_i; \ \ i = 1, 2, ..., n, \qquad (13.29)$$

где $\nu_i(t)$ — интенсивность розничных продаж товара i при цене γ_i.

$$0 \leq x_i \leq \frac{V_i}{\upsilon_i}, \ x_i \in Z^+. \qquad (13.30)$$

Здесь $\frac{V_i}{\upsilon_i}$ — количество минимальных партий оптовой продажи товара i на складе.

Рассмотрим пример формирования оптимального портфеля оптовых закупок.

Будем определять доходность актива i (величина d_i) по формуле

$$d_i = \frac{\gamma_i - \alpha_i}{\alpha_i}, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Рассмотрим пример использования модели (13.26.2)—(13.30).

Пусть необходимо сформировать портфель оптовых закупок товаров трех видов – канальных вентиляторов, шумоглушителей и фреоновых охладителей. Объем спроса на данные товары за период (0, T) составляет соответственно 50, 60 и 70 ед.

Цена оптовых закупок соответственно равна 10 руб. за единицу первого товара, 20 руб. за единицу второго товара и 18 руб. за единицу третьего товара. Будущая розничная цена товаров γ_i задается как случайная величина с помощью табл. 13.2.

Таблица 13.2

Розничные цены товаров

Вероятности	*Товар 1*	*Товар 2*	*Товар 3*
$\frac{1}{2}$	17	22	20
$\frac{1}{3}$	19	23	21
$\frac{1}{6}$	18	24	25

Минимальная партия закупки товаров $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = 10$ ед.

Объем оборотных средств предприятия $F = 2300$ руб.

Объем товаров, имеющихся в наличии на оптовом складе соответственно равен

$$V_1 = 60 \text{ ед.}; \; V_2 = 70 \text{ ед.}; \; V_3 = 70 \text{ ед.};$$

$$\int_0^T \nu_1(t)dt = 50;$$

$$\int_0^T \nu_2(t)dt = 60;$$

$$\int_0^T \nu_3(t)dt = 70.$$

Рассчитаем математическое ожидание розничных цен на товары i:

$$\overline{\gamma_1} = 17 \cdot \frac{1}{2} + 19 \cdot \frac{1}{3} + 18 \cdot \frac{1}{6} = 8{,}5 + 6{,}3 + 3 = 17{,}8;$$

$$\overline{\gamma_2} = 22 \cdot \frac{1}{2} + 23 \cdot \frac{1}{3} + 24 \cdot \frac{1}{6} = 11 + 7{,}6 + 4 = 22{,}6;$$

$$\overline{\gamma_3} = 20 \cdot \frac{1}{2} + 21 \cdot \frac{1}{3} + 25 \cdot \frac{1}{6} = 10 + 7 + 4{,}2 = 21{,}2.$$

Рассчитаем таблицу доходностей по каждому виду товаров:

$$d_1^1 = \frac{17 - 10}{10} = 0{,}7;$$

$$d_1^2 = \frac{19 - 10}{10} = 0{,}9;$$

$$d_1^3 = \frac{18 - 10}{10} = 0{,}8;$$

$$d_2^1 = \frac{22 - 20}{20} = 0{,}1;$$

$$d_2^2 = \frac{23 - 20}{20} = 0{,}15;$$

$$d_2^3 = \frac{24 - 20}{20} = 0{,}2;$$

$$d_3^1 = \frac{20 - 15}{15} = 0{,}33;$$

$$d_3^2 = \frac{21 - 15}{15} = 0{,}4;$$

$$d_3^3 = \frac{25 - 15}{15} = 0{,}66.$$

Таблица 13.3

Доходность товаров

Вероятности	*Товар 1*	*Товар 2*	*Товар 3*
$\frac{1}{2}$	0,7	0,1	0,33
$\frac{1}{3}$	0,9	0,15	0,4
$\frac{1}{6}$	0,8	0,2	0,66

С учетом табл. 13.3 проведем необходимые расчеты, т.е. определим $\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2$ и $cov_{12}, cov_{13}, cov_{23}$.

Определим математическое ожидание d_i доходностей товаров ($i = 1, 2, ..., n$):

$$\overline{d_1} = 0{,}7 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}8 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}13 = 0{,}78;$$

$$\overline{d_2} = 0{,}1 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}15 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}03 = 0{,}13;$$

$$\overline{d_3} = 0{,}33 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}4 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}66 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}165 + 0{,}133 + 0{,}11 = 0{,}41.$$

Вычислим дисперсии доходностей $\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2$.

$$\delta_1^2 = \sum_{l=1}^{3} \left(\overline{d_1} - d_1^l\right)^2 P_l = \left(0{,}78 - 0{,}7\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(0{,}78 - 0{,}9\right)^2 \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+ \left(0{,}78 - 0{,}8\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}064 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}0144 \cdot \frac{1}{3} 0{,}0004 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 0{,}032 + 0{,}005 + 0{,}00006 = 0{,}037;$$

$$\delta_2^2 = \sum_{l=1}^{3} \left(\overline{d_2} - d_2^l\right)^2 P_l = \left(0{,}13 - 0{,}1\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(0{,}13 - 0{,}15\right)^2 \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+\left(0{,}13 - 0{,}2\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}00045 + 0{,}00013 + 0{,}0008 = 0{,}00138;$$

$$\delta_3^2 = \sum_{l=1}^{3} \left(\overline{d_3} - d_3^l\right)^2 P_l = \left(0{,}41 - 0{,}33\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(0{,}41 - 0{,}4\right)^2 \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+\left(0{,}41 - 0{,}66\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}32 + 0{,}00003 + 0{,}014 = 0{,}334.$$

Определим значения и $cov_{12}, cov_{13}, cov_{23}$.

$$cov_{12} = \sum_{l=1}^{3} \left(\overline{d_1} - d_1^l\right) \cdot \left(\overline{d_2} - d_2^l\right) \cdot P_l =$$

$$= \left(0{,}78 - 0{,}7\right)\left(0{,}13 - 0{,}1\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(0{,}78 - 0{,}9\right)\left(0{,}13 - 0{,}15\right) \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+\left(0{,}78 - 0{,}8\right)\left(0{,}13 - 0{,}2\right) \cdot \frac{1}{6} = 0{,}012 + 0{,}0006 + 0{,}0002 = 0{,}0128;$$

$$cov_{13} = \sum_{l=1}^{3}\left(\overline{d_1} - d_1^l\right)\cdot\left(\overline{d_3} - d_3^l\right)\cdot P_l =$$

$$= (0{,}78 - 0{,}7)(0{,}41 - 0{,}33)\cdot\frac{1}{2} + (0{,}78 - 0{,}9)(0{,}41 - 0{,}4)\cdot\frac{1}{3} +$$

$$+(0{,}78 - 0{,}8)(0{,}41 - 0{,}66)\cdot\frac{1}{6} = 0{,}32 - 0{,}00004 + 0{,}0002 = 0{,}32;$$

$$cov_{23} = \sum_{l=1}^{3}\left(\overline{d_2} - d_2^l\right)\cdot\left(\overline{d_3} - d_3^l\right)\cdot P_l =$$

$$= (0{,}13 - 0{,}1)(0{,}41 - 0{,}33)\cdot\frac{1}{2} + (0{,}13 - 0{,}15)(0{,}41 - 0{,}4)\cdot\frac{1}{3} +$$

$$+(0{,}13 - 0{,}2)(0{,}41 - 0{,}66)\cdot\frac{1}{6} = 0{,}0012 – {,}00007 + 0{,}018 = 0{,}019.$$

Сформируем в численном виде модель (26.1)—(30) для рассматриваемого примера.

$$0{,}037\cdot\left(\frac{x_1\cdot 10\cdot 10}{2300}\right)^2 + 0{,}00138\cdot\left(\frac{x_2\cdot 10\cdot 20}{2300}\right)^2 + \\ + 0{,}334\cdot\left(\frac{x_3\cdot 10\cdot 15}{2300}\right)^2 + 2\cdot\left(0{,}0128\frac{x_1\cdot 10\cdot 10}{2300}\times\right. \\ \times\frac{x_2\cdot 10\cdot 20}{2300} + 0{,}32\frac{x_1\cdot 10\cdot 10}{2300}\cdot\frac{x_3\cdot 10\cdot 15}{2300} + \\ \left. + 0{,}019\frac{x_2\cdot 20\cdot 10}{2300}\cdot\frac{x_3\cdot 10\cdot 15}{2300}\right) \to \min. \qquad (13.31)$$

Определим значение граничной доходности портфеля как $D_b = 2500$.

$$x_1\cdot 10\cdot(17{,}8 - 10) + x_2\cdot 10\cdot(22{,}6 - 20) + \\ + x_3\cdot 10\cdot(21{,}2 - 15) \geq 2500; \qquad (13.32)$$

$$\frac{x_1\cdot 10\cdot 10}{2300} + \frac{x_2\cdot 10\cdot 20}{2300} + \frac{x_3\cdot 10\cdot 15}{2300} \leq 1; \qquad (13.33)$$

$$x_1\cdot 10 \leq 50 \Rightarrow x_1 \leq 1; \\ x_2\cdot 10 \leq 60 \Rightarrow x_2 \leq 6; \\ x_3\cdot 10 \leq 70 \Rightarrow x_3 \leq 7; \qquad (13.34)$$

$$0 \le x_1 \le \frac{60}{10} = 6;$$

$$0 \le x_2 \le \frac{70}{10} = 7; \qquad (13.35)$$

$$0 \le x_3 \le \frac{80}{10} = 8;$$

$$x_i \in Z^+.$$

Здесь $\mathbf{Z}^+$ — множество целых положительных чисел.

Объединяя ограничения (13.34) и (13.35) можно записать ограничения на число закупаемых партий товаров в следующем виде:

$$x_1 \le 5;\ x_2 \le 6;\ x_3 \le 7;\ x_i \in \mathbf{Z}^+;\ i = 1, 2, 3. \qquad (13.36)$$

Таким образом, задача (13.31)–(13.33), (13.36) определяет портфель оптовых закупок минимального риска с ограничением на его ожидаемую доходность для разобранного примера.

13.4. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ОПТОВЫХ ЗАКУПОК

В этой модели предполагается, что розничные цены на товары могут меняться в процессе его реализации. Математическая модель оптимизации портфеля оптовых закупок может быть сформирована следующим образом.

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^T (\gamma_i(t)\cdot\theta_i(t,\gamma_i(t)))dt + -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \upsilon_i - W_1\Delta_1 \to \max; \qquad (13.37)$$

$$W_1 \ge 0;\ 0 \le x_i \le k_i;\ x_i \in \mathbf{Z}^+;\ i = 1, 2, ..., n; \qquad (13.38)$$

$$\gamma_i^1 \le \gamma_i \le \gamma_i^2;\ i = 1, 2, ..., n; \qquad (13.39)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i S_i \le W + W_1; \qquad (13.40)$$

$$W_1\Delta_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \upsilon_i \alpha_i \le F_{2;} \qquad (13.41)$$

$$\int_0^T \theta_i(t,\gamma_i(t))dt = x_i\upsilon_i;\ i = 1, 2, ..., n; \qquad (13.42)$$

$$\int_0^t \theta_i(t',\gamma_i(t'))dt' \le \int_0^t \nu_i(t',\gamma_i(t'))dt';\ \forall t \in (0,T); \qquad (13.43)$$

$$\gamma_i(t) \ge 0;\ i = 1, 2, ..., n. \qquad (13.44)$$

В модели (13.37)—(13.44) были использованы следующие обозначения:

$\gamma_i(t)$ — розничная цена на товар i в момент $t \in (0,T)$;

$\theta_i(t, \gamma_i(t))$ — интенсивность продаж товара i в момент t при розничной цене $\gamma_i(t)$;

F_2 — величина оборотных средств торговой компании;

γ_i^1; γ_i^2 — максимальная и минимальная цена продаж товара i на интервале $(0,T)$;

$\nu_i(t', \gamma_i(t'))$ — интенсивность спроса на товар i в момент $t' \in (0,T)$ при цене $\gamma_i(t')$;

x_i – количество парий товара.

Решением задачи (13.37) — (13.44) будут: вектор закупок $x_i = (x_1, ..., x_n)$, вектор-функция $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$, задающая розничную цену товаров в каждый момент времени $t \in (0,T)$, дополнительно привлекаемая рабочая сила W_1, и вектор-функция $\theta_i(t, \gamma_i(t)) = \theta_1(t, \gamma_1(t)),\ \theta_2(t, \gamma_2(t)), ..., \theta_n(t, \gamma_n(t))$, задающая интенсивность продаж товаров. В общей постановке задача (13.37)—(13.44) является задачей оптимального управления.

Если же вектор-функцию $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ и вектор-функцию $\theta_i(t, \gamma_i(t))$определять на множестве кусочно-постоянных функций, то задачу (13.37)–(13.44) можно свести к задаче квадратичной оптимизации.

13.5. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОБОРОТНЫМ КАПИТАЛОМ ТОРГОВОЙ КОМПАНИИ НА ПРАКТИКЕ

Рассматриваемое торговое предприятие является частью небольшой розничной сети, в которой предусмотрено планирование и осуществление закупок отдельно для каждого магазина. Решается задача максимизации капитала, получаемого в конце месяца посредством выбора оптимального портфеля. При этом предприятию необходимо выбрать оптимальный портфель при возможности использования только собственных средств, сумма которых составляет 1 500 000 руб.

Кроме того, необходимо определить максимальную ставку по кредиту, при которой будет целесообразно использовать возможность взять некоторую сумму в кредит.

Наконец, торговому предприятию необходимо определить, насколько портфель, найденный в ходе поиска оптимального решения при возможности использования только собственных средств, устойчив относительно уровня инфляции за период.

Рассматривается портфель, состоящий из 10 товаров. Исходные для расчетов данные представлены в табл. 13.4.

Таблица 13.4

Исходные данные для расчетов

Товар	*Минимальная партия, шт.*	*Интенсивность спроса, шт.*	*Оптовая цена, руб.*	*Розничная цена, руб.*	*Наличие на складе, шт.*	*Спрос за месяц, шт.*
Колбаса вареная высшего сорта	50	103	159,05	288,23	3250	3090
Молоко питьевое пастеризованное 2,5%	100	153	20,89	35,88	5000	4590
Сыр сычужный твердый	40	72	192,03	277,57	2300	2160
Чай черный байховый	60	101	225,71	391,06	7000	3030
Мука пшеничная	100	68	7,46	25,19	2000	2040
Рис шлифованный	100	123	17,17	39,80	3200	3690
Макаронные изделия из пшеничной муки высшего сорта	50	106	13,79	48,87	4000	3180
Водка крепостью 40% об. спирта	50	67	100,70	315,45	2500	2010
Коньяк ординарный отечественный	20	23	282,88	960,54	1000	690
Пиво отечественное	100	86	25,11	69,00	3100	2580

Источник: данные Росстата, внутренняя отчетность фирмы.

Для решения данной задачи используется инструментарий программы MS Excel. Задача решается с использованием функции «Поиск решения». При этом наложено три существенных ограничения – по объему собственных средств, по интенсивности спроса и по наличию товара на оптовом складе. Кроме того, количество закупаемых минимальных партий обязательно должно быть целым числом.

Запишем в табличном виде задачу 1–4 (рис. 13.2).

Переменные: Количество закупаемых партий	
Колбаса вареная высшего сорта	60
Молоко питьевое пастеризованное 2,5%	1
Сыр сычужный твердый	0
Чай черный байховый	33
Мука пшеничная	20
Рис шлифованный	32
Макаронные изделия из пшеничной муки высшего сорта	63
Водка крепостью 40% об. спирта	40
Коньяк ординарный отечественный	34
Пиво отечественное	25

Ограничение по объему собственных средств		
	Знак	
1 495 996,1	≤	1 500 000

Ограничение по интенсивности спроса		
	Знак	
3000	≤	3090
100	≤	4590
0	≤	2160
1980	≤	3030
2000	≤	2040
3200	≤	3690
3150	≤	3180
2000	≤	2010
680	≤	690
2500	≤	2580

Ограничение по количеству товара на оптовом складе		
	Знак	
60	≤	65
1	≤	50
0	≤	57,5
33	≤	116,7
20	≤	20
32	≤	32
63	≤	80
40	≤	50
34	≤	50
25	≤	31

Рис. 13.2. Решение оптимизационной задачи с использованием офисного пакета MS Excel

Денежный поток в конце рассматриваемого периода составляет 343 828,39 руб.

Также у рассматриваемой компании есть возможность взять кредит в размере от 10 000 до 500 000 руб. При этом ставки по кредиту варьируются, и необходимо определить максимальное значение ставки, при котором использовать возможность кредитования выгодно.

Данная задача также решается с помощью встроенной функции «Поиск решения». Наложены ограничения по объему собственных средств, по интенсивности спроса и по наличию товара на оптовом складе. Кроме того, денежный поток в конце месяца должен быть не меньше, чем в ситуации без использования заемных средств.

Запишем задачу по определению максимальной ставки в табличном виде (рис. 13.3).

Денежный поток в конце рассматриваемого периода составляет 343 828,65 руб., что больше, чем в предыдущем решении. При этом максимальная ставка за период составляет 7,23%.

Переменные: Количество закупаемых партий/ставка по кредиту	
Колбаса вареная высшего сорта	61
Молоко питьевое пастеризованное 2,5%	4
Сыр сычужный твердый	о
Чай черный байховый	33
Мука пшеничная	20
Рис шлифованный	32
Макаронные изделия из пшеничной муки высшего сорта	63
Водка крепостью 40% об.спирта	40
Коньяк ординарный отечественный	34
Пиво отечественное	25
L	0,0723

Ограничения по объему финансовых средств				
	Знак		Знак	
151 000	≤	1 510 216,35	≤	2 000 000

Ограничение по интенсивности спроса		
	Знак	
3050	≤	3090
400	≤	4590
0	≤	2160
1980	≤	3030
2000	≤	2040
3200	≤	3690
3150	≤	3180
2000	≤	2010
680	≤	690
2500	≤	2580

Ограничение по количеству товара на оптовом складе		
	Знак	
61	≤	65
4	≤	50
0	≤	57,5
33	≤	116,7
20	≤	20
32	≤	32
63	≤	80
40	≤	50
34	≤	50
25	≤	31

Рис. 13.3. Решение оптимизационной задачи с использованием офисного пакета MS Excel

Далее необходимо проанализировать, насколько выбранный товарный набор в ситуации с использованием только собственных средств является устойчивым относительно уровня инфляции. За рассматриваемый период на рассматриваемый период он принял значения, которые отличались от среднего уровня на некоторый коэффициент. Значения данных коэффициентов для рассматриваемых товаров представлены в табл. 13.5. Некоторые из них отрицательные, поскольку цены снижаются.

Таблица 13.5

Значения коэффициентов, корректирующих средний уровень инфляции

Продукт	*Коэффициент*
Колбаса вареная высшего сорта	–0,3680
Молоко питьевое пастеризованное 2,5%	0,0091
Сыр сычужный твердый	–1,4919
Чай черный байховый	0,8990
Мука пшеничная	0,9244
Рис шлифованный	1,3793

Окончание табл. 13.5

Продукт	*Коэффициент*
Макаронные изделия из пшеничной муки высшего сорта	2,8337
Водка крепостью 40% об. спирта	4,5699
Коньяк ординарный отечественный	3,3921
Пиво отечественное	3,7368

Источник: расчеты по данным Росстата.

Данная задача решается с помощью встроенной функции «Поиск решения». Наложены ограничения по объему собственных средств, по интенсивности спроса и по наличию товара на оптовом складе. При этом выбранный портфель оптовых закупок не должен меняться по сравнению с ситуацией без использования заемных средств.

Запишем задачу по определению устойчивости в табличном виде (рис. 13.4).

Количество закупаемых партий	
Колбаса вареная высшего сорта	60
Молоко питьевое пастеризованное 2,5%	1
Сыр сычужный твердый	0
Чай черный байховый	33
Мука пшеничная	20
Рис шлифованный	32
Макаронные изделия из пшеничной муки высшего сорта	63
Водка крепостью 40% об. спирта	40
Коньяк ординарный отечественный	34
Пиво отечественное	25

Ограничение по объему собственных средств		
	Знак	
1 495 996,1	≤	1 500 000

Ограничение по интенсивности спроса		
	Знак	
3000	≤	3090
100	≤	4590
0	≤	2160
1980	≤	3030
2000	≤	2040
3200	≤	3690
3150	≤	3180
2000	≤	2010
680	≤	690
2500	≤	2580

Ограничение по количеству товара на оптовом складе		
	Знак	
60	≤	65
1	≤	50
0	≤	57,5
33	≤	116,7
20	≤	20
32	≤	32
63	≤	80
40	≤	50
34	≤	50
25	≤	31

Переменная: Уровень инфляции за период
0,010503

Рис. 13.4. Решение оптимизационной задачи с использованием офисного пакета MS Excel

Так, если уровень инфляции за период поднимется выше 1,0503%, другой портфель оптовых закупок станет более выгодным, чем первоначальный. При этом денежный поток в конце месяца будет равен 3 505 546,86 руб.

Рассмотренные в настоящей главе модели оптимального управления оптовыми закупками торгового предприятия в условиях неопределенности и риска рекомендованы к внедрению в качестве аналитического инструментария поддержки принятия решений на предприятиях рассматриваемого класса.

Предложенные методы и модели управления портфелем оптовых закупок предоставляют доступный инструмент, который может использоваться при принятии управленческих решений. Реализация предложенных методов может осуществляться с помощью стандартного пакета офисных программ, что является значительным плюсом при использовании их на практике.

ГЛАВА 14
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Управление проектами представляет собой совокупность различных методологий и методик, используемых при разработке и реализации проектов, которые, в свою очередь, представляют собой комплекс взаимосвязанных мероприятий, направленных на достижение поставленных целей на протяжении ограниченного времени и при ограниченных финансовых и других ресурсах.

У любого проекта имеется свой жизненный цикл, состоящий из трех основных стадий — начальной, инвестиционной и эксплуатационной. *Инвестиционная* фаза проекта является наиболее капиталоемкой во всем жизненном цикле. Она заключается в проектировании и непосредственной реализации объекта, являющегося предметом проекта. Успешное выполнение всех действий, относящихся к инвестиционной фазе проекта, зависит от правильного планирования, которое позволяет определить необходимые параметры выполнения проекта и реализовать его в заданные сроки с минимальной стоимостью в рамках нормативных затрат ресурсов.

Понятие «ресурсы» в теории управления проектами трактуется довольно широко. Это все то, чем располагают исполнители и инвесторы проекта, в первую очередь материалы, команда проекта, специалисты, непосредственно участвующие в выполнении работ проекта, информация и др. Основная задача управления ресурсами — обеспечить их оптимальное использование для реализации проекта с заданными характеристиками.

Существенную часть моделей и методов управления проектами составляют задачи построения календарных планов реализации проектов, связанных в основном с распределением ограниченных ресурсов. Мы будем рассматривать воспроизводимый (ненакапливаемый) тип ресурсов. Такие ресурсы сохраняют свою натурально-вещественную форму и по мере высвобождения могут использоваться на других работах. Если эти ресурсы простаивают, то их неиспользование на данном отрезке времени не компенсируется в будущем, т.е. они не накапливаются, поэтому такие ресурсы еще называют *ресурсами типа мощности*. Примерами подобных ресурсов являются люди и средства труда многократного использования (машины, станки, механизмы и т.д.).

При анализе эффективности проекта одним из важных показателей является продолжительность инвестиционной фазы, определяющая, в частности, время, за которое может быть создана организация, производящая продукцию или услуги, реализация которых обеспечит окупаемость проекта. В связи с этим, учитывая ограниченность жизненного цикла выпускаемой продукции и оказываемых услуг, инвестор заинтересован в сокращении инвестиционной фазы. При этом увеличивается временной интервал, на котором организация может эффективно функционировать.

Еще одним важным критерием оценки эффективности проекта является стоимость выполнения всех работ.

Рассмотрим задачи оптимизации управления ресурсами проекта при различных условиях и типах ограничений.

14.1. ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Задача о назначениях в детерминированной постановке формулируется следующим образом. Пусть необходимо выполнить n различных работ проекта, для чего можно привлечь n исполнителей, каждый из которых может выполнить любую работу за определенную плату или за определенное время. На каждую работу назначается только один исполнитель. Необходимо так распределить работы между исполнителями, чтобы общие затраты (временны́е или финансовые) были минимальными. Исходной информацией для решения этой задачи является матрица **A**, размерностью $n \times n$, в которой элемент a_{ij} задает затраты исполнителя i на выполнение работы j ($i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$). Искомыми переменными являются x_{ij} ($i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$), при этом $x_{ij} = 1$, если исполнитель i назначается на выполнение работы j, и $x_{ij} = 0$ — в противном случае.

Математическая постановка задачи заключается в следующем:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to \min; \qquad (14.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad (14.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad (14.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, ..., n, j = 1, ..., n. \qquad (14.4)$$

Задача (14.1)–(14.4) является частным случаем транспортной задачи линейного программирования и может быть решена с использованием метода ветвей и границ. В настоящее время алгоритмы метода ветвей и границ являются наиболее надежным средством решения целочисленных задач, встречающихся в практических исследованиях.

Идея метода ветвей и границ в общем состоит в разбиении допустимого множества на подмножества (правило ветвления) и вычислении оценок целевой функции на этих подмножествах, которые позволяют исключать из рассмотрения подмножества, заведомо не содержащие оптимальных точек. Относительно нашей задачи суть этого метода заключается в том, что в начале интервально ограничивается значение целевой функции с помощью верхних и нижних ее оценок, на котором обязательно будет и значение целевой функции на оптимальном решении. При формировании очередного допустимого решения вычисляются так называемые текущие нижние оценки целевой функции на этом решении, которые являются своеобразным индикатором оптимальности формируемого решения.

14.2. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ В ЗАДАЧЕ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Верхняя оценка $z_{\text{в}}$ на оптимальном решении вычисляется путем формирования некоторого допустимого решения. Таким решением, в частности, может быть решение, построенное по следующей схеме.

В матрице затрат (a_{ij}), $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$ выбирается наименьший элемент a_{kl}, где $a_{kl} = \min_i \min_j a_{ij}$. В этом случае полагаем, что исполнителю (бригаде) с номером k выделена работа (объект) с номером l $(1 \le k \le n, 1 \le l \le n)$. Далее можно считать, что в распределении объектов по исполнителям объект с номером l не участвует и исполнитель с номером k также не участвует. Следовательно, из первоначальной матрицы (a_{ij}), $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$, можно вычеркнуть строку и столбец, стоящие на пересечении элемента a_{kl} (k-й столбец и l-я строка), после чего мы переходим к матрице (a'_{ij}), которая задает затраты на выполнение работ для оставшихся бригад и оставшихся объектов. Выбираем среди элементов этой матрицы очередной минимальный элемент (a'_{fm}), где $a'_{fm} = \min\limits_{\substack{i=1,\dots,n\\ i\ne k}} \min\limits_{\substack{j=1,\dots,n\\ j\ne l}} a'_{ij}$, и считаем, что работе с номером m выделен исполнитель с номером f. Продолжая эту процедуру до тех пор, пока не будут распределены все работы по исполнителям, получим некоторое допустимое решение. Просуммировав соответствующие элементы матрицы(a_{ij}), $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$, получим значение целевой функции на этом решении, которое обозначим как $z_в$.

Приведенная процедура формирования допустимого решения во многих отраслях дает хороший результат, хотя могут быть приведены и отрицательные примеры. Такое, в частности, может произойти в том случае, когда последнему исполнителю p выделяется такой объект q, что $a_{pq} > n \cdot 100 \cdot \min\limits_{\substack{i=1,\dots,n \\ i \neq p}} \min\limits_{\substack{j=1,\dots,n \\ j \neq n}} a_{ij}$.

В этом случае сформированное допустимое решение будет далеко не оптимальным, хотя на практике такие ситуации встречаются крайне редко.

Далее вычисляется нижняя оценка целевой функции на оптимальном решении.

Выбираем в каждой строке минимальный элемент по формуле $b_i = \min\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}$. Нижняя оценка целевой функции на оптимальном решении вычисляется по формуле $z_н = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$.

Если $z_в = z_н$, то оптимальное решение сформировано; если нет, то переходим к формированию нового допустимого решения с вычислением $z_н^{тек}(K)$, где $z_н^{тек}(K)$ — нижняя текущая оценка целевой функции на формируемом решении при условии, что исполнителям множества $K \subseteq N$ (здесь N — множество всех исполнителей, K — множество исполнителей, которым выделены работы) работы уже выделены. Значение текущей нижней оценки вычисляется по следующей формуле:

$$z_н^{тек}(K) = \sum_{a_{ij} \in K} a_{ij} + z_н(N \setminus K),$$

где $\sum\limits_{a_{ij} \in K} a_{ij}$ — затраты на проведение работ, выделенных исполнителям множества K; $z_н(N \setminus K)$ — нижняя оценка затрат на работы, которые будут выделены исполнителям множества $N \setminus K$. Здесь $N \setminus K$ — это множество элементов N без элементов множества K.

Эта оценка вычисляется аналогично тому, как вычисляется оценка $z_н$, но на матрице, которая получится из исходной матрицы (a_{ij}), после того как из нее будут вычеркнуты строки, соответствующие исполнителям множества K, и столбцы, соответствующие выделенным исполнителям множества K работам.

Если после вычисления $z_{\text{н}}^{\text{тек}}(K)$ мы получим, что $z_{\text{н}}^{\text{тек}}(K) \geq z_{\text{в}}$, то дальнейшее формирование текущего решения прекращаем и переходим к формированию нового решения. Если же $z_{\text{н}}^{\text{тек}}(K) < z_{\text{в}}$, то выбираем очередного исполнителя из множества $N \backslash K$, выделяем ему работу, вычисляем $z_{\text{н}}^{\text{тек}}(K')$, $K' \subseteq K$, и осуществляем сравнение $z_{\text{н}}^{\text{тек}}(K')$ и $z_{\text{в}}$.

Продолжая эту процедуру, в итоге мы либо отбракуем формируемый вариант решения, либо получим решение, целевая функция на котором $z^* < z_{\text{в}}$. В этом случае корректируем $z_{\text{в}}$ по следующей формуле: $z^* = z_{\text{в}}$, т.е. сдвигаем влево по числовой оси значение $z_{\text{в}}$. Если при этом произошло совпадение $z_{\text{в}}$ и $z_{\text{н}}$, т.е. $z_{\text{в}} = z_{\text{н}}$, то оптимальное решение найдено. Если $z_{\text{в}} > z_{\text{н}}$, переходим к формированию допустимого плана.

Алгоритм заканчивает свою работу в двух случаях:

- при очередной корректировке $z_{\text{в}}$ получим $z_{\text{в}} = z_{\text{н}}$;
- рассмотрены все варианты формирования допустимых решений.

В этом случае в качестве оптимального решения выбирается то, которое соответствует последнему (минимальному) значению $z_{\text{в}}$.

14.3. ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ О НАЗНАЧЕНИЯХ

В этом случае предполагается, что затраты на выполнение работ не являются детерминированными, а зависят от ряда факторов и, вообще говоря, являются случайными величинами, т.е. задано вероятностное распределение a_{ij}: a_{ij}^l — с вероятностью p_l; a_{ij}^m — с вероятностью p_m; $\sum_{l=1}^{m} p_l = 1, \quad p_l \geq 0.$

Таким образом, математическое ожидание затрат на выполнение работы i исполнителем j вычисляется по формуле

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{ij}^l p_l.$$

Соответственно, дисперсия затрат на выполнение работы j исполнителем i вычисляется по формуле

$$\sigma_{ij}^2 = \sum_{l=1}^{m} (\bar{a}_{ij} - a_{ij}^l)^2 p_l.$$

Принимая в качестве количественной оценки риска суммарную дисперсию затрат при фиксированном распределении исполнителей по работам, получим следующую двухкритериальную модель распределения исполнителей по работам:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{14.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij} \to \min; \tag{14.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij} = 1; \tag{14.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij} = 1; \tag{14.8}$$

$$x_{ij} \in \{0,\ 1\},\ i = 1,\ \ldots,\ n,\ j = 1,\ \ldots,\ n. \tag{14.9}$$

Двухкритериальная задача (14.5)–(14.9) может быть сведена к однокритериальной путем замены критериев их линейной сверткой либо путем выбора главного критерия и перевода второго критерия в разряд ограничений. Выберем в качестве главного критерия минимизацию ожидаемых затрат времени на выполнение работ, а критерий минимизации риска распределений исполнителей по работам переведем в ограничения. Получим следующую однокритериальную задачу оптимизации:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{14.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij} \le R_g; \tag{14.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij} = 1; \tag{14.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij} = 1; \tag{14.13}$$

$$x_{ij} \in \{0,\ 1\},\ i = 1,\ \ldots,\ n,\ j = 1,\ \ldots,\ n. \tag{14.14}$$

Необходимо отметить, что в правой части неравенства (14.11) R_g задает максимальное значение допустимого плана при решении задачи (14.10)–(14.14). Легко понять, что R_g не может быть меньше значения R^*, где R^* — оптимальное значение целевой функции следующей оптимизационной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2 x_{ij} \to \min; \tag{14.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \tag{14.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \tag{14.17}$$

$$x_{ij} \in \{0,\ 1\},\ i = 1,\ ...,\ n, j = 1,\ ...,\ n. \tag{14.18}$$

Учитывая переборный характер задачи (14.10)–(14.14), а также то, что уже без соблюдения ограничения (14.11) она является *NP*-трудной, ниже будет изложена схема метода ветвей и границ для получения точного решения и приближенного решения с заданной точностью. Традиционно метод ветвей и границ при решении задач целочисленной оптимизации на минимум связан с вычислением верхних и нижних оценок оптимального решения и дальнейшим анализом всех вариантов назначения исполнителей на работы с вычислением так называемых нижних текущих оценок формируемого решения, которые являются своеобразным индикатором возможной оптимальности формируемого допустимого решения задачи (14.10)–(14.14). Ниже дается подробное описание схемы метода ветвей и границ в предположении, что множество всех исполнителей обозначено через N.

Шаг 1. Вычисление нижней оценки $z_{\text{н}}$ задачи (14.10)–(14.14) путем решения задачи непрерывного линейного программирования следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \to \min; \tag{14.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2 x_{ij} \le R_g; \tag{14.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \tag{14.21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad (14.22)$$

$$0 \le x_{ij} \le 1,\ i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n. \qquad (14.23)$$

Значение целевой функции (14.19) на оптимальном решении и выбирается в качестве $z_н$.

Шаг 2. Вычисление верхней оценки задачи (14.10)–(14.14) путем выбора некоторого допустимого целочисленного решения задачи (14.10)–(14.14) и вычисления на нем целевой функции (14.10). Это значение целевой функции и будет верхней оценкой $z_в$. Если $z_в = z_н$, то задача решена; если нет, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. На этом шаге осуществляется формирование очередного решения, и после того как исполнитель назначен на определенную работу, вычисляется $z_н^{тек}(K)$, где K — подмножество исполнителей ($K \subseteq N$), которым уже выделены работы. Вычисление $z_н^{тек}(K)$ происходит путем решения задачи (14.19)–(14.23) с учетом того, что если сам исполнитель i принадлежит множеству K и ему выделена работа j, то $x_{ij} = 1$. Если исполнителю i не выделена работа, то при решении задачи (14.19)–(14.23) $0 \le x_{ij} \le 1$ для всех $j \in M \backslash L$, где $M \backslash L$ — множество работ, которым не назначен исполнитель.

Если $z_н^{тек}(K) < z_в$, то выбираем очередного исполнителя и назначаем ему некоторую работу для выполнения. Если $z_н^{тек}(K) \ge z_в$, то дальнейшее формирование данного решения прерывается и переходим к анализу нового решения. Используя предложенную процедуру вычисления текущих нижних оценок при формировании решения, в конечном итоге будет либо сформировано новое допустимое решение, либо анализируемый вариант будет отброшен. Если сформировано новое решение, то на нем вычисляется значение целевой функции (14.1), которое обозначим через z^*. Если $z^* < z_н$, то сравниваем $z^* = z_н$. Если равенство выполняется, то задача решена. Если $z^* > z_н$, то в качестве $z_в$ принимаем значение z^* и переходим к анализу очередного решения.

Задача (14.10)–(14.14) решена, если при очередной корректировке $z_в$ получим $z_в = z_н$ либо когда все варианты решений проанализированы. В последнем случае в качестве оптимального выбираем то решение, которому соответствовало бы последнее (наименьшее) значение $z_в$.

Учитывая, что задача (14.1)–(14.4) даже без ограничения на риск является NP-трудной, можно использовать усеченную схему метода ветвей и границ, заключающуюся в том, что процесс поиска прекращается, если достигнута требуемая абсолютная точность решения, т.е. если $z_в - z_н < \varepsilon$, или относительная точность решения в процентах, т.е. если $\frac{z_в - z_н}{z_в} \cdot 100\% \le C\%.$

14.4. ДВА ПОДХОДА К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ В МОДЕЛИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Вернемся к исходной постановке задачи (14.1)–(14.4), где затраты на выполнение работы j исполнителем i заданы матрицей $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., n$. Будем предполагать, что существует некоторое подмножество элементов матрицы **A**, которое обозначим G^*, $G^* \subseteq \mathbf{A}$, величина которых может возрасти на некоторое $\varepsilon > 0$. Будем называть множество G^* *множеством возмущенных элементов* матрицы **A**. Матрицу $\mathbf{A}^*$, в которой значение a_{ij} для всех увеличено на ε, назовем возмущенной матрицей затрат или просто *возмущенной матрицей*. Анализ устойчивости решений для задачи (14.1)–(14.4) в описанной ситуации состоит в том, чтобы выяснить, останется ли решение задачи (14.1)–(14.4), полученное для невозмущенной матрицы **A**, оптимальным и для возмущенной матрицы $\mathbf{A}^*$.

Введем некоторые определения.

Определение 1. Пусть $x_{опт}$ — решение задачи (14.1)–(14.4) для невозмущенной матрицы **A**. Будем говорить, что $x_{опт}$ является устойчивым решением, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $x_{опт}$ остается оптимальным и для возмущенной матрицы $\mathbf{A}^*$.

Из определения, в частности, следует, что достаточным условием устойчивости оптимального решения $x_{опт}$ является его единственность. Действительно, значение целевой функции на решении $x_{опт}$ (обозначим его как $R_{опт}$) на возмущенной матрице $\mathbf{A}^*$ можно оценить следующим образом:

$$\sum_{x_{ij} \in x_{опт}} \sum a_{ij} x_{ij} + k_{опт} \cdot \varepsilon \le \sum_{x_{ij} \in \tilde{x}} \sum a_{ij} x_{ij}. \qquad (14.24)$$

Здесь $\tilde{x}$ — допустимое решение задачи (14.1)–(14.4) для невозмущенной матрицы **A**, обладающее тем свойством, что значение целевой функции на решениях $\tilde{x}$ и $x_{опт}$ для невозмущенной матрицы **A** отличаются минимально, т.е. $\min_{i \in Q}(R_i - R_{опт}) = \tilde{R},$ где Q — множество всех допустимых решений задачи (14.1)–(14.4), а $\tilde{R}$ — значение целевой функции (14.1) на решении $\tilde{x}$; $R_{опт}$ — значение целевой функции на решении $x_{опт}$.

Из неравенства (14.24) следует, что величина возмущения ε, при которой $x_{опт}$ остается оптимальным для матрицы $\mathbf{A}^*$, должна удовлетворять следующему неравенству:

$$\varepsilon \le \frac{\sum\limits_{x_{ij} \in \tilde{x}} \sum a_{ij} x_{ij} - \sum\limits_{x_{ij} \in x_{опт}} \sum a_{ij} x_{ij}}{k}. \qquad (14.25)$$

В этом случае, если число оптимальных решений задачи (14.1)–(14.4) не единственно для невозмущенной матрицы **A**, то устойчивым будет то, в которое войдет минимальное число элементов из множества G^*.

Действительно, пусть число оптимальных решений будет равно L. Тогда значение целевой функции на каждом таком решении при возмущенной матрице $\mathbf{A}^*$ вычисляется по формуле

$$R_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}^k + \alpha_k \cdot \varepsilon,$$

$k = 1, ..., L$, α_k — число элементов из множества G^* на оптимальном решении k.

Так как первое слагаемое для всех оптимальных решений на матрице затрат **A** одинаково, то величина изменения целевой функции будет определяться только вторым слагаемым и минимальное изменение будет давать то решение, в которое входит минимальное число элементов из G^*, откуда следует требуемое утверждение.

Определение 2. Пусть $x_{опт}$ — оптимальное решение задачи (14.1)–(14.4) для невозмущенной матрицы **A**. Назовем решение $x_{опт}$ абсолютно устойчивым, если оно остается оптимальным при возмущении элементов множества G^* на любое $\varepsilon > 0$, т.е. $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Утверждение 1. Оптимальное решение задачи (14.1)–(14.4) $x_{опт}$ является абсолютно устойчивым тогда и только тогда, когда в него входит минимальное число элементов из множества G^* по сравнению с другими допустимыми решениями задачи (14.1)–(14.4) для невозмущенной матрицы **A**.

Достаточность. Если $x_{опт}$ устойчиво и содержит минимальное число элементов из G^*, то для всех $\varepsilon \in (0, \infty)$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}^{опт} + k_{\min} \cdot \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}^{l} + k_l \cdot \varepsilon,\ l = 1, ..., L,$$

где L — число всех допустимых решений.

Выполнение этого неравенства следует из того, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{\text{опт}} < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{l}$ вследствие оптимальности решения $x_{\text{опт}}$ на невозмущенной матрице **A** и $k_{\min} \cdot \varepsilon < k_l \cdot \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in (0, \infty)$ вследствие того, что $k_{\min} < k_l$.

Необходимость. Предположим противное, т.е. что $x_{\text{опт}}$ абсолютно устойчиво и существует решение x_p (неоптимальное), в которое входит меньшее число элементов из G^*, чем в решение $x_{\text{опт}}$; обозначим это количество элементов через k_p.

В этом случае легко определить такую величину возмущения $\varepsilon > 0$, при которой оптимальным становится решение x_p. Для этого запишем следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{\text{опт}} + k_{\text{опт}} \cdot \varepsilon < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{p} + k_p \cdot \varepsilon.$$

Разрешив его относительно ε, получим

$$\varepsilon > \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{p} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{\text{опт}}}{k_{\text{опт}} - k_p}.$$

Величина $\varepsilon > 0$ вследствие того, что числитель и знаменатель дроби положительны. Следовательно, $x_{\text{опт}}$ не является абсолютно устойчивым, что противоречит исходному условию. Необходимость доказана.

Рассмотрим все множество допустимых решений задачи (14.1)–(14.4) для невозмущенной матрицы **A**. Пусть число элементов из множества G^* в каждом допустимом решении меняется от k_1 до k_m. Разобьем все множество допустимых решений на m классов, в каждый из которых войдут только те решения, число элементов из G^* в которых равно k_i ($i = 1, ..., m$). Выберем в каждом классе решение, которое минимизирует значение целевой функции (14.1) в задаче (14.1)–(14.4) при невозмущенной матрице **A**, и обозначим их $x_1, ..., x_m$. Очевидно, что среди решений $x_1, ..., x_m$ будет и оптимальное решение задачи (14.1)–(14.4) k_l, при этом $k_1 \le k_l \le k_m$. В силу доказанного выше утверждения 1, если $k_l \equiv k_1$, то решение x_1 абсолютно устойчиво. Если $k_l > k_1$, то решим $(l - 1)$ уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{p} + k_p \cdot \varepsilon < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}^{l} + k_l \cdot \varepsilon, \quad p = k_1, \ldots, k_{l-1}.$$

Получим решения ε_1, ε_2, ..., ε_{l-1}. Выберем $\varepsilon_{\min}^1 = \min\limits_{i=1,\ldots,l-1} \varepsilon_i = \varepsilon_q$, $1 \le q \le l-1$.

Если $q = 1$, то при дальнейшем увеличении ε перехода на новое оптимальное решение не будет. Если $q > 1$, то при возмущении $\varepsilon > \varepsilon_q$ будет осуществлен переход на решение x_q. Далее процедура повторяется, но уже на сокращенном множестве допустимых решений x_1, x_2, ..., x_q ($q < l$). При определенном значении $\varepsilon > \varepsilon_\theta$ осуществляется переход на новое решение x^θ ($\theta < q$). Учитывая, что число допустимых решений x_1, ..., x_m конечно, через конечное число итераций получим, что при $\varepsilon > \varepsilon_1$ оптимальным решением задачи (14.1)–(14.4) с возмущенной матрицей **A*** будет решение x_1, которое останется оптимальным для любого возмущения $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \infty)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. Для возмущенной задачи (14.1)–(14.4) существует конечное число допустимых решений x_1, ..., x_l, каждое из которых x_i остается оптимальным при изменении возмущения на интервале $(\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i)$, при этом x_1 остается оптимальным на интервале (ε_1, ∞) .

Таким образом, если оптимальное решение задачи (14.1)–(14.4) абсолютно устойчиво, то объемы затрат на различных допустимых решениях в зависимости от величины возмущения ε меняются следующим образом (рис. 14.1).

Если решение задачи (14.1)–(14.4) устойчиво, но не является абсолютно устойчивым, то величина затрат в зависимости от величины возмущения на оптимальном решении изменяется следующим образом (рис. 14.2).

Точки ε_1 и ε_2 соответствуют величине возмущения, при котором происходит переход на новое оптимальное решение задачи (14.1)–(14.4).

Рассмотрим ситуацию, когда элементы матрицы **A** могут принимать любые значения из заданных числовых интервалов, т.е. $a_{ij} \in [a_{ij}^1, a_{ij}^2]$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$.

В этом случае необходимо дать ответ на следующие вопросы:

1) какие из допустимых решений могут быть оптимальными;

2) при каких значениях a_{ij} допустимое решение остается оптимальным ($i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$).

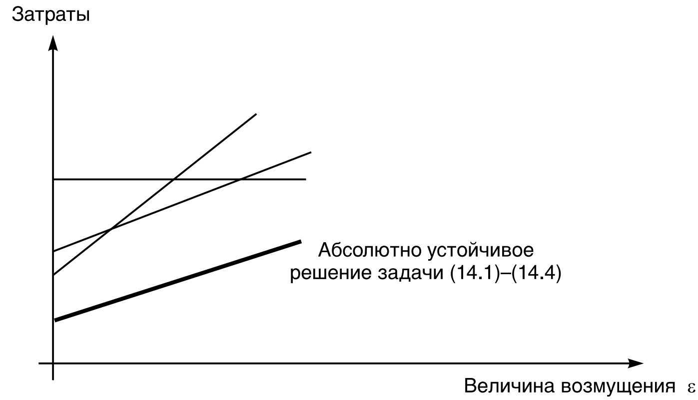

Рис. 14.1. Затраты на абсолютном устойчивом решении в зависимости от величины возмущения

Иными словами, необходимо многомерный параллелепипед $P = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} [a_{ij}^1, a_{ij}^2]$ разделить на области O_1, ..., O_m так, чтобы $P = \bigcup_{r=1}^{m} O_r$, и каждой O_j поставить в соответствие некоторое допустимое решение x_l, которое останется оптимальным для всех значений трудозатрат $a_{ij} \in O_m$.

Для решения этой задачи рассмотрим множество всех допустимых решений задачи о назначениях $X = \{x_1, ..., x_L\}$ и выделим среди

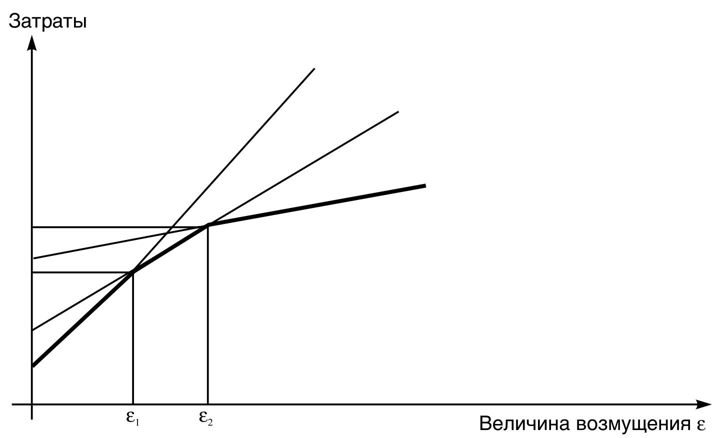

Рис. 14.2. Затраты на оптимальном решении в зависимости от величины возмущения

них множество потенциально оптимальных решений $X_{\text{опт}} \in X$, т.е. множество таких решений, которые могут быть оптимальными для каких-то значений трудозатрат $a_{ij} \in P$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$. Обозначим значение целевой функции (14.1) на решении x_i при трудозатратах a^1_{ij} через R^1_i, а при трудозатратах a^2_{ij} — через R^2_i. Очевидно, что, меняя значения $a_{ij} \in [a^1_{ij}, a^2_{ij}]$, получим, что значение целевой функции (14.1) на решении x_i заполнит все точки интервала $[R^1_i, R^2_i]$. Выберем среди всех $[R^1_i, R^2_i]$, $i = 1, 2, ..., L$ такое, что $R^1_k = \min\limits_{i=1,...,L} R^1_i$, и включим решение x_k во множество решений $X_{\text{опт}}$.

Выберем среди $[R^1_i, R^2_i]$ такое, что $R^2_m = \min\limits_{i=1,...,L} R^2_i$, и включим решение x_m в $X_{\text{опт}}$. Далее включим во множество $X_{\text{опт}}$ все решения $x_j \in X$, у которых $R^1_j < R^2_m$. На этом формирование множества $X_{\text{опт}}$ потенциальных решений будет завершено.

Определим область $O_l \subseteq P$, задающую значения a_{ij}, при которых решение $x_l \in X_{\text{опт}}$ будет оптимальным, следующим образом:

$$a^1_{ij} \le a_{ij} \le a^2_{ij},\ i = 1, ..., n, j = 1, ..., n;$$

$$\sum_{a_{ij} \in R_l} a_{ij} \le \sum_{a_{ij} \in R_k} a_{ij}, \quad \forall x_k \subseteq X_{\text{опт}}, \quad x_k \ne x_l.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: если в задаче (14.1)–(14.4) элементы матрицы a_{ij} принимают значения из интервалов $a_{ij} \in [a^1_{ij}, a^2_{ij}]$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$, то многомерный параллелепипед $P = \prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}[a^1_{ij}, a^2_{ij}]$ может быть таким образом разбит на конечное число областей $O_1, ..., O_l$, что $P = \bigcup\limits_{r=1}^{m} O_r$, и для каждой области O_l существует решение $x_l \in X_{\text{опт}}$, которое остается оптимальным для всех значений $a_{ij} \in O_l$ ($i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$).

14.5. РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ

На основе описанной теории проведем расчетный анализ с построением моделей минимизации ограниченных ресурсов на примере следующей задачи.

Имеется квартира-студия площадью 32 м^2. Необходимо продать ее на вторичном рынке, предварительно сделав ремонт. Для ремонта выделены пять бригад и пять обязательных основных работ. На каждую работу назначается только одна бригада. Необходимо так распределить работы между исполнителями, чтобы общие затраты были минимальными (временны́е или финансовые).

Исходная информация стоимости работ по исполнителям задается матрицей **A**, размерностью 5×5, в которой элемент a_{ij} задает затраты бригады i на выполнение работы j (i = 1, ...,5, j = 1, ...,5) в тыс. руб., включая при этом затраты и на материалы, и на оплату услуг работников:

$$\mathbf{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix}.$$

Такой способ представления затрат возможен, поскольку бригады обладают относительной взаимозаменяемостью. Взаимозаменяемостью — поскольку каждый работник разбирается во всех работах по ремонту квартир, что соответствует его образованию, относительной — поскольку у каждого работника разный профессиональный опыт и разные расценки своего трудочаса.

Матрица **T** выражает временные затраты бригад на выполнение работ, выраженные в часах:

$$\mathbf{T}=(t_{ij})=\begin{pmatrix} 16 & 63 & 40 & 6 & 15 \\ 15 & 67 & 39 & 4 & 14 \\ 9 & 66 & 35 & 4 & 13 \\ 11 & 65 & 36 & 3 & 14 \\ 11 & 60 & 32 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Искомыми переменными являются x_{ij} (i = 1,..., n, j =1,...,n), при этом x_{ij} = 1, если бригада i назначается на выполнение работы j, и x_{ij} = 0 — в противном случае.

Проект состоит из выполнения определенных работ, технологическая последовательность которого описана сетевым графиком на рис. 14.3. Технологическая последовательность выполнения работ представлена ациклическим графом G(7, 8) с 7 вершинами и 8 дугами. Работа 1 и работа 7 — фиктивные работы, которые лишь обозначают начало проекта и окончание проекта соответственно.

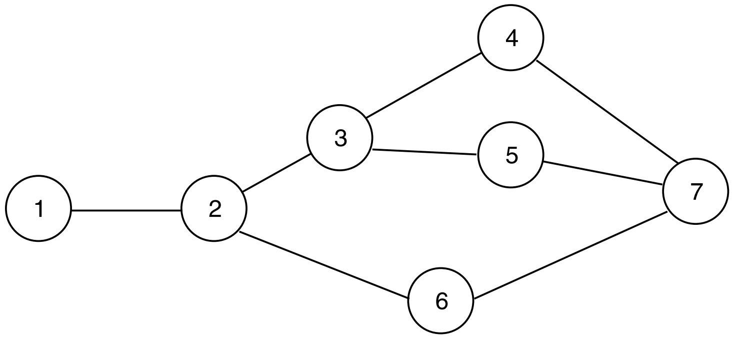

Рис. 14.3. Технологическая последовательность проекта

Также предоставлен список работ, в котором выделяется пять основных работ, которые будут определены по бригадам (табл. 14.1).

Таблица 14.1

Перечень работ проекта

Основная работа	Подработы
Окна	Демонтаж старых окон Установка новых окон
Стены	Подготовка стен Шпаклевка Грунтовка Покраска
Потолок	Натяжной потолок
Пол	Снятие старого покрытия Установка профиля для ламината Настил ламината
Ванная	Демонтаж старой плитки Замена труб и кранов

14.5.1. Двухкритериальная модель о назначениях

Инвестор решил узнать, каковы будут его средние затраты по ремонту квартиры-студии и последующей ее продаже, чтобы собрать необходимые денежные средства. Стоимость работ еще точно неизвестна, к тому же она зависит от многих факторов.

Инвестор, проведя маркетинговое исследование, выделил четыре основных фактора (появление на рынке новых работников, динамика стоимости услуг на рынке, динамика затрат на материалы, уровень квалификации), которые могут повлиять на уровень цен. Таким образом, затраты на выполнение работ являются не детерминированными, а случайными величинами с заданным вероятностным распределением.

Приведем пример расчета математического ожидания затрат и дисперсии затрат на выполнение первой бригадой первой работы.

Вероятностное распределение для a_{11} с учетом основных четырех факторов $\sum_{i=1}^{4} p_l = 1, \quad p_l \geq 0$ представлено в табл. 14.2.

Таблица 14.2

Вероятностное распределение для a_{11} с учетом основных четырех факторов

a_{11}				
Вероятность	0,1	0,4	0,4	0,1
Цена	30	37	38	35

Математическое ожидание составляет

$$\overline{a}_{11} = \sum_{i=1}^{4} a_{11}^{l} p_l = 0{,}1 \cdot 30 + 0{,}4 \cdot 37 + 0{,}4 \cdot 38 + 0{,}1 \cdot 35 = 36{,}5.$$

Таким образом, средняя стоимость затрат для первой бригады, выполняющей первую работу, равняется 36,5 тыс. руб.

Для определения дисперсии нужны промежуточные расчеты, которые представлены в табл. 14.3.

Таблица 14.3

Промежуточные данные для расчета дисперсии

a_{11}				
Вероятность	0,1	0,4	0,4	0,1
$(a_{11} - MO_{11})^2$	42,25	0,25	2,25	2,25

Дисперсия равна

$$\sigma_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{4} (\overline{a}_{11} - a_{11}^{l})^2 p_l = 0{,}1 \cdot 43{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 2{,}25 + 0{,}1 \cdot 2{,}25 = 5{,}45.$$

То есть 5,45 — степень отклонения ожидаемого значения от средней величины. Чем меньше данное отклонение, тем меньше риск того, что цена изменится от ожидаемой.

В итоге мы получили матрицу математических ожиданий и дисперсий для бригады *i*, выполняющей работу *j* (табл. 14.4).

Таблица 14.4

Матрицы математических ожиданий и дисперсий для бригады *i*, выполняющей работу *j*

Матрица математических ожиданий				
36,5	14,40	27,1	18,65	23,10
36,5	14,50	28,9	18,55	23,50
38	12,90	29,00	18,4	21,60
38,8	17,25	27,60	18,3	21,80
35,3	12,90	29,00	19,2	21,40

Матрица дисперсий				
5,45	4,0400	2,09	2,2275	3,09
0,85	4,0500	0,69	2,0475	1,25
1,20	5,6900	0,80	0,8400	1,84
1,56	14,3875	1,04	1,0100	1,16
0,61	1,9900	5,30	1,1600	3,24

Принимая в качестве количественной оценки риска суммарную дисперсию затрат при фиксированном распределении исполнителей по работам, получим следующую двухкритериальную модель распределения исполнителей по работам:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\bar{a}_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{14.26}$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sigma_{ij}^{2}x_{ij} \to \min; \tag{14.27}$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij} = 1; \tag{14.28}$$

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij} = 1; \tag{14.29}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, ..., 5, j = 1, ..., 5. \qquad (14.30)$$

Для упрощения расчетов сведем двухкритериальную задачу путем выбора главного критерия и перевода второго критерия в разряд ограничений. Выберем в качестве главного критерия минимизацию ожидаемых затрат времени на выполнение работ, а критерий минимизации риска распределений бригад по работам переведем в ограничения. Получим следующую однокритериальную задачу оптимизации:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\bar{a}_{ij}x_{ij} \to \min; \qquad (14.31)$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sigma_{ij}^{2}x_{ij} \le R_g; \qquad (14.32)$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij} = 1; \qquad (14.33)$$

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij} = 1; \qquad (14.34)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, ..., 5, j = 1, ..., 5. \qquad (14.35)$$

Для нахождения R_g, который задает максимальное значение допустимого плана при решении задачи (14.31)–(14.35), нужно найти значение R^*, которое задает оптимальное значение целевой функции следующей оптимизационной задачи:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\sigma_{ij}^{2}x_{ij} \to \min; \qquad (14.36)$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij} = 1; \qquad (14.37)$$

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij} = 1; \qquad (14.38)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, ..., 5, j = 1, ..., 5. \qquad (14.39)$$

Решая задачу (14.36)–(14.39) с помощью программы Excel, получаем, что $R^* = 6{,}93$ (табл. 14.5).

Таблица 14.5

Матрицы дисперсий и (x_{ij})

Матрица дисперсий

	R*
функционал	6,93

5,45	4,0400	2,09	2,2275	3,09
0,85	4,0500	0,69	2,0475	1,25
1,20	5,6900	0,80	0,8400	1,84
1,56	14,3875	1,04	1,0100	1,16
0,61	1,9900	5,30	1,1600	3,24

Матрица (x_{ij})

0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1

Поскольку R_g не может быть меньше значения R^*, полагаем, что $R_g = 7$. Решаем задачу (14.31)–(14.35) с помощью программы Excel (табл. 14.6).

Таблица 14.6

Средняя стоимость выполнения работ, матрицы дисперсий и (x_{ij})

Средние стоимости выполнения работ

1	2	3	4	5
36,5	14,4	27,1	18,65	23,1
36,5	14,5	28,9	18,55	23,5
38	12,9	29	18,4	21,6
38,8	17,25	27,6	18,3	21,8
35,3	12,9	29	19,2	21,4

Матрица дисперсий

5,45	4,04	2,09	2,2275	3,09
0,85	4,05	0,69	2,0475	1,25
1,2	5,69	0,8	0,84	1,84
1,56	14,3875	1,04	1,01	1,16
0,61	1,99	5,3	1,16	3,24

Матрица (x_{ij})

0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	

6,93	<=	7

F =	116,2

Получается, что оптимальным решением является

$$\mathbf{X} = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция на этом решении равна $z^* = 116{,}2$.

Таким образом, инвестору следует иметь в наличии до начала реализации проекта как минимум 116,2 тыс. руб.

14.5.2. Оптимизация стоимости работ проекта

Математическая постановка задачи сводится к следующему виду:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to \min; \qquad (14.40)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad (14.41)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad (14.42)$$

$$x_{ij} \in \{0,\ 1\},\ i = 1,\ \dots,\ n,\ j = 1,\ \dots,\ n. \qquad (14.43)$$

Найдем оптимальное решение задачи на минимизацию стоимости проекта. Решим эту задачу методом ветвей и границ.

1. Вычислим верхнюю оценку целевой функции.

Сформируем некое допустимое решение, построенное по следующей схеме: на каждом шаге в матрице затрат (a_{ij}), $i = 1, \dots ,5$, $j = 1,\dots,5$, выбирается наименьший элемент a_{kl}, где $a_{kl} = \min\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$, после чего из матрицы вычеркиваются соответствующие строка и столбец для следующего аналогичного шага:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix}.$$

Так как $\min\limits_{\substack{i=1,\ldots,5\\ j=1,\ldots,5}} a_{ij} = 12 = a_{12}$, то первой бригаде выделяется вторая работа.

Далее рассмотрим матрицу, полученную вычеркиванием первой строки и второго столбца:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cancel{38} & \cancel{12} & \cancel{28} & \cancel{20} & \cancel{24} \\ 37 & \cancel{13} & 29 & 19 & 24 \\ 39 & \cancel{13} & 27 & 19 & 22 \\ 40 & \cancel{20} & 26 & 18 & 22 \\ 35 & \cancel{14} & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix}.$$

Выбираем $\min\limits_{\substack{j=1,\ldots,5\\ j\neq 2}} \min\limits_{\substack{i=1,\ldots,5\\ j\neq 1}} a_{ij} = 18 = a_{44}$. Следовательно, четвертой бригаде выделяется четвертая работа.

Далее рассмотрим ситуацию после распределения работ первой и четвертой бригадам:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cancel{38} & \cancel{12} & \cancel{28} & \cancel{20} & \cancel{24} \\ 37 & \cancel{13} & 29 & \cancel{19} & 24 \\ 39 & \cancel{13} & 27 & \cancel{19} & 22 \\ \cancel{40} & \cancel{20} & \cancel{26} & \cancel{18} & \cancel{22} \\ 35 & \cancel{14} & 26 & \cancel{20} & 23 \end{pmatrix}.$$

Выбираем $\min\limits_{\substack{j=1,\ldots,5\\ j\neq 2\\ j\neq 4}} \min\limits_{\substack{i=1,\ldots,5\\ i\neq 1\\ i\neq 4}} a_{ij} = 22 = a_{35}$. Таким образом, третьей бригаде выделяется пятая работа.

Матрица после вычеркивания пятого столбца и третьей строки приобретает следующий вид:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cancel{38} & \cancel{12} & \cancel{28} & \cancel{20} & \cancel{24} \\ 37 & \cancel{13} & 29 & \cancel{19} & \cancel{24} \\ \cancel{39} & \cancel{13} & \cancel{27} & \cancel{19} & \cancel{22} \\ \cancel{40} & \cancel{20} & \cancel{26} & \cancel{18} & \cancel{22} \\ 35 & \cancel{14} & 26 & \cancel{20} & \cancel{23} \end{pmatrix}.$$

Выбираем $\min\limits_{\substack{j=1,\dots,5\\ j\neq 2\\ j\neq 4\\ j\neq 5}} \min\limits_{\substack{i=1,\dots,5\\ i\neq 1\\ i\neq 3\\ i\neq 4}} a_{ij} = 26 = a_{53}$. Следовательно, пятой бригаде выделяется третья работа. Последний выбор определяет также, что вторая бригада получает третью работу, т.е. $a_{21} = 37$.

Следовательно, $z_{\text{в}} = 12 + 18 + 22 + 26 + 26 + 37 = 115$.

2. Вычислим нижнюю оценку целевой функции.

Выбираем в каждой строке минимальный элемент по формуле

$$b_1 = \min_{j=1,\dots,5} a_{ij}.$$

Соответственно вычисляем значения $b_1 = 12$, $b_2 = 13$, $b_3 = 13$, $b_4 = 18$, $b_5 = 14$. Нижняя оценка целевой функции на оптимальном решении вычисляется по формуле $z_{\text{н}} = \sum\limits_{i=1}^{5} b_1 = 70$.

3. Поскольку $z_{\text{в}} \neq z_{\text{н}}$, то переходим к формированию нового решения с вычислением нижних текущих оценок целевой функции по формуле

$$z_{\text{н}}^{\text{тек}}(K) = \sum_{a_{ij}\in K} a_{ij} + z_{\text{н}}(N \setminus K),$$

где $\sum\limits_{a_{ij}\in K} a_{ij}$ — затраты на проведение работ, выделенных исполнителям множества K; $z_{\text{н}}(N\backslash K)$ — нижняя оценка затрат на работы, которые будут выделены исполнителям множества $N\backslash K$.

Эта оценка вычисляется аналогично тому, как вычисляется оценка $z_{\text{н}}$, но на матрице, которая получится из исходной матрицы (a_{ij}), после того как из нее будут вычеркнуты строки, соответствующие исполнителям множества K, и столбцы, соответствующие выделенным исполнителям множества K работам.

3.1.Формируем очередное допустимое решение и вычисляем текущие нижние оценки.

Выделим для первой бригады вторую работу и рассмотрим матрицу после вычеркивания первой строки и второго столбца:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix};$$

$$z_{\text{н}}^{\text{тек}} = (K = \{1\}) = 12 + 19 + 19 + 18 + 20 = 88 < 115.$$

Выделим для второй бригады первую работу и вычислим $z_{\text{н}}^{\text{тек}} = (K)$:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix};$$

$$z_{\text{н}}^{\text{тек}} = (K = \{1, 2\}) = 12 + 37 + 19 + 18 + 20 = 106 < 115.$$

Выделим третьей бригаде четвертую работу и вычислим $z_{\text{н}}^{\text{тек}} = (K)$:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix};$$

$$z_{\text{н}}^{\text{тек}} = (K = \{1, 2, 3\}) = 12 + 37 + 19 + 22 + 23 = 113 < 115.$$

Если четвертой бригаде выделим пятую работу, то получим

$$z_{\text{н}}^{\text{тек}} = (K = \{1, 2, 3, 4\}) = 12 + 37 + 19 + 22 + 26 = 116 > 115.$$

Следовательно, формируемый план не оптимален, его необходимо отбраковать и перейти к формированию нового плана.

3.2. Формируем очередное допустимое решение и вычисляем текущие нижние оценки.

Выделим для первой бригады вторую работу и рассмотрим матрицу после вычеркивания первой строки и второго столбца:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix};$$

$$z_{н}^{тек} = (K = \{1\}) = 12 + 19 + 19 + 18 + 20 = 88 < 115.$$

Выделим для второй бригады четвертую работу и вычислим $z_{н}^{тек} = (K)$:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix};$$

$$z_{н}^{тек} = (K = \{1, 2\}) = 12 + 19 + 22 + 22 + 23 = 98 < 115.$$

Продолжаем выделять работы бригадам.

Выделим третьей бригаде пятую работу и вычислим $z_{н}^{тек} = (K)$:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix};$$

$$z_{н}^{тек} = (K = \{1, 2, 3\}) = 12 + 19 + 22 + 26 + 26 = 105 < 115.$$

Выделим четвертой бригаде третью работу и вычислим $z_{н}^{тек} = (K)$:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 38 & 12 & 28 & 20 & 24 \\ 37 & 13 & 29 & 19 & 24 \\ 39 & 13 & 27 & 19 & 22 \\ 40 & 20 & 26 & 18 & 22 \\ 35 & 14 & 26 & 20 & 23 \end{pmatrix}$$

$$z_{н}^{тек} = (K = \{1, 2, 3, 4\}) = 12 + 19 + 22 + 26 + 35 = 114 < 115.$$

Целевая функция на данном полученном решении

$$\mathbf{X} = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z^{*} = 114 < z_{в} = 115.$$

В этом случае корректируем $z_{в}$ по следующей формуле: $z^{*} = z_{в}$, т.е. сдвигаем влево по числовой оси значение $z_{в}$.

Аналогично перебираем все возможные допустимые планы.

Число всех допустимых решений для n независимых работ и m исполнителей вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

В нашем случае число всех допустимых вариантов равно $5! = 120$, т.е. если перебирать по одной компоненте первой строки, то необходимо рассмотреть $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (рис. 14.4). А таких компонент в строке пять; значит, всего допустимых решений $5 \cdot 24 = 120$. Все варианты решений были проанализированы. Значит, в качестве оптимального выбираем то решение, которому соответствовало бы последнее (наименьшее) значение $z_{в}$. При переборе наименьшим оказалось значение

$$\mathbf{X} = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$z^{*} = 114$, которое соответствует оптимальному решению.

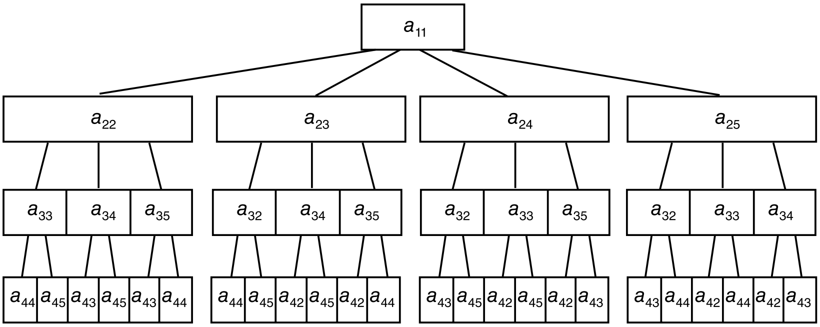

Рис. 14.4. Перебор решений по первой компоненте первой строки a_{11}

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Бурное развитие экономических отношений между хозяйствующими субъектами в условиях роста конкуренции и глобализации требует использования новых методов управления предприятиями и объединениями. Применению таких методов способствует прогресс в области информационных технологий, значительно ускорившийся в последние годы. Рост быстродействия современных компьютеров, совершенствование технической базы, а также возрастающие возможности компьютерных программ, разработанных для нужд управления, содействуют расширению сферы их применения. Однако конкурентного преимущества нельзя достигнуть путем простого использования скоростного и дешевого процесса передачи информации. Для того чтобы эффективно применять информационные технологии в управлении цепями поставок и системах логистики, необходимо использовать аналитические информационные технологии, основными компонентами которых являются оптимизационные модели, раскрывающие сложные взаимосвязи в динамике функционирования предприятия. Они служат тем аналитическим инструментом, который способен проанализировать многомерные числовые базы данных для определения оптимальных или хороших управленческих решений.

За последние десятилетия сложились два направления, связанные с принятием решений руководителями и организациями. В первом случае используется *принцип теории рационального выбора решения*. В этой ситуации лицо, принимающее решение, должно знать:

- перечень альтернатив возможных действий;
- возможные последствия различных действий;
- установку предпочтений по каждой альтернативе;
- правило выбора решения, обеспечивающего наибольшую выгоду.

Во втором случае управленческие решения принимаются на основе *правил*, т.е. в соответствии с *принятыми оперативными процедурами, профессиональными стандартами* или *другими принципами, связанными с личностными управленческими концепциями*. Этот подход чаще всего обречен на неудачу, поскольку руководство отделено от объекта управления в пространстве и времени. Особенно негативны последствия таких решений при управлении инвестиционными ресурсами в системах логистики, когда из обращения изымаются крупные денежные суммы и направляются на строительство или модернизацию производственных предприятий, складов, транспортных систем и т.п.

Привлечение же средств экономико-математического моделирования при анализе инвестиционных проектов дает возможность с помощью количественных методов определить эффективность каждого варианта реализации всего инвестиционного проекта или его фрагментов и выбрать из них наилучший. Таким образом, руководители, ответственные за принятие решений, должны стремиться развивать или приобретать системы экономико-математического моделирования логистических процессов, основанные на аналитической обработке данных с использованием методов оптимизации решений.

Конечно, чтобы освоить современные технологии управления, основанные на применении современных средств вычислительной техники и моделирующих комплексов, необходимы дополнительные затраты на обучение и приобретение соответствующего инструментария. В то же время всегда есть соблазн использовать более простые правила принятия решений, однако этот путь, по словам одного из самых известных в мире специалистов в области логистики и управления цепями поставок Дж. Шапиро, может привести к следующим результатам: «За последние годы организационное выравнивание, аутсорсинг, сокращение размеров предприятия — все это предлагалось в качестве источников спасения предприятия. Однако такие способы управления обычно терпят неудачу. Управление по принципу растворимого кофе: только открой крышку и добавь воды — не требует никаких усилий. Хуже того, менеджеры, которые следуют этим принципам, рискуют быть объявленными непрофессионалами».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алексеев А.* Особенности национального портфельного менеджмента [Текст] / А. Алексеев, Д. Оман // Рынок ценных бумаг. — 1999. — № 12. — С. 88.
2. *Алексеев М.* Рынок ценных бумаг [Текст] / А. Алексеев. — М.: Финансы и статистика, 1999.
3. *Аникин Б.А.* Коммерческая логистика [Текст] / Б.А. Аникин, А.П. Тяпухин. — М.: Проспект, 2006.
4. *Балабанов И.Т.* Основы финансового менеджмента [Текст] / И.Т. Балабанов. — М.: Финансы и статистика, 1997.
5. *Бочаров В.В.* Финансово-кредитные методы регулирования рынка инвестиций [Текст] / В.В. Бочаров. — М.: Финансы и статистика, 1993. — С. 5.
6. *Бригхэм Ю.* Финансовый менеджмент: полный курс [Текст]: в 2 т. / Ю. Бригхэм, Л. Гаспенски. — СПб.: Экономическая школа, 2005.
7. *Виленский П.Л.* Программные пакеты для инвестиционных расчетов в России: рекомендации по расчету эффективности инвестиционных проектов в России [Текст] / П.Л. Виленский, А.Н. Лапунов, Н.Я. Рябикова. — М.: Дело, 1998.
8. *Виленский П.Л.* Показатель внутренней нормы доходности проекта и его модификации [Текст] / П.Л. Виленский, С.А. Смоляк. — М.: ЦЭМИ РАН, 2004.
9. *Виленский П.Л.* Как рассчитать эффективность инвестиционного проекта: расчет с комментариями [Текст] / П.Л. Виленский, С.А. Смоляк. — М.: Ин-т Информэлектро, 1996.
10. *Воронцовский А.В.* Инвестиции и финансирование: методы оценки и обоснования [Текст]: учебное пособие / А.В. Воронцовский. — СПб.: Изд-во С.- Петерб. гос. ун-та, 1998.
11. *Ворст И.* Экономика фирмы [Текст] / И. Ворст, П. Ревентбоу; пер. с датск. — М.: Высшая школа, 1994.
12. *Вощинин А.П.* Метод оптимизации объектов по интервальным моделям целевой функции [Текст] / А.П. Вощинин. — М.: Изд-во МЭИ, 1987.
13. *Вощинин А.П.* Оптимизация по регрессионным моделям и планирование эксперимента [Текст] / А.П. Вощинин, Р.А. Акматбеков. — Бишкек: Илим, 1991.
14. *Вощинин А.П.* Оптимизация в условиях неопределенности [Текст] / А.П. Вощинин, Г.Р. Сотиров. — М.: Изд-во МЭИ — София: Техника, 2004.

15. *Газеев М.Х.* Показатели эффективности инвестиций в условиях рынка [Текст] / М.Х. Газеев, А.П. Смирнов, А.Н. Хрычев. — М.: ПМБ ВНИИОЭНГа, 2001.
16. *Гитман Л.Дж.М.Д.* Основы инвестирования [Текст] / Л.Дж.М.Д. Гитман; пер. с англ. — М.: Дело, 2006.
17. *Глазунов В.Н.* Финансовый анализ и оценка риска реальных инвестиций [Текст] / В.Н. Глазунов. — М.: Финстатинформ, 1997.
18. *Горбунов А.Г.* Управление финансовыми потоками [Текст] / А.Г. Горбунов. — М.: Анкил, 2000.
19. *Горелов М.* Построение оптимального портфеля ценных бумаг: как максимизировать прибыль [Текст] / М. Горелов // Рынок ценных бумаг. — 1996. — № 6. — С. 19—23.
20. *Гонтарева И.В.* Управление проектами [Текст] / И.В. Гонтарева, Р.М. Нижегородцев, Д.А. Новиков. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
21. *Грядовая О.* Доходность как критерий оптимизации решений по управлению портфелем ГКО [Текст] / О. Грядовая, А. Благодатин // Рынок ценных бумаг. — 1994. — № 1. — С. 13—16.
22. *Грязнова А.Г.* Оценка бизнеса [Текст] / А.Г. Грязнова, М.А. Федотова. — М.: Финансы и статистика, 2004.
23. *Гудман Д.Э.* Финансово-инвестиционный словарь [Текст] / Д.Э. Гудман, Д.Н. Доунс; пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 2003.
24. *Гэри М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Текст] / М. Гэри, Д. Джонсон. — М.: Мир, 1982.
25. *Дыбская В.В.* Логистика для практиков [Текст] / В.В. Дыбская. — М.: ВИНИТИ РАН, 2002.
26. *Данилин В.И.* Финансовое и операционное планирование в корпорации [Текст] / В.И. Данилин. — М.: РАНХиГС, 2014.
27. *Емельянов А.А.* Имитационное моделирование экономических процессов [Текст] / А.А. Емельянов, Е.А. Власова, Р.В. Дума. — М.: Финансы и статистика, 2002.
28. *Зайцев М.Г.* Методы оптимизации управления и принятия решений [Текст] / М.Г. Зайцев, С.Г. Варюхин. — М.: Дело, 2017.
29. *Закарян И.* Интернет как инструмент для финансовых инвестиций [Текст] / И. Закарян, И. Филатов. — М.: CN&A, 1998.
30. *Зелль А.* Инвестиции и финансирование, планирование и оценка проектов [Текст] / А. Зелль; пер. с нем.; под ред. А.В. Игнатова, Е.Н. Станиславчик. — Бремен: Университет, 1996.
31. *Золотогоров В.Г.* Инвестиционное проектирование [Текст]: учебное пособие / В.Г. Золотогоров. — Мн.: Экоперспектива, 1998.
32. *Идрисов А.Б.* Планирование и анализ эффективности инвестиций [Текст] / А.Б. Идрисов. — М.: PRO-invest Consulting, 2003.

33. *Идрисов А.Б.* Стратегическое планирование и анализ эффективности инвестиций [Текст] / А.Б. Идрисов, С.В. Картышев, А.В. Постников. — М.: Филинъ, 1997.
34. Инвестиции в России: экономические и социокультурные [Текст] / С.Г. Ковалев, Л.Б. Луссе, Е.Г. Филатова, Г.Г. Черемный. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та экономики и финансов, 1999.
35. Инвестиционная деятельность: сборник методических материалов [Текст]. — М.: Интерэксперт, 1994.
36. *Ионов В.И.* Инвестиционное проектирование [Текст]: учебное пособие / В.И. Ионов. — М.: ПРИОР, 1998.
37. *Канторович Л.В.* Оптимальные решения в экономике [Текст] / Л.В. Канторович. — М.: Наука, 1972.
38. *Кирсанов К.А.* Инвестиции и антикризисное управление [Текст]: учебное пособие / К.А. Кирсанов, А.В. Малявина, С.А. Попов. — М.: МАЭП, 2000.
39. *Ковалёв В.В.* Введение в финансовый менеджмент [Текст] / В.В. Ковалёв. — М.: Финансы и статистика, 2006.
40. *Ковалёв В.В.* Методы оценки инвестиционных проектов [Текст] / В.В. Ковалёв. — М.: Финансы и статистика, 2005.
41. *Ковалёв В.В.* Практикум по финансовому менеджменту [Текст]: учебное пособие / В.В. Ковалёв. — М.: Финансы и статистика, 2004. — 288 с.
42. *Ковалёв В.В.* Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности [Текст] / В.В. Ковалёв. — М.: Финансы и статистика, 1998.
43. *Ковалева А.М.* Финансы [Текст]: учебное пособие / А.М. Ковалева, Н.П. Баранникова, В.Д. Богачева. — М.: Финансы и статистика, 1999.
44. Коммерческая оценка инвестиционных проектов [Текст]. — М.: Ист-сервис, 1994.
45. Корпоративная логистика [Текст] / под ред. В.И. Сергеева. — М.: ИНФРА-М, 2004.
46. *Люу Ю.Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики [Текст] / Ю.Д. Люу. — М.: БИНОМ, 2007.
47. *Мищенко А.В.* Исследование операций в экономике [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Косоруков. — М.: Экзамен, 2003.
48. *Мищенко А.В.* Управление оборотным капиталом в промышленной логистике [Текст] / А.В. Мищенко, О.О. Шатокина // Логистика сегодня. — 2005. — № 4.
49. *Мищенко А.В.* Методы и модели управления ограниченными ресурсами в логистических системах [Текст] / А.В. Мищенко. — М.: ИНФРА-М, 2018. — 191 с.

50. *Мищенко А.В.* Оптимизационные модели управления ограниченными ресурсами в логистике [Текст] / А.В. Мищенко, Н.В. Иванова. — М.: ИНФРА-М, 2021. — 251 с.
51. *Мищенко А.В.* Методы оценки эффективности управления производственно-финансовой деятельностью предприятия [Текст] / А.В. Мищенко, Е.В. Михеева. — М.: ИНФРА-М, 2019. — 337 с.
52. *Мищенко А.В.* Оптимизационная модель формирования инвестиционного портфеля [Текст] / А.В. Мищенко // Финансовый менеджмент. — 2005. — № 5.
53. *Мищенко А.В.* Оптимизация портфеля финансовых активов при ограничении на их целочисленность [Текст] / А.В. Мищенко // Финансовый менеджмент. — 2006. — № 6.
54. *Мищенко А.В.* Управление инвестиционным портфелем в условиях неопределенности [Текст] / А.В. Мищенко // Вестник Российской экономической академии. — 2007. — № 2.
55. *Мищенко А.В.* Модельный подход к анализу целочисленных инвестиционно-финансовых активов [Текст] / А.В. Мищенко // Прикладная информатика. — 2007. — № 3.
56. *Мищенко А.В.* Методы управления портфельными инвестициями [Текст] / А.В. Мищенко, А.А. Попов. — М.: РЭА им. Г.В. Плеханова, 1999.
57. *Некрасов Л.А.* Критерии оценки в рыночных условиях: методические указания по определению эффективности инвестиционных проектов [Текст] / Л.А. Некрасов, Л.А. Одинцова, С.А. Пикунова. — М.: МГТУ им. Баумана, 1998.
58. *Нечаева И.М.* Финансовый и банковский менеджмент: французско-русский профессиональный словарь [Текст] / И.М. Нечаева, Е.С. Стоянова; Акад. менеджмента и рынка, Ин-т фин. менеджмента. — М.: Вестник, 1995.
59. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях [Текст] / А.И. Орлов. — М.: Наука, 1979.
60. *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков [Текст] / Э. Петерс. — М.: Интернеттрейдинг, 2004.
61. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала [Текст] / Э. Петерс. — М.: Мир, 2005.
62. *Рытова Е.В.* Эконометрическое моделирование социально-экономических систем [Текст] / Е.В. Рытова, А.Е. Схедиани. — СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС , 2021.
63. *Сайфулин Р.* Методика финансового анализа предприятий [Текст] / Р. Сайфулин, А. Шеремет, Е. Негашев. — М.: ЮниГлоб, 1992.

64. Сборник трудов Международной конференции по интервальным и стохастическим методам в науке и технике [Текст]. — М.: МЭИ, 1992.
65. *Сергеев И.В.* Экономика предприятия [Текст]: учебное пособие / И.В. Сергеев. — М.: Финансы и статистика, 2000.
66. *Симон Г*. Прибыль [Текст] / Г. Симон. — М.: БИБЛОС, 2021.
67. *Сток Д.* Стратегическое управление логистикой [Текст] / Д. Сток, Д. Ламберт. — М.: ИНФРА-М, 2005.
68. Стратегическое управление организационно-экономической устойчивостью фирмы: логистикоориентированное проектирование бизнеса [Текст] / А.Д. Канчавели, А.А. Колобов, И.Н. Омельченко [и др.]; под ред. А.А. Колобова, И.Н. Омельченко. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
69. *Терехин В.И.* Финансовое управление фирмой: Финансовая деятельность фирмы. Методология принятия финансовых решений. Стоимость фирмы. Управление активами фирмы [Текст] / В.И. Терехин. — М.: Экономика, 1998.
70. *Федотова М.А.* Доходы предпринимателя [Текст] / М.А. Федотова. — М.: Финансы и статистика, 1993.
71. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов [Текст] / Е.М. Четыркин. — М.: Дело, 2002.
72. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика [Текст]: учебник / Е.М. Четыркин. — М.: Дело, 2000.
73. *Четыркин Е.М.* Финансовый анализ производственных инвестиций [Текст] / Е.М. Четыркин. — М.: Дело, 1998.
74. *Шапиро Дж.* Моделирование цепи поставок [Текст] / Дж. Шапиро. — СПб.: Питер, 2006.
75. *Шапкин А.С.* Теория риска и моделирование рисковых ситуаций [Текст] / А.С. Шапкин. — М.: Дашков и К°, 2009.
76. *Шарп У.Ф.* Инвестиции [Текст] / У.Ф. Шарп, Г.Дж. Александер, Дж.В. Бейли. — М.: ИНФРА-М, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ОГЛАВЛЕНИЕ

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел. (495) 280-33-86 (доб. 218, 222)
E-mail: bookware@infra-m.ru

•

Отдел «Книга—почтой»:
тел. (495) 280-33-86 (доб. 222)

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Учебное издание

Мищенко Александр Владимирович

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ЛОГИСТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Оригинал-макет подготовлен в НИЦ ИНФРА-М

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29
E-mail: books@infra-m.ru http://www.infra-m.ru

Подписано в печать 22.12.2021.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Petersburg.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 24,25.
Тираж 500 экз. (I — 50). Заказ № 00000
ТК 108000-1839692-221221

Отпечатано в типографии ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29