

УДК 51-72

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СКОРОСТНЫХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОТЕХНИКИ, ТЕРМОДИНАМИКИ, ТЕРМИЧЕСКОЙ И ХИМИКО-ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

© Д. Н. ТЮТЮНОВ¹, Е. В. СКРИПКИНА¹, А. А. ШАТУЛЬСКИЙ²,
А. Е. ГВОЗДЕВ³, С. Н. КУТЕПОВ³, 2020

¹ ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск

² ФГБОУ ВО «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьева»

³ ФГБОУ ВО «Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого»

Большинство задач теплотехники и термодинамики, используемых при разработке ресурсосберегающих процессов термической и химико-термической обработки металлических систем (металлов, сталей, цветных сплавов), требует вычисления и преобразования некоторых математических функций, их комбинаций или значений некоторых параметров, влияющих на поведение этих функций, используемых в расчетах оптимальных термомеханических и термовременных процессов обработки металлических и композиционных материалов. В данной публикации проводится сравнительный анализ методов определения значений функций в точке с заданной точностью. Предложена рабочая формула таблично-симметричного метода вычисления прямой (логарифмической) функции посредством подключения обратной (показательной) функции.

ФУНКЦИЯ, ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ФУНКЦИИ, ТАБЛИЧНО-СИММЕТРИЧНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОТЕХНИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF HIGH-SPEED METHODS OF FUNCTIONS EVALUATION FOR PROBLEMS RELATED TO HEAT ENGINEERING, THERMODYNAMICS, THERMAL AND CHEMICAL HEAT TREATMENT

© D. N. TYUTYUNOV¹, E. V. SKRIPKINA¹, A. A. SHATULSKIY²,
A. E. GVOZDEV³, S. N. KUTEPOV³, 2020

¹ Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
«Southwest State University», Kursk

² Federal State-Financed Educational Institution of Higher Education
«P. A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University»

³ Federal State-Financed Educational Institution of Higher Education
«Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University»

The majority of heat engineering and thermodynamics problems being solved at development of resource-saving processes related to thermal and chemical heat treatment of metal systems (metals, steels, nonferrous metal alloys) require evaluation, calculation and transformation of some mathematical functions, their combinations or some parameters values affecting behavior of functions employed in calculations of optimum thermomechanical and temperature-time processing of both metal and composition materials. The present paper introduces comparative analysis of functions values finding techniques for a point with required accuracy. The paper reveals a working formula for tabular and symmetric method of direct (logarithmic) function calculation by means of inverse (indicative) function.

FUNCTION, DIRECT AND RECIPROCAL FUNCTIONS, TABULAR-SYMMETRIC METHOD IN HEAT ENGINEERING AND THERMODYNAMICS PROBLEM SOLVING

Проблема уточнения значений некоторой функции в выбранных точках при использовании в режиме тестирования или работы тепловых сетей требует использования скоростных математиче-

ских методов и микропроцессорного сопровождения в режиме реального времени. [1 – 6, 8].

Часто в используемых процессах требуется делать вычисления прямых и обратных гиперболи-

ческих функций и экспонент. Но особый интерес вызывают логарифмические зависимости [3, 4].

Подобные соотношения встречаются, например, в задачах тепло- и массопереноса для вычисления уменьшения свободной энергии ΔF при постепенной температуре T (или энергии связи), которое выражается работой Δ , затрачиваемой для отрыва 1 кмоль воды от материала:

$$\Delta F = L = \frac{RT \ln P_n}{P_n} = -RT \ln y, \quad (1)$$

где R – молярная газовая постоянная; P_n – давление насыщенного пара свободной воды; P_n – парциальное давление пара воды над материалом; $y = P_n/P_n$ – относительная влажность над поверхностью материала.

С другой стороны, логарифмическая функция используется при вычислении среднего температурного напора Δt_{cp} в теплообменных аппаратах (рис. 1):

$$\Delta t_{cp} = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\ln(\tau_1 / \tau_2)}. \quad (2)$$

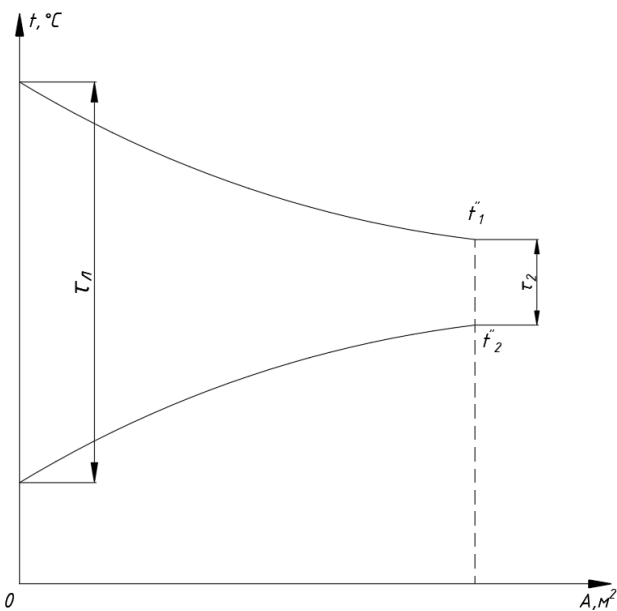


Рис. 1. Температурные характеристики прямого теплообменного аппарата

Причём разность температур τ_1 и τ_2 рабочего тела на входе и выходе теплового аппарата определяются по формулам:

$$\tau_1 = t'_1 - t'_2, \quad (3)$$

$$\tau_2 = t''_1 - t''_2, \quad (4)$$

где t'_1, t'_2, t''_1, t''_2 – температуры горячего и холодного рабочего тела на входе и выходе.

Ниже рассмотрим основные подходы при определении логарифма в точке с заданной точностью $\varepsilon \leq 10^{-8}$. Существующие способы вычисления функции включают в себя целый ряд методов

(табличный, «цифра за цифрой», степенных рядов, цепных дробей и т. п.) [2, 3]. Все они требуют применения арифметических устройств (АУ) управляющих микропроцессоров (МК).

Самым скоростным является табличный метод, т. к. для нахождения значения функции в точке требуется лишь считывание её из постоянно запоминающего устройства (ПЗУ). Главным недостатком этого подхода является большой объём памяти ПЗУ, который возрастает с увеличением точности вычислений. Это приводит к значительному удорожанию МК. Другие перечисленные методы заметно проигрывают по скорости табличному и пригодны лишь для тестирования и долговременных вычислений.

Предлагаемый таблично-симметричный метод позволяет резко ускорить процесс работы АУ и значительно сократить объём памяти ПЗУ. Данный подход включает в себя элементы табличного метода и использует свойство симметрии графиков прямой функции $f(x)$, соответствующей обратной ей функции $f^{-1}(x)$ относительно биссектрисы $y = x$ 1-го и 3-го координатных углов. Учитывая (1) и (2), рассмотрим алгоритм вычисления функции $y = \ln x$ с использованием экспоненты $y = e^x = \exp x$. Расчёты будем проводить с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

Было установлено, что для поддержания указанной точности необходимо использовать сетку значений аргумента x в ПЗУ с шагом $\Delta x = 0,00001$.

Сущность рассматриваемого метода заключается в следующем: учитывая, что область определяется $D(f)$ логарифмической функции включает в себя положительную полуось, т. е. $x \in (0; +\infty)$, предварительно сузим интервал нормировки аргумента x до отрезка $\left[\frac{1}{\exp(1)}; 1\right]$.

Для вычисления логарифма в некоторой точке \bar{x} из этого отрезка достаточно найти значение $-x_1 \in \left[-1; \frac{-1}{\exp(1)}\right]$, такое что для функции $\exp x$ справедливо равенство (рис. 2):

$$\exp(-x'_1) = \bar{x}. \quad (5)$$

Тогда очевидно, что для $x' \in \left[-1; \frac{-1}{\exp(1)}\right]$

соотношение (5) будет также справедливо для функции $y = \exp(-x)$ на полученном отрезке. Это утверждение вытекает из симметрии графиков функций $\exp x$ и $\exp(-x)$ относительно оси ординат. Выбор величины x'_1 соответствует сумме

$$x'_1 = x_1 + \Delta x_1, \quad (6)$$

где $x_1 \in (0,36787; 1)$; $\Delta x_1 \in (0,00001; 0,0000199999)$ – приращение аргумента x в точке x_1 .

Отметим, что число $0,36787 < \frac{1}{\exp(1)} \approx 0,367879441$ – ближайшая к дроби $\frac{1}{\exp(1)}$ по недостатку величина, содержа-

щая только пять верных десятичных знаков после запятой.

Значение x'_1 таково, что справедливо неравенство (рис. 2):

$$\exp(-x'_1) = e^{-x_1 - \Delta x_1} = e^{-x_1} e^{-\Delta x_1} = \bar{x}. \quad (7)$$

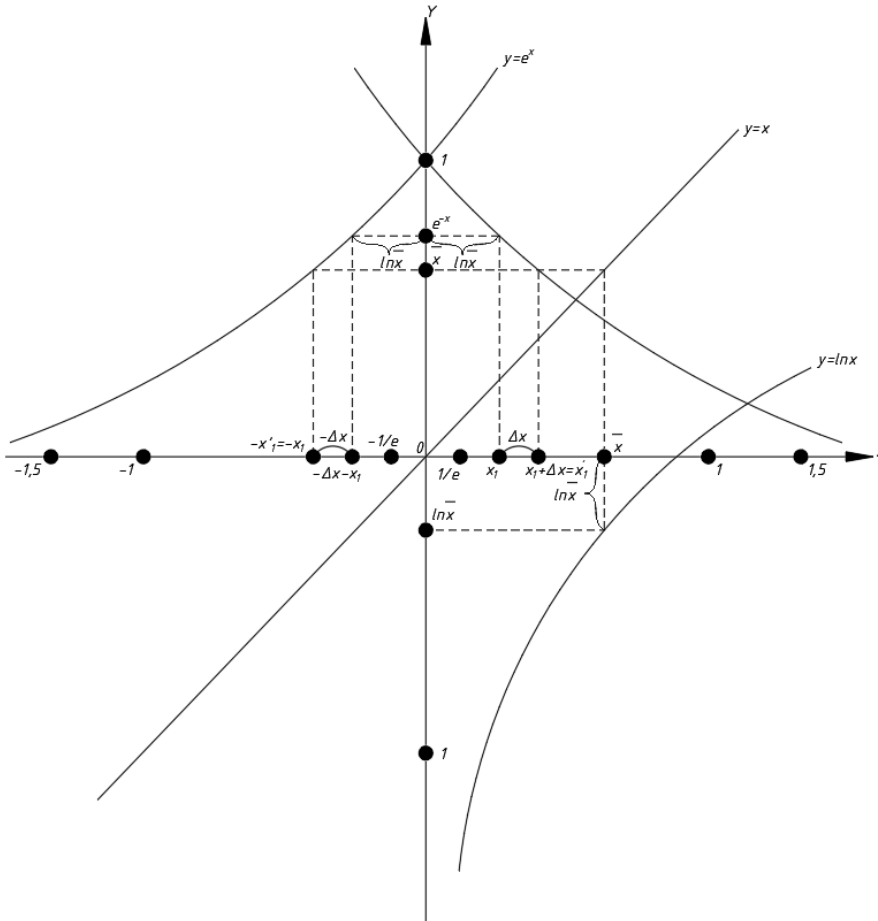


Рис. 2. Графическая иллюстрация таблично-симметричного метода при определении $\ln x$

Ограничимся разложением $e^{-\Delta x_1}$ в степенной ряд [3], потребовав выполнения соотношения:

$$e^{-\Delta x_1} = 1 - \Delta x_1. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), имеем:

$$\bar{x} = e^{-x_1} (1 - \Delta x_1), \quad (9)$$

Тогда из (9) следует:

$$\Delta x_1 = 1 - \bar{x} e^{x_1}. \quad (10)$$

Логарифмируя соотношения (7), получим:

$$\begin{aligned} \ln \bar{x} &= \ln e^{-\Delta x_1} = \ln e^{-x_1 - \Delta x_1} = x'_1 = \\ &= -x_1 - \Delta x_1 = \bar{x} e^{x_1} - (1 + x_1). \end{aligned} \quad (11)$$

В конечном итоге имеем рабочую формулу

$$\ln \bar{x} = \bar{x} \exp x_1 - (1 + x_1). \quad (12)$$

Значения $\exp x_1$ и $-(1 + x_1)$ хранятся в ПЗУ с точностью 10^{-9} (девять верных десятичных знаков после запятой, в т. ч. один запасной) совместно

со значениями узловых точек x_1 (пять верных десятичных знаков после запятой). Структура массива констант в ПЗУ отражена в табл. 1. Она включает в себя 10^5 строк, содержащих в себе значения

узловых точек $\bar{x}_{0,5}$ отрезка $\left[\frac{1}{\exp(1)}; 1 \right]$ с шагом

$\Delta x_1 = 0,00001$, начиная с $0,36787$ до $1,00000$, их логарифмов $\ln \bar{x}_{0,5}$ и значения $x_1, -(1 + x_1), \exp x_1$, соответствующие соотношению (12).

Общий объем памяти ПЗУ составляет порядка 20 Мб.

Общее время t' вычисления функции $\ln x$, учитывая данные, приведенные в табл. 1, получим в виде:

$$t' = t_{\text{чт}} + t_c + t_y, \quad (13)$$

где $t_{\text{чт}}, t_c, t_y$ – соответственно время считывания из ПЗУ, сложения, умножения в АУ, нС.

Структура ПЗУ для вычисления функции $\ln x$

№ п/п	$\bar{x}_{0,5}$	$\ln \bar{x}_{0,5}$	x_1	$-(1+x_1)$	$\exp x_1$
1	0,36787	-1,000025664	1,00002	-2,00002	2,718336195
2	0,36788	-0,999998481	0,99999	-1,99999	2,718254646
3	0,36789	-0,999971299	0,99997	-1,99997	2,718200281
4	0,36790	-0,999944117	0,99994	-1,99994	2,718118736
5	0,36791	-0,999916936	0,99991	-1,99991	2,718037194

.					
.					
.					
	0,99997	-0,000030000	0,00003	-1,00003	1,000030000
	0,99998	-0,000020000	0,00002	-1,00002	1,000020000
	0,99999	-0,000010000	0,00001	-1,00001	1,000010000
	1,00000	0,000000000	0,00000	-1,00000	1,000000000

Если аргумент \bar{x}_1 не принадлежит этому отрезку, то, умножив его на 10^N , где $N \in \mathbb{Z}$ – множество значащих цифр, получим:

$$\ln \bar{x}_b = \ln 10^N \bar{z} = N \ln 10 + \ln \bar{z}, \quad (14)$$

где $\bar{z} \in \left[\frac{1}{\exp(1)}; 1 \right]$.

Если число \bar{x}_b имеет N значащих цифр в целой части, то $N \geq 0$, если в дробной – $N < 0$.

Если мы вычисляем логарифм по основанию a , отличному от e , то достаточно результат, полученный по формулам (11) и (14), умножить на модуль перехода M от основания a к основанию e :

$$\log_a \bar{x} = M \ln \bar{x}. \quad (15)$$

Для сравнения, вычисление $\ln \bar{x}$ по классической формуле разложением в степенной ряд имеет вид

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), \quad |x| < 1, \quad (16)$$

где $\ln \frac{1+x}{1-x} = \bar{x}$, тогда

$$x = \frac{\bar{x} - 1}{\bar{x} + 1}. \quad (17)$$

Пример.

Вычислить $\ln \bar{x}$ для числа $\bar{x} = 0,452716083$ с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$, используя формулы (12), (16), и сравнить временные затраты обоих методов, проводя расчёты с девятым запасным знаком после запятой с дальнейшим округлением результата до восьми знаков.

Решение.

1. Вычислим сначала $\ln \bar{x}$ по формуле (12):

$$x_1 = |\ln 0,45271| = |-0,79250| = 0,79250; \quad \exp x_1 = 2,208911809;$$

$$\ln \bar{x} = \bar{x} \exp x_1 - (1 + x_1) \approx 0,452716083 \cdot 2,208911809 - 1,79250 \approx -0,729490098 \approx -0,72949010.$$

2. Далее вычислим $\ln \bar{x}$ по формуле (16), предварительно определив приведённый аргумент x по формуле (17) и число слагаемых n , для которого выполняется условие (18):

Погрешность ε получается при замене суммы ряда (16) частичной суммой его n первых членов и может быть определена через остаток ряда R_n . В самом деле, если $\varepsilon \leq |R_n|$, то задача решена [3]. В нашем случае получим:

$$\varepsilon \leq |R_n| < \left| \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)} \right|. \quad (18)$$

Легко понять, что соотношение (18) может выполняться на некотором n -м шаге. В этом случае искомая сумма имеет n слагаемых, полученных из соотношения (16), тогда общие затраты времени t'' метода можно представить в виде:

$$t'' = (n+1)t_c + n^2 t_y + n t_d, \quad (19)$$

где t_c , t_y , t_d – соответственно время сложения, умножения, деления в АУ, нС.

Если учесть, что $t_y = 2t_c$, $t_d = 1,5t_y = 3t_c$, $t_r = 0,5t_c$, получим:

$$t' = 0,5t_c + t_c + 2t_c = 3,5t_c; \quad (20)$$

$$t'' = (n+1)t_c + 2n^2 t_c + 3nt_c = (2n^2 + 4n + 1)t_c. \quad (21)$$

Вычислим выигрыш во времени

$$\eta = \frac{t''}{t'} = \frac{(2n^2 + 4n + 1)t_c}{3,5t_c} = \frac{2n^2 + 4n + 1}{3,5}. \quad (22)$$

Ниже решим конкретный пример вычисления $\ln x$.

$$x = \frac{\bar{x} - 1}{\bar{x} + 1} = \frac{0,452716083 - 1}{0,452716083 + 1} \approx -0,376731505.$$

Делая перебор для $n = 1, 2, 3, \dots$, получим:

$$|R_8| = \left| \frac{-2 \cdot 0,376731505^{2 \cdot 8 + 1}}{(2 \cdot 8 + 1) \cdot (1 - 0,376731505^2)} \right| = 0,000000009 < \varepsilon = 10^{-8};$$

$$\ln x \approx -2 \left\{ \begin{aligned} &0,376731505 + \frac{0,376731505^3}{3} + \frac{9,376731505^5}{5} + \frac{9,376731505^7}{7} + \frac{9,376731505^9}{9} + \\ &+ \frac{9,376731505^{11}}{11} + \frac{9,376731505^{13}}{13} + \frac{9,376731505^{15}}{15} + \frac{9,376731505^{17}}{17} \end{aligned} \right\};$$

$$\ln x \approx -0,792490095 \approx -0,79249010.$$

Сравним затраты времени по формуле (22):

$$\eta = \frac{t''}{t'} = \frac{2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 1}{3,5} = 46.$$

Таблично-симметричный метод может иметь широкое применение для решения задач интерполяции при формировании математического обеспечения функциональных процессов [7].

Предлагаемый метод исключает операцию деления при нахождении $\ln \bar{x}$, что резко ускоряет процесс вычисления функции в точке.

Для сравнения ниже в табл. 2 приведены табличные значения $\ln \bar{x}$ в нескольких точках \bar{x} отрезка $\left[\frac{1}{\exp(1)}; 1 \right]$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-8}$ с одним запасным знаком после запятой.

Таблица 2

Сравнительные результаты вычисления $\ln \bar{x}$

\bar{x}	x_1	$\bar{x} \exp x_1 - (1 + x_1)$	$\ln \bar{x}$
0,417250631	0,87406	-0,874068204	-0,874068204
0,723511493	0,32363	-0,323638848	-0,323638848
0,948617352	0,05274	-0,052749773	-0,052749773

Высокая точность вычисления исследуемых параметров (биотоков, микронапряжений и т. п.) позволяет применить указанный подход в работе с биологическими объектами, в нейрофизиологии, атомной физике и т. д., в режиме реального времени (*online*).

Выводы

1. Проведён анализ существующих подходов к нахождению логарифмической функции, отражены их преимущества и недостатки.

2. Отдельно рассмотрен таблично-симметричный метод и получена рабочая формула вычисления логарифма с заданной точностью.

3. Обосновано применение полученных результатов для решения целого ряда практических задач теплотехники и смежных с ней областей науки и техники [9].

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих и малоотходных процессов обработки сталей, чугунов, наноструктурных и композиционных металлических материалов с применением прогрессивных способов термической и химико-термической обработки. Данные материалы могут быть использованы также при расчете характеристик теплоемкости, энтальпии и энтропии образования и движения

вакансий, критериев процессов аномальной самодиффузии, высокой деформационной способности, деформируемости, сверхпластичности с использованием рекомендаций работ авторов [9 – 17].

Работа выполнена по проекту № 11.6682.2017/8.9.

