

ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ СФЕРЫ БЫТА И УСЛУГ
Кафедра общей и прикладной физики

А.В. ОСТРИК

МЕХАНИКА

(учебное пособие для студентов инженерно-технических и технологических специальностей)

Под редакцией профессора, д.ф.-м.н. *В.И. Кондаурова*

Рекомендовано к изданию УМО по образованию в области социально-бытового обслуживания населения

Рецензенты: профессор, д.ф.-м.н. *И.Б. Петров*, доцент, к.ф.-м.н. *Л.Д. Добычина*

Москва – 1996

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
I. Введение	4
1.1. Предмет физики и её методы исследования.....	4
1.2. Взаимосвязь физики с другими науками.....	5
II. Кинематика	8
2.1. Основные положения механики.....	8
2.2. Некоторые сведения из векторной алгебры и анализа.....	8
2.3. Кинематика материальной точки и твердого тела.....	9
III. Динамика материальной точки	17
3.1. Инерциальные системы отсчета.....	17
3.2. Второй и третий законы Ньютона.....	40
3.3. Реактивное движение. Формула Мещерского.....	19
3.4. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета.....	20
IV. Законы сохранения. Столкновение частиц	22
4.1. Закон сохранения импульса системы материальных точек. Задача двух тел.....	22
4.2. Закон сохранения момента импульса.....	24
4.3. Закон сохранения энергии.....	25
4.4. Столкновение частиц.....	28
V. Динамика абсолютно твердого тела	33
5.1. Момент инерции. Теорема Штейнера.....	33
5.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.....	34
5.3. Уравнения Эйлера.....	35
5.4. Динамика гироскопов.....	38
VI. Колебания	40
6.1. Свободные незатухающие колебания.....	40
6.2. Сложение гармонических колебаний.....	42
6.3. Колебания с трением.....	44
6.4. Вынужденные колебания.....	45
6.5. Параметрические и автоколебания.....	47
VII. Механика жидкостей и газов	49
7.1. Модель сплошной среды.....	49
7.2. Уравнения массы энергии и импульса.....	49
7.3. Вязкость. Ламинарное и турбулентное течения.....	52
7.4. Течение вязкой жидкости в круглой трубе.....	54
7.5. Лобовое сопротивление и подъемная сила. Сила Сокса.....	55
VIII. Механика твердого деформируемого тела	57
8.1. Уравнения теории упругости.....	57
8.2. Упругие волны.....	61
8.3. Фазовая и групповая скорости.....	66

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью настоящего методического пособия является ознакомление студентов технологических специальностей с общими идеями, принципами и законами, описывающими простейшую форму движения материи – механическое движение. Небольшое число учебных часов, отводимых по программе ГАСБУ на изучение общей физики, позволяет изложить лишь ее основы для того, чтобы сформировать у студента физический подход к решению конкретных задач практики.

По классической механике написано немало хороших книг и предлагаемый краткий курс ни в коей мере не может их заменить. Однако при подготовке к экзаменам у студентов нет времени работать с большими объемами литературы в поисках ответов на поставленные программой вопросы. В этих условиях полезно иметь под руками краткое изложение основных законов механики, представленных с единых методических позиций и в одной системе обозначений. Для облегчения и контроля усвоения материала в конце каждого раздела, соответствующего одной лекции, приводятся вопросы близкие к тем, которые обычно задаются при сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие окажется полезным для студентов, а также станет предметом обсуждений преподавателей, и с интересом ждет отзывов, пожеланий, замечаний и предложений.

Изучение предлагаемого учебного пособия по механике недостаточно для ее глубокого усвоения. Более детально вопросы классической механики изложены в следующих книгах.

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т.1, М., 1979.
2. *Сивухин Д.Б.* Общий курс физики, т.1, М., 1975.
3. *Стрелков С.П.* Механика, М., 1985.
4. *Р.Фейман, Р.Лейтон, М.Сэндс* Феймановские лекции по физике, т. 1,2,7, М., "Мир", 1975.
5. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики, М. "Наука", 1975.
6. *Иродов И.Е.* Основные законы механики, М., "Высшая школа", 1975.
7. *Айзерман М.А.* Классическая механика, М., "Наука", 1974.
8. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика, М., "Наука", 1976.
9. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред, М., "Наука", 1982.

I. ВВЕДЕНИЕ

1.1 Предмет физики и методы ее исследования

Физика – это наука о наиболее общих фундаментальных законах природы. Объектами изучения физики являются материальные структуры окружающего нас мира: элементарные частицы, атомы, молекулы, кристаллы и аморфные тела, силовые поля (электромагнитные, гравитационные, ядерные и т. д.), а также их строение, взаимодействие и движение.

Число основных законов, описывающих поведение материальных структур, весьма большое и заманчиво их сначала привести, а потом показать как они работают в различных условиях, т.е. изложить за пять минут то, что не сделать и за несколько лет. Это, к сожалению, невозможно. Во-первых, не все законы известны. Во-вторых, формулировка наиболее общих законов связана со многими необычными идеями, требующими для описания столь же необычной математики. Поэтому приходится двигаться шаг за шагом, постепенно увеличивая число основных понятий и вводя соответствующий математический аппарат. В основе науки познания лежит следующая принцип: **пробный камень всех наших знаний - это опыт**. В целом, процесс познания осуществляется по следующей схеме:



Такая схема отражает структуру и последовательность мышления человека, познающего окружающий мир от фактов и эксперимента к центральному обобщению – закону, а от него к конкретным выводам, применяемым на практике.

Заниматься и теорией и экспериментом практически невозможно из-за больших различий в этих этапах процесса познания. Поэтому физики условно делятся на теоретиков и экспериментаторов.

Теоретики воображают, анализируют и формулируют новые законы. Предметом теоретической физики являются модели, заменяющие реальные физические объекты идеальными (например, материальная точка, абсолютно твердое тело, упругое тело, идеальный газ, вязкая жидкость и т. д.; эти модели нам встретятся в дальнейшем). Модели, конечно, не полностью адекватны физическим объектам и отражают лишь его основные черты и связи, важные (проявляющиеся) в изучаемом явлении. Задача теоретиков анализировать результаты экспериментов, на их основе определять границы применимости существующих моделей и строить новые, более точные, модели материальных структур и их взаимодействий. Завершающим этапом построения теории является математическая модель, представляющая собой совокупность уравнений (как правило, дифференциальных или интегральных) с ограничениями (начальными и граничными условиями, дополнительными требованиями гладкости решения, условиями нормировки и т.д.), обеспечивающими существование решения, его единственность и непрерывную зависимость от исходных данных (все это вместе называется корректностью задачи).

Задачи экспериментаторов: создавать установки, ставить на них опыты, формулировать результаты, изменять условия проведения экспериментов и в соответствии с ними модернизировать установки. Большое внимание экспериментаторам приходится уделять анализу ошибок и работе по их частичному уменьшению. Ошибки делятся на систематические и случайные. **Случайные ошибки** (обусловленные, например, сейсмическими колебаниями оснований установок, тепловыми флуктуациями и т.д.) полностью в принципе не устранимы и могут быть лишь снижены до определенного уровня. Оценки величин этих ошибок делаются на основе статистической теории обработки эксперимента, опирающейся на теорию вероятности. Наиболее опасны **систематические ошибки** (например, неисправность измерительного прибора или учет влияния каких-либо побочных явлений, существенно изменяющих результаты, или использование при косвенных измерениях неверных данных других экспе-

риментов), которые себя никак не проявляют, но могут привести к неверным результатам. Борьба с ними можно с помощью проведения независимых экспериментов на основе отличающихся средств измерения и (или) других физических явлений. Различие в полученных при этом результатах и будет являться указанием на возможность наличия в одном из экспериментов систематической ошибки. Следует отметить, что в настоящее время экспериментальная физика стала коллективным и даже государственным делом, поскольку для проведения экспериментов требуется создание дорогостоящих, крупногабаритных и весьма сложных установок, объединяющих в себе идеи и плоды исследований из различных пограничных областей науки.

Хотя мир – един, и все физические явления, как правило, взаимосвязаны, для удобства изучения физика условно разбивается на механику, статистическую физику и термодинамику, электромагнитизм, оптику, квантовую механику, атомную физику и т.д. Мы будем изучать наиболее простой и интуитивно легче всего воспринимаемый раздел физики – классическую механику.

1.2 Взаимосвязь физики с другими науками

Физика, являясь наукой о фундаментальных законах природы, тесно связана и оказывает огромное влияние на соседние области естествознания, а также другие направления деятельности и творчества человечества.

Прежде всего - на **математику**. **Математика - язык физики**, средство для количественного описания физических процессов.

Подчеркивая значение математики для физической науки, один известный физик определил ее как попытку заставить природу подчиняться математике. Поэтому математика может нравиться или нет, но без ее знания изучение физики невозможно. В свою очередь, физика тоже помогает математике: поставляет ей новые идеи, а иногда и даже целые направления для исследований. Например, обобщенные функции (в частности, δ - функция Дирака) возникли первоначально в физике без должного обоснования, а затем уже усилиями математики была построена теория обобщенных функций.

Наиболее тесно взаимосвязана физика с **химией**. В результате кропотливого изучения свойств химических элементов в химии была построена периодическая система Д.И.Менделеева. Теоретическое же обоснование этого открытия стало возможным лишь после создания нового раздела физики – квантовой механики. Поэтому **в основах теоретической химии лежит квантовая механика**. Кроме того, у химии и физики есть общий раздел – это статистическая механика. В любой химической реакции участвует большое число атомов, движущихся случайным образом, и необходимо построить способы описания таких систем, поскольку прямая попытка расчета поведения каждого атома в отдельности не под силу даже современным ЭВМ. В физике статистическая механика необходима, прежде всего, для обоснования положений термодинамики.

К физике и химии близко примыкает **биология – наука о живом**. Именно при экспериментах над замкнутыми системами, содержащими в своем составе живые организмы, был открыт один из основных законов физики – закон сохранения энергии. Органическая химия изучает состав, строение и химические свойства веществ, синтезируемых живой материей. В функционировании организмов можно наблюдать много физических процессов: циркуляцию крови, ее давление, передачу электрических сигналов по нервным тканям, работу хрусталика как фокусирующей линзы и т.д. Однако было бы неправомерным сводить биологию к физике. Один из создателей квантовой механики Э. Шредингер в книге "Что такое жизнь" убедительно показывает, что многие явления жизни не поддаются объяснению на основе известных физических законов. Более того, на современном этапе такое сложное явление как жизнь не удастся объяснить, оставаясь в рамках узко материалистического миропонимания (например, материалистическая теория происхождения видов Дарвина подвергается в настоящее время конструктивной критике, но остается неясным, чем ее можно бы было заменить, поскольку предлагаемые теории "квантовых" скачков в эволюции видов неизбежно приводят к выводу об участии в таких скачках духовного начала). В то же время физика обеспечивает

биологию измерительной аппаратурой для проведения исследований. Физические явления используются также в медицине для поддержания жизни и диагностики (например, действие лазерного излучения для исправления дефектов глаза и разрушения камней в почках).

Следующая близкая к физике наука – **астрономия**. Астрономия старше физики. Именно экспериментально наблюдаемая астрономами простота в закономерностях движения звезд и планет послужила толчком к открытию законов механики и началу развития физики как науки. **Выдающимся открытием астрономии было то, что все звезды состоят из тех же атомов, что и Земля.** Следовательно, в астрономии можно использовать физические законы, которые были открыты и экспериментально проверены в земных условиях. Физика помогла астрономии объяснить источники энергии звезд как термоядерные реакции, теоретически предсказать такие нетривиальные объекты как пульсары, черные дыры и многое другое (этими вопросами в настоящее время занимается часть физики-астрофизика).

С физикой тесно связаны также **геология – наука о Земле и метеорология – наука о погоде на Земле.** Метеорология снабжена приборами благодаря развитию экспериментальной физики. Однако исчерпывающая теория до сих пор не разработана. На первый взгляд кажется странным почему, зная состояние воздуха сегодня, мы не можем предсказать его завтра. Вся причина в неустойчивости атмосферных течений. На самом деле мы не знаем состояния атмосферы и сегодня, т.к. из-за неустойчивости воздушной массы все время происходит ее завихрение (аналогично тому, как состояние воды до падения с плотины хорошо известно, а после падения завихряется и разбивается на струи совершенно непредсказуемым образом). Такое неустойчивое поведение газа или жидкости называется турбулентным течением, плохо поддающимся детерминированному описанию, и в связи с этим уверенно предсказывать погоду мы до сих пор не умеем.

Переходя к геологии, следует, отметить, что главным вопросом этой науки является вопрос о том, как Земля стала такой, как она есть. В повседневной жизни мы наблюдаем течение разрушительных процессов: реки подмывают берега, поля заносятся пылью, с горных вершин падают камни и т.д. Однако горы сейчас не ниже, чем были в прошлом. Следовательно, наряду с разрушением горных массивов идет процесс горообразования. Но пока остается не вполне ясным, почему и как происходят восстановительные процессы типа горообразования. Не лучше обстоит дело с исследованием процессов в недрах Земли. Хорошо известно распределение плотности вещества внутри планеты, однако до сих пор не построена удовлетворительная теория состояния вещества при давлениях и температурах, характерных для внутренних оболочек Земли. Как это не парадоксально, состояние вещества в звездах, где температура выше, мы знаем лучше, чем на собственной планете.

Психология, парапсихология, психоанализ, гипноз и т.д. – это, с точки зрения физика, скорее не науки, т.к. на современном этапе они не поддаются объяснению на основе известных физических законов. Но и здесь есть ряд очень интересных, чисто физических задач и проблем. Например: пусть животное чему-то научилось, чего прежде не умело делать – значит что-то изменилось в клетках головного мозга или еще где-то; в чем состоит это изменение и где оно произошло – неизвестно. Это очень важная проблема и притом в значительной степени нерешенная. Близкая к ней проблема распознавания образов, тесно связанная с психологией и физикой системы "глаз-мозг". Для этой области характерным является пример известного специалиста космонавтики и искусствоведения Б.В. Раушенбаха: удаление предмета не соответствует его уменьшению, т.к. согласно требованиям подобию глаз стремится сохранить размер неизменным, сам его как-то "пересчитывая".

Даже это небольшое число примеров показывает, что успехи в физике плодотворно сказываются на развитии смежных с ней наук, а она, в свою очередь, впитывает все их достижения.

ВОПРОСЫ

1. Что такое физика? Какие объекты она изучает?
2. В какой последовательности осуществляется процесс познания?
3. Чем занимаются теоретики и чем - экспериментаторы?
4. Какие модели физических объектов Вы знаете?
5. Чем отличаются систематические ошибки от случайных?
6. С какими науками физика наиболее тесно связана?
7. Какова роль математики в физике?
8. Как взаимосвязаны физика и химия?
9. Какие открытия в астрономии наиболее сильно повлияли на развитие физики?
10. Что дает физика для развития науки о живом – биологии?
11. Можно ли полностью объяснить явления в живой материи на основе физических законов?
12. Почему физики не могут точно предсказывать погоду?
13. Какова главная проблема в геологии?
14. Из каких разделов состоит физика?

II. Кинематика

2.1. Основные положения механики

Механика – раздел физики, изучающий простейшую форму движения материи – механическое движение, т.е. движение материальных объектов в пространстве и времени. Это определение имеет смысл, если установлено, что означают термины: "движение", "материальные объекты", "пространство", "время". Далее мы будем рассматривать случай, когда скорости материальных объектов V малы по сравнению со скоростью света C ($C=300000\text{км/с}$): $V/C \ll 1$. Механика при таких скоростях называется классической. В классической механике предполагается, что **свойства пространства и времени не зависят от того, какие материальные объекты в них движутся**. Это позволяет изучать способы описания движения независимо от физических свойств движущихся объектов. **Раздел механики, где изучаются способы описания движения независимо от причин** (причины изучаются в динамике), **вызывающих это движение, называется кинематикой**:

$$\boxed{\text{кинematика}} = \boxed{\text{геометрия}} + \boxed{\text{хронометрия}}$$

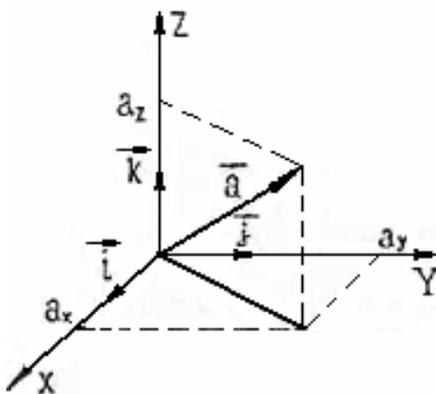
Вообще говоря, кинематика – часть математики, но поскольку хронометрия мало что добавляет к геометрии, то кинематика не интересует математиков и рассматривается в курсах физики.

Движение определяется как изменение положения одних тел относительно других. Эти другие тела называются телами отсчета. Как правило, с ними связывают систему координат. **Совокупность тел отсчета, связанных с ними систем координат и синхронизированных между собой часов** (приборов для измерения промежутков времени между событиями) **называется системой отсчета**. В классической механике линейные масштабы и промежутки времени между событиями остаются неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой. Кроме того, предполагается, что **пространство и время – абсолютны**, т.е. не зависят друг от друга и от выбора системы отсчета. **Пространство считается евклидовым, однородным и изотропным, а время – однородным**. При этом все системы отсчета равноправны и можно говорить лишь о движении одной системы отсчета относительно другой, но нельзя говорить об абсолютном движении системы отсчета.

Теперь о материальных объектах (телах). В качестве моделей материальных объектов в механике наиболее часто рассматриваются материальная точка (м.т.) и абсолютно твердое тело (т.т). **Материальная точка – тело, линейными размерами которого в условиях задачи можно пренебречь**. **Твердое тело – система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения**, т.е. деформации тела либо несущественны для решаемой задачи, либо пренебрежимо малы.

2.2. Некоторые сведения из векторной алгебры и анализа

Математическое описание задач механики невозможно без знания основ векторной алгебры, поскольку основные параметры, описывающие движение (положение м.т., ее скорость, ускорение) являются векторными величинами. Приведем некоторые сведения из векторной алгебры и векторного анализа.



Вектором называется направленный отрезок, характеризуемый длиной (модулем) и направлением в пространстве. Другое определение вектора опирается на используемую систему координат: **вектор есть объект, описываемый в каждой системе координат тройкой чисел, называемых компонентами, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются как проекции направленного отрезка**. Часто используется понятие единичного векто-

ра – вектора, длина которого равна единице. Так, единичный вектор \hat{e} в направлении некоторого вектора \hat{a} равен

$$\hat{e} = \frac{\hat{a}}{|\hat{a}|}.$$

В дальнейшем будем использовать только ортонормированные декартовы системы координат с прямыми координатными линиями X, Y, Z и ортонормированным базисом, состоящим из трех единичных взаимно перпендикулярных векторов $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$. Любой вектор может быть единственным образом разложен по базисным векторам $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (см. рис.):

$$\hat{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}.$$

Операции сложения и умножения на число вводятся для векторов так, чтобы им соответствовали те же операции над компонентами. Например:

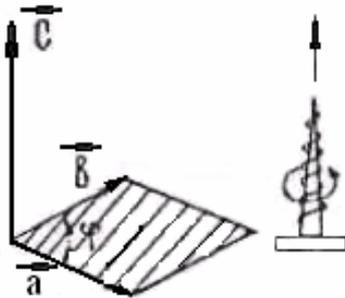
$$\hat{a} + \hat{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}.$$

Кроме того, вводятся три операции умножения.

Скалярное умножение (\hat{a}, \hat{b}) – это скаляр, определяемый следующим образом:

$$(\hat{a}, \hat{b}) = |\hat{a}| |\hat{b}| \cos(j).$$

Векторное умножение $[\hat{a}, \hat{b}]$ двух векторов определяется вектором \hat{c} , длина которого равна площади параллелограмма, построенного на сторонах \hat{a} и \hat{b} , а направление перпендикулярно к \hat{a} и \hat{b} , причем так, что вектора $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$, образуют правую тройку векторов (правило буравчика, см. рисунок). В силу определения



$$|\hat{c}| = |[\hat{a}, \hat{b}]| = |\hat{a}| |\hat{b}| \sin(j),$$

где j – угол между векторами \hat{a} и \hat{b} .

Для векторного умножения справедливы соотношения:

$$[\hat{a}, \hat{b}] = -[\hat{b}, \hat{a}], \quad [\hat{a}, [\hat{b}, \hat{c}]] = \hat{b}(\hat{a}, \hat{c}) - \hat{c}(\hat{a}, \hat{b}).$$

Смешанное умножение трех векторов есть скаляр $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$, абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ как на ребрах:

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = (\hat{a}, [\hat{b}, \hat{c}]) = ([\hat{a}, \hat{b}], \hat{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Для векторных функций от параметра t (далее в качестве параметра t рассматривается время) $\hat{a} = \hat{a}(t)$ вводится понятие производной по параметру (производную $\frac{d}{dt}$ будем, когда это удобно, обозначать точкой сверху дифференцируемой величины):

$$\dot{\hat{a}} = \frac{d\hat{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{a}(t + \Delta t) - \hat{a}(t)}{\Delta t} = \frac{da_x}{dt} \hat{i} + \frac{da_y}{dt} \hat{j} + \frac{da_z}{dt} \hat{k}.$$

Производная векторной функции обладает свойствами, аналогичными свойствам производной от скалярной функции, например:

$$\frac{d}{dt} [\hat{a}, \hat{b}] = \left[\dot{\hat{a}}, \hat{b} \right] + \left[\hat{a}, \dot{\hat{b}} \right], \quad \frac{d}{dt} (\hat{a}, \hat{b}) = \left(\dot{\hat{a}}, \hat{b} \right) + \left(\hat{a}, \dot{\hat{b}} \right)$$

2.3. Кинематика материальной точки и твердого тела

Перейдем теперь к изучению кинематики. Основная задача кинематики состоит в том, чтобы задать или определить положение движущейся точки или тела относительно некото-

рой системы отсчета в каждый момент времени. При этом причины движения - действующие на тела силы и их связи с кинематическими параметрами - не рассматриваются.

В кинематике возникают следующие три основные задачи.

1. Имеется неподвижная система отсчета и связанный с ней наблюдатель. Необходимо описать движение м.т. относительно наблюдателя.

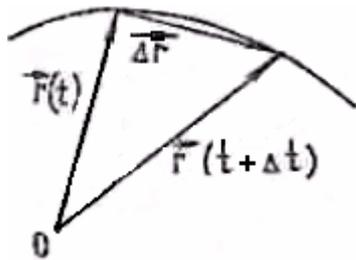
2. Заданы две системы отсчета и наблюдатель, связанный с первой системой. Описать движение второй системы отсчета относительно наблюдателя. Поскольку со второй системой отсчета можно связать твердое тело, то сформулированная ситуация эквивалентна задаче описания движения т.т. относительно неподвижного наблюдателя.

3. Имеется две системы отсчета и с каждой из них связан наблюдатель. Известно движение м.т. относительно одной из систем и движение этой системы относительно другой. Определить движение точки относительно этой другой системы отсчета.

Таким образом, возникает задача перехода в описании движения м.т. относительно наблюдателей, связанных с различными системами отсчета.

Начнем с кинематики точки – описания движения м.т. относительно неподвижной системы координат. Рассматривают три способа описания движения: векторный, координатный и естественный.

Векторный способ – положение точки задается ее радиусом вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ с началом в некоторой неподвижной точке 0.



Тогда мгновенная скорость м.т. $\dot{\mathbf{V}}$ и ее ускорение $\dot{\mathbf{a}}$ определяются через векторную функцию $\mathbf{r}(t)$ по следующим формулам:

$$\dot{\mathbf{V}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t),$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\dot{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

При этом $\left| \dot{\mathbf{V}} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \neq \frac{dr}{dt}$, т.к. $dr \neq |dr^2|$ (например, при движении по окружности $dr = 0$, а $|d\mathbf{r}| \neq 0$).

Пример 2.1. Пусть задан закон движения: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}_0 t + \frac{\mathbf{g} t^2}{2}$, $\dot{\mathbf{V}}_0 = const$, $\dot{\mathbf{g}} = const$. Тогда по выше приведенным формулам получаем:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{g}t, \quad \mathbf{a} = \frac{d\dot{\mathbf{V}}}{dt} = \mathbf{g}.$$

Следовательно, заданный закон описывает равноускоренное движение с ускорением $\dot{\mathbf{g}}$ и начальной скоростью $\dot{\mathbf{V}}_0$.

Возникает и обратная задача: зная ускорение $\dot{\mathbf{a}}(t)$, определить радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$. В этом случае оказывается необходимым кроме $\dot{\mathbf{a}}(t)$ знать и начальные условия $\dot{\mathbf{V}}_0$ и \mathbf{r}_0 , т.е. значения $\dot{\mathbf{V}}$ и \mathbf{r} при $t=0$. Пусть, например, имеем $\dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{\mathbf{g}}$, тогда

$$\Delta \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}} - \dot{\mathbf{V}}_0 = \int_0^t \dot{\mathbf{a}}(t) dt = \int_0^t \dot{\mathbf{g}} dt = \dot{\mathbf{g}}t,$$

откуда

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}_0 + \dot{\mathbf{g}}t.$$

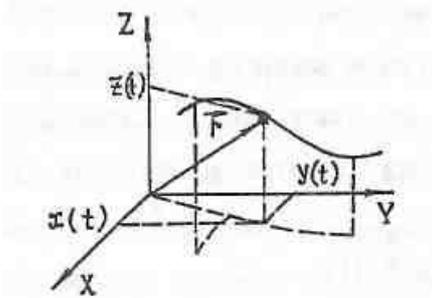
Аналогично для радиуса - вектора получаем:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int_0^t \dot{\mathbf{V}}(t) dt = \int_0^t (\dot{\mathbf{V}}_0 + \dot{\mathbf{g}}t) dt = \dot{\mathbf{V}}_0 t + \frac{\dot{\mathbf{g}} t^2}{2},$$

откуда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}_0 t + \frac{\mathbf{g} t^2}{2}.$$

При **координатном способе** описания движения положение м.т. задается тремя скалярными функциями, которые представляют собой координаты движущейся точки в системе координат, жестко связанной с телом отсчета. Для декартовой системы координат имеем (см. рис.) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.



Прямоугольные декартовы координаты x, y, z являются проекциями радиуса -вектора \mathbf{r} , проведенного в рассматриваемую точку из начала координат, т.е. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Тогда скорости и ускорения определяются по следующим формулам:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k},$$

откуда

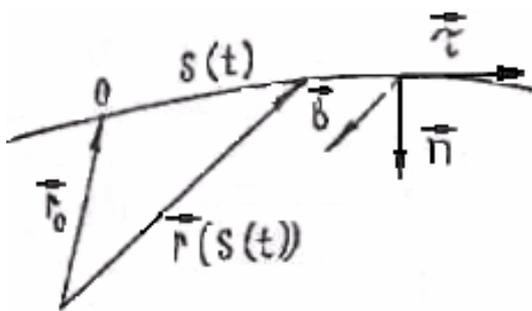
$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt};$$

$$\cos(\mathbf{V}, \mathbf{i}) = V_x / V, \quad \cos(\mathbf{V}, \mathbf{j}) = V_y / V, \quad \cos(\mathbf{V}, \mathbf{k}) = V_z / V, \quad V = |\mathbf{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \dots$$

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{i}) = a_x / a, \quad \cos(\mathbf{a}, \mathbf{j}) = a_y / a, \quad \cos(\mathbf{a}, \mathbf{k}) = a_z / a, \quad a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При **естественном способе** описания движения м. т. задают форму траектории, начало отсчета на ней (т.О) и дуговую координату (расстояние вдоль траектории от начала отсчета О до текущего положения точки, см. рисунок) $S = S(t)$. Скорости и ускорения м.т. выражаются



через форму траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}(S)$ и производные функции $S(t)$. Знание формы траектории позволяет в каждой ее точке определить кривизну $1/r$, а также построить сопровождающий трехгранник: $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ (\mathbf{t} - единичный вектор касательный к траектории, \mathbf{n} - единичный вектор главной нормали, $\mathbf{b} = [\mathbf{n}, \mathbf{t}]$ - единичный вектор бинормали) по заданной векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(S)$. Направление касательного

вектора \mathbf{t} совпадает с направлением приращения радиус -вектора $d\mathbf{r}$, и поскольку величина $|d\mathbf{r}|$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна элементу дуги dS , то

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dS}.$$

Второй орт \mathbf{n} направлен по приращению $d\mathbf{t}$, т.е. по главной нормали к траектории

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dS} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dS^2} = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{dS^2} \right| \mathbf{n}.$$

По определению радиус кривизны траектории r есть отношение приращения длины дуги dS к $d\alpha$ -углу между $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{r}} + d\dot{\mathbf{r}}$:

$$r = \frac{dS}{d\alpha}.$$

Т.к. модуль приращения касательного единичного вектора $d\dot{\mathbf{t}}$ с точностью до величин высшего порядка малости равен углу $d\alpha$, то

$$r = \frac{dS}{d\alpha} = \frac{1}{\left| \frac{d\dot{\mathbf{t}}}{dS} \right|} = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{dS^2} \right|^{-1}, \text{ откуда } \frac{d\dot{\mathbf{t}}}{dS} = \frac{\dot{\mathbf{n}}}{r}.$$

Рассмотренных характеристик и соотношений достаточно для определения \dot{V} и \dot{a} :

$$\dot{V} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt} \dot{\mathbf{t}}, \text{ т.е.}$$

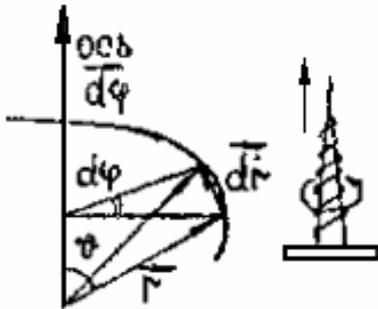
$$\dot{V} = \frac{dS}{dt} \dot{\mathbf{t}}, \quad V = |\dot{V}| = \left| \frac{dS}{dt} \right|,$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dS}{dt} \dot{\mathbf{t}} \right) = \frac{d^2S}{dt^2} \dot{\mathbf{t}} + \frac{dS}{dt} \frac{d\dot{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \dot{\mathbf{t}} + \frac{dS}{dt} \frac{d\dot{\mathbf{t}}}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \dot{\mathbf{t}} + \frac{1}{r} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \dot{\mathbf{n}}.$$

Итак,

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d^2S}{dt^2} \dot{\mathbf{t}} + \frac{1}{r} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \dot{\mathbf{n}} = \frac{dV}{dt} \dot{\mathbf{t}} + \frac{V^2}{r} \dot{\mathbf{n}}, \quad a = |\dot{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt} \right)^2 + \frac{V^4}{r^2}}$$

Проекция a_t называется тангенциальной составляющей ускорения, а проекция a_n – нормальной составляющей. Из полученных соотношений следует, что скорость всегда направлена по касательной к траектории, а проекция ускорения на бинормаль равняется нулю.



Перейдем к рассмотрению второй задачи кинематики – описанию движения одной системы отсчета относительно другой (кинематики абсолютно твердого тела). Рассмотрим сначала частный случай вращения т.т. вокруг неподвижной оси. При таком движении все точки т.т. описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Тогда $|\dot{d\mathbf{r}}| = r \sin(J) dj$ и, следовательно,

$$d\dot{\mathbf{r}} = [dj^{\dot{}}, \dot{\mathbf{r}}], \tag{2.1}$$

где $dj^{\dot{}}$ – направленный вдоль оси вращения вектор, модуль которого равен $d\phi$, а направление определяется по правилу "буравчика" (см. рис.). Отметим, что для конечного поворота $|\Delta\dot{\mathbf{r}}| = 2r \sin(J) \sin(\Delta J/2)$ и соотношение, аналогичное (2.1), не выполняется.

Легко показать, что справедлив закон векторного сложения малых поворотов. Пусть твердым телом совершено два поворота $dj_1^{\dot{}}$ и $dj_2^{\dot{}}$ вокруг осей 1 и 2, соответственно. Тогда

$$d\dot{\mathbf{r}} = d\dot{\mathbf{r}}_1 + d\dot{\mathbf{r}}_2 = [dj_1^{\dot{}}, \dot{\mathbf{r}}] + [dj_2^{\dot{}}, \dot{\mathbf{r}}] = [dj_1^{\dot{}} + dj_2^{\dot{}}, \dot{\mathbf{r}}] = [dj^{\dot{}}, \dot{\mathbf{r}}],$$

т.е. на самом деле два малых поворота эквивалентны одному, являющемуся их векторной суммой

$$d\mathbf{j} = d\mathbf{j}_1 + d\mathbf{j}_2. \quad (2.2)$$

Введем теперь вектора угловой скорости и углового ускорения:

$$\frac{\mathbf{r}}{W} = \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \quad \frac{\mathbf{r}}{b} = \frac{dW}{dt} = \frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2}. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует справедливость векторного сложения для угловых скоростей (а значит и ускорений)

$$\dot{W} = \dot{W}_1 + \dot{W}_2. \quad (2.4)$$

Деля соотношение (2.1) на dt , получаем связь между линейными и угловыми скоростями для точек т.т., вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\dot{V} = [\dot{W}, \mathbf{r}], \quad V = |\dot{V}| = |\dot{W}| |\mathbf{r}| \sin(J) = W r, \quad (2.5)$$

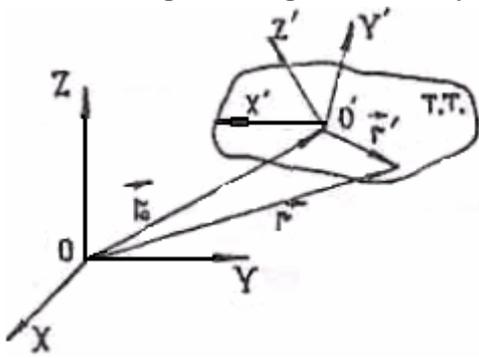
где r - расстояние от точки до оси вращения. Используя соотношение (2.5), определяем ускорение точки т.т.

$$\frac{\mathbf{r}}{a} = \frac{d\dot{V}}{dt} = \frac{d}{dt} [\dot{W}, \mathbf{r}] = \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{W}, \mathbf{r} \right] + \left[\frac{\mathbf{r}}{W}, \dot{\mathbf{r}} \right] = \left[\frac{\mathbf{r}}{b}, \mathbf{r} \right] + \left[\frac{\mathbf{r}}{W}, \dot{V} \right] = \left[\frac{\mathbf{r}}{b}, \mathbf{r} \right] + \left[\frac{\mathbf{r}}{W}, [\dot{W}, \mathbf{r}] \right].$$

Итак, ускорение точки т.т. состоит из двух частей: тангенциального $\frac{\mathbf{r}}{a_t} = \left[\frac{\mathbf{r}}{b}, \mathbf{r} \right]$ и нормального $\frac{\mathbf{r}}{a_n} = \left[\frac{\mathbf{r}}{W}, [\dot{W}, \mathbf{r}] \right] = W^2 r \frac{\mathbf{r}}{n}$. Следовательно,

$$a = |\dot{a}| = r \sqrt{b^2 + W^4}.$$

Рассмотрим теперь общий случай движения т.т. относительно некоторой системы отсчета $OXYZ$. Свяжем с твердым телом штрихованную систему отсчета $O'X'Y'Z'$. Пусть положение начала координат O' относительно системы $OXYZ$ определяется вектором $\dot{\mathbf{i}}_0$. Положение любой точки т.т. в ней - вектором $\dot{\mathbf{i}}$, а в системе $O'X'Y'Z'$ - вектором $\dot{\mathbf{i}}'$ (см. рис.)- Учитывая, что угловые скорости можно векторно складывать, а производная единичного вектора перпендикулярна к нему, можно получить общее выражение для угловой скорости



$$\dot{W} = W_x \dot{\mathbf{i}}' + W_y \dot{\mathbf{j}}' + W_z \dot{\mathbf{k}}' = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{j}}, \mathbf{k}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{i}}' + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{k}}, \mathbf{i}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{j}}' + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{i}}, \mathbf{j}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{k}}' \quad (2.6)$$

Производные по времени для любого орта штрихованной системы координат выражаются через вектор угловой скорости

$$\dot{\mathbf{i}}' = [\dot{W}, \dot{\mathbf{i}}'], \quad (2.7)$$

$$[\dot{W}, \dot{\mathbf{i}}'] = \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{j}}, \mathbf{k}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{i}}' + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{k}}, \mathbf{i}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{j}}' + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{i}}, \mathbf{j}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{k}}', \dot{\mathbf{i}}' \right] =$$

т.к.

$$-\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{k}}, \mathbf{i}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{k}}' + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{i}}, \mathbf{j}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{j}}' = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{i}}, \mathbf{k}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{k}}' + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{i}}, \mathbf{j}' \end{pmatrix} \dot{\mathbf{j}}' = \dot{\mathbf{i}}'.$$

При выводе (2.7) использовалось равенство $\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{k}}, \mathbf{i}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{i}}, \mathbf{k}' \end{pmatrix}$, которое получается дифференцированием по времени условия перпендикулярности векторов $\dot{\mathbf{i}}'$ и $\dot{\mathbf{k}}'$: $\left(\dot{\mathbf{i}}', \dot{\mathbf{k}}' \right) = 0$.

Равенство (2.7) позволяет получить соотношение между производными по времени любого вектора $\dot{\mathbf{b}}$ в штрихованной и нештрихованной системах координат:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\mathbf{b}}}{dt} &= \frac{d}{dt} (b_x \dot{i}' + b_y \dot{j}' + b_z \dot{k}') = \left(b_x \dot{i}' + b_y \dot{j}' + b_z \dot{k}' \right) + \left(b_x \dot{i}' + b_y \dot{j}' + b_z \dot{k}' \right)' = \\ &= \left(\frac{db}{dt} \right)' + (b_x [\dot{W}, \dot{i}'] + b_y [\dot{W}, \dot{j}'] + b_z [\dot{W}, \dot{k}']) = \left(\frac{db}{dt} \right)' + [\dot{W}, b_x \dot{i}' + b_y \dot{j}' + b_z \dot{k}'] = \left(\frac{db}{dt} \right)' + [\dot{W}, \dot{\mathbf{b}}] \end{aligned}$$

Итак,
$$\frac{d\dot{\mathbf{b}}}{dt} = \left(\frac{db}{dt} \right)' + [\dot{W}, \dot{\mathbf{b}}]. \quad (2.8)$$

Таким образом, согласно (2.8), даже в том случае, когда вектор $\dot{\mathbf{b}}$ "вморожен" в твердое тело, связанное со штрихованной системой координат, его производная $d\dot{\mathbf{b}}/dt$ оказывается отличной от нуля из-за наличия вращения.

Используя соотношение (2.8), легко определить скорости и ускорения точек, связанных со штрихованной системой координат (точек т.т.), относительно нештрихованной. Из рисунка видно, что $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}'$. Дифференцируя это равенство с учетом $d\dot{\mathbf{r}}'/dt = 0$, получаем:

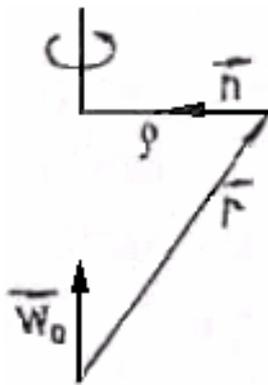
$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}') = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{V}}_0 + [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}], \text{ т.е.}$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}_0 + [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}] \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) с учетом (2.8), находим ускорение $\dot{\beta} = \frac{d\dot{W}}{dt}$:

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\dot{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{V}}_0 + [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}]) = \dot{\mathbf{V}}_0 + [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}'] + [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}'] = \dot{\mathbf{a}}_0 + [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}'] + [\dot{W}, [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}']]$$

Таким образом, **полное ускорение** точек т.т. складывается из трех составляющих: **мгновенного ускорения** $\dot{\mathbf{a}}_0 = \frac{d\dot{\mathbf{V}}_0}{dt}$; **вращательного ускорения**, обуслов-



ленного изменением угловой скорости и в общем случае вращения (не вокруг неподвижной оси) направленного не по касательной к траектории $\dot{\mathbf{a}}_b = [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}']$ и **осеостремительного ускорения** $\dot{\mathbf{a}}_w = [\dot{W}, [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}']]$, называемого так из-за того, что оно направленно перпендикулярно к мгновенной оси вращения (см. рис.). Можно показать, раскрывая двойное векторное произведение и вводя единичный вектор \dot{W}_0 в направлении вектора \dot{W} , что осеостремительное ускорение связано с угловой скоростью \dot{W} и радиусом кривизны ρ следующим соотношением

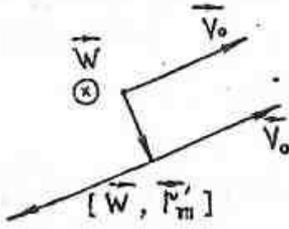
ем

$$\dot{\mathbf{a}}_w = [\dot{W}, [\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}']] = W^2 (\dot{W}_0, (\dot{W}_0, \dot{\mathbf{r}}') - \dot{\mathbf{r}}') = W^2 \rho \dot{\mathbf{n}}.$$

Итак, полное ускорение точек т.т.

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_0 + \dot{\mathbf{a}}_b + \dot{\mathbf{a}}_w.$$

Пример 2.2. В качестве примера рассмотрим случай **плоского** или **плоско-параллельного** движения, т.е. движения, при котором каждая точка т.т. движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости. Поскольку через данную точку можно провести лишь одну плоскость, параллельную заданной, то точки тела, принадлежащие рас-

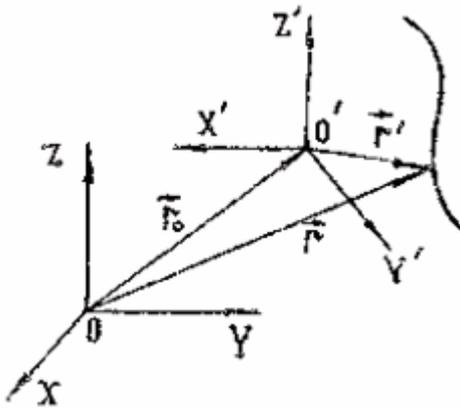


считываемой плоскости в момент $t=0$, останутся в этой плоскости и при $t > 0$. Следовательно, положение т.т. при плоско-параллельном движении определяется положением любого сечения тела плоскостью, параллельной неподвижной. Тем самым **плоско - параллельное движение сводится к плоскому**. Плоское движение, в свою очередь, можно свести к чистому вращению, т.е. в каждый момент найти точку (положение мгновенной оси вращения), где $\dot{V} = 0$ (см. рис.). Будем искать радиус-вектор

этой точки в виде $\mathbf{r}'_m = a[\dot{V}_0, \dot{W}]$, определяя a из условия равенства скорости нулю $\dot{V} = \dot{V}_0 + [\dot{W}, \mathbf{r}'_m] = 0$. Тогда $\dot{V}_0 + a[\dot{W}, [\dot{V}_0, \dot{W}]] = 0$ и раскроем двойное векторное произведение $\dot{V}_0 + a(\dot{V}_0 W^2 - \dot{W}(\dot{V}_0, \dot{W})) = 0$.

Поскольку в силу перпендикулярности векторов \dot{V}_0 и \dot{W} имеем $(\dot{V}_0, \dot{W}) = 0$, то $a = -1/W^2$, откуда $\mathbf{r}' = -[\dot{V}_0, \dot{W}]/W^2$ и $|\mathbf{r}'|V_0/W$. Примером плоско-параллельного движения является качение цилиндра по плоскости. В отсутствии проскальзывания мгновенная ось вращения проходит через точку касания цилиндра с плоскостью.

Третья задача кинематики – кинематика сложного движения. По известному движению м.т. относительно штрихованной системы отсчета $O' X' Y' Z'$ и известному движению этой системы относительно нештрихованной $O X Y Z$ определить движение м.т. относительно системы $O X Y Z$ (см. рис.).



Используя (2.8), получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}') = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}' = \dot{V}_0 + [\dot{W}, \mathbf{r}'] + \dot{V}'$$

$$\dot{V} = \dot{V}_0 + [\dot{W}, \mathbf{r}'] + \dot{V}'$$

Откуда следует **закон сложения скоростей Галилея:**

$$\dot{V} = \dot{V}_{con} + \dot{V}_{rel}, \tag{2.10}$$

где $\dot{V}_{con} = \dot{V}_0 + [\dot{W}, \mathbf{r}']$ – **переносная скорость** – скорость точки среды, связанной с системой координат $O' X' Y' Z'$, в которой в данный момент находится м.т.; $\dot{V}_{rel} = \dot{V}'$ – **относительная скорость** – скорость м.т. относительно штрихованной системы координат. Аналогично для ускорения \dot{a} находим:

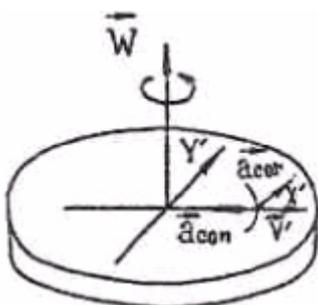
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \frac{d}{dt}(\dot{V}_0 + [\dot{W}, \mathbf{r}'] + \dot{V}') = \ddot{V}_0 + \left[\ddot{W}, \mathbf{r}' \right] + \left[\dot{W}, \dot{\mathbf{r}}' \right] + \ddot{V}' = \\ &= \ddot{a}_0 + [\dot{b}, \mathbf{r}'] + [\dot{W}, [\dot{W}, \mathbf{r}']] + \dot{V}' + \dot{a}' + [\dot{W}, \dot{V}'] = \quad , \text{ т.е.} \\ &= \ddot{a}_0 + [\dot{b}, \mathbf{r}'] + [\dot{W}, [\dot{W}, \mathbf{r}']] + \dot{a}' + 2[\dot{W}, \dot{V}'] \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \ddot{a}_0 + [\dot{b}, \mathbf{r}'] + [\dot{W}, [\dot{W}, \mathbf{r}']] + \dot{a}' + 2[\dot{W}, \dot{V}']$$

откуда следует закон сложения ускорений

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_{con} + \dot{\mathbf{a}}_{rel} + \dot{\mathbf{a}}_{cor}, \tag{2.11}$$

где $\dot{\mathbf{a}}_{con} = \ddot{a}_0 + [\dot{b}, \mathbf{r}'] + [\dot{W}, [\dot{W}, \mathbf{r}']]$ – **переносное ускорение**; $\dot{\mathbf{a}}_{rel} = \dot{a}'$ – **относительное ускорение**; $\dot{\mathbf{a}}_{cor} = 2[\dot{W}, \dot{V}']$ – **кориолисово ускорение**. Следует отметить, что, в отличие от закона сложения скоростей, ускорение сложного движения не равно сумме ускорений пе-

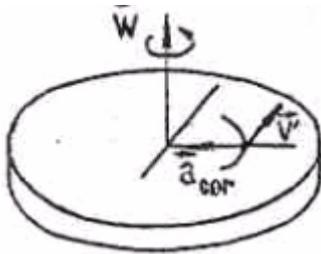


ренного и относительного движений, т.к. в тех случаях, когда $[\dot{W}, \dot{V}'] \neq 0$, дополнительно возникает кориолисово ускорение. Кориолисово ускорение действует на все м.т., движущиеся по вращающемуся телу. Оно возникает по двум физически различным причинам, которые мы рассмотрим на примере движения м.т. по диску, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси.

Пример 2.3. При относительном движении вдоль радиуса диска со скоростью \dot{V}' изменяется расстояние до оси вращения, что приводит к росту линейной скорости вращения и является следствием возникновения $\dot{a}_{\text{кор}}$. На самом деле, прямые вычисления показывают совпадение величины ускорения, обусловленного изменением линейной скорости вращения, с кориолисовым ускорением, равным в данном случае $a_{\text{кор}} = 2 \left| \dot{W} \right| \left| \dot{V}' \right|$. Пусть $x = r \cos(Wt)$ и $y = r \sin(Wt)$, тогда, например, при $t=0$ (случай $t=0$ наиболее простой для рассмотрения), имеем:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -rW^2, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = 2rW\dot{V}' = 2WV'.$$

Таким образом, a_y при $t=0$ соответствует кориолисовому ускорению.



Пример 2.4. Относительное движение совершается по одной из окружностей на диске с равномерной относительной скоростью V' . Т.к. $a_{\text{rel}} = a' = V'^2 / r$, то

$$a = (V' + Wr)^2 / r = V'^2 / r + W^2 r + 2WV' = a_{\text{rel}} + a_{\text{con}} + a_{\text{cor}}.$$

Следовательно, в этом случае кориолисово ускорение обеспечивает часть центростремительного ускорения в неподвижной системе координат.

ВОПРОСЫ

1. Что изучает механика?
2. Что изучают кинематика и динамика?
3. Дайте определения механического движения, системы отсчета, системы координат, материальной точки и абсолютно твердого тела.
4. Дайте определения скалярной и векторной величин и приведите примеры известных Вам векторов и скаляров в физике.
5. Что представляет собой декартова система координат и ее базисные вектора?
6. Какие способы описания движения материальной точки Вы знаете?
7. В чем заключается векторный способ описания движения материальной точки?
8. Дайте определения вектора скорости и ускорения материальной точки и запишите для них соответствующие математические выражения.
9. В чем заключается координатный способ описания движения материальной точки? Выпишите формулы для векторов скорости и ускорения при этом способе.
10. В чем заключается естественный способ описания движения материальной точки?
11. Дайте определение траектории движения материальной точки.
12. Дайте определение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
13. Запишите формулы для векторов угловой скорости и углового ускорения.
14. Какое движение называется плоско-параллельным?

III. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

3.1. Инерциальные системы отсчета

Первый закон Ньютона. Преобразование Галилея. Теперь займемся динамикой - частью механики, изучающей причины движения. В основе динамики лежат законы Ньютона. Открытие законов Ньютона было одним из наиболее ярких событий в истории физики. До Ньютона движение тел, например, небесных светил, представлялось загадкой, но после формулировки Ньютоном законов механики все нашло свое объяснение. Ньютон не только открыл законы, но и фактически построил свою простейшую модель пространства - времени. Эта модель, соответствующая классической механике, исходит из интуитивных представлений, основанных на результатах наблюдений движений материальных объектов с $V/C \ll 1$, и поэтому область ее применения весьма широка. Т.к. в модели Ньютона время – абсолютно и однородно, а пространство – изотропно и однородно, то в рамках кинематики все системы отсчета равноправны. Совершенно иначе обстоит дело в динамике, где обнаруживается преимущество одного класса систем отсчета по отношению ко всем остальным. Опыт показывает, что в различных системах отсчета динамические законы движения также различны и иногда весьма сложны. Поэтому, естественно, возникает задача поиска класса систем, в которых динамика простейшей модели материального объекта – м.т. – выглядит наиболее просто. Из опыта повседневной жизни более менее ясно, что ускорение м.т. связано как с действием других тел, так и со свойствами самих систем отсчета. Следовательно, причины движения будут выглядеть наиболее просто в тех системах отсчета, где ускорение возникает лишь в результате действия других тел. В таких системах, если на тело (м.т.) не действуют другие тела, то оно находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, т.е. не имеет ускорения. Однако возникает вопрос: "Существуют ли такие системы отсчета?" Ответ можно получить лишь только на основе наблюдений над механическими движениями в реальном мире. Оказывается, что предположение о существовании класса таких систем не приводит ни к каким противоречиям с опытом. Это предположение и представляет **первый закон динамики Ньютона: существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых, если на тело не действуют другие тела, то оно находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.** Ясно, что, если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то их бесконечно много. Любая система отсчета, движущаяся равномерно без вращения относительно инерциальной с некоторой произвольной скоростью \dot{V} , также будет инерциальной, поскольку в ней, согласно соотношению (2.11), ускорение отсутствует: $\dot{a}' = \dot{a} = 0$.

Инерциальные системы обладают рядом замечательных свойств (однородность времени, однородность и изотропность пространства по отношению к законам динамики), в частности, для них выполняется **принцип относительности Галилея: все инерциальные системы по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу, т.е. никакими механическими опытами нельзя установить покоится или движется инерциальная система отсчета, если опыты проводятся внутри нее** (внутри – значит без взаимодействия с внешними по отношению к системе отсчета телами). Следовательно, вид законов механики не должен меняться при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (иначе по различию законов можно было бы отличить одну систему отсчета от другой, а это как раз и противоречит принципу Галилея). Преобразования, описывающие связи между координатами и временами двух инерциальных систем отсчета $O X Y Z$ и $O' X' Y' Z'$ в классической механике, называются **преобразованиями Галилея** и имеют вид (\dot{V}_0 - постоянная скорость движения системы отсчета $O' X' Y' Z'$ относительно системы $O X Y Z$):

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \dot{V}_0 t \\ t' = t \end{cases} \quad (3.1)$$

Отсюда следует закон сложения скоростей Галилея:

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}' + \dot{\mathbf{V}}_0. \quad (3.2)$$

В частном случае, когда оси систем координат параллельны, а направление вектора относительной скорости $\dot{\mathbf{V}}_0$ совпадает с направлением оси X, преобразования Галилея имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - V_{0x} t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad \text{откуда} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_x' + V_{0x} \\ a_x = a_x \end{array} \right. \quad (3.3)$$

В случае сохранения вида уравнений при каких-либо преобразованиях говорят об инвариантности этих уравнений к рассматриваемым преобразованиям. Поэтому принцип Галилея можно сформулировать как требование инвариантности уравнений механики к преобразованиям Галилея.

3.2. Второй и третий законы Ньютона

По определению инерциальной системы отсчета ускорение материальных точек в ней может быть вызвано лишь действием со стороны других материальных объектов. Из опыта следует, что, если тело А сообщает ускорение телу В, то и тело В сообщает ускорение телу А, т.е. **действие тел имеет характер взаимодействия**. Для характеристики этого взаимодействия вводят фундаментальную физическую величину - силу. **Сила – есть мера взаимодействия тел**. Поскольку сила является причиной ускорения, а ускорение – вектор, то постулируют, что и сила – вектор $\dot{\mathbf{F}}$, причем ее направление совпадает с направлением ускорения, т.е. $\dot{\mathbf{F}} \parallel \dot{\mathbf{a}}$.

Опыт показывает, что величина силы, действующей на тело, пропорциональна ускорению $F \sim a$. Более того, оказывается, что отношение $|\dot{\mathbf{F}}|/|\dot{\mathbf{a}}|$ для данного тела не зависит от направления действия и величины силы. Следовательно, скалярная величина $|\dot{\mathbf{F}}|/|\dot{\mathbf{a}}|$ характеризует некоторое свойство самого тела. Эту величину называют массой. **Масса - мера инертности тела, т.е. мера способности тела сопротивляться изменению его скорости**. Экспериментально установлены следующие свойства массы: **аддитивность** – масса составного тела равна сумме масс его частей; **независимость от параметров движения** (координат, скорости и ускорения). Таким образом, из всех изложенных фактов следует **второй закон Ньютона: в инерциальных системах отсчета ускорение м.т. прямо пропорционально действующей на нее силе и обратно пропорционально массе m**

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{F}} / m. \quad (3.4)$$

Закон Ньютона можно записать и в других эквивалентных (3.4) видах

$$m \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{F}}, \quad m \frac{d\dot{\mathbf{V}}}{dt} = \dot{\mathbf{F}}, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{V}}) = \dot{\mathbf{F}} \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{p}}) = \dot{\mathbf{F}}, \quad d\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{F}} dt, \quad \Delta\dot{\mathbf{p}} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{F}} dt, \quad (3.5)$$

где по определению $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{V}}$ – **импульс м.т.**

Самое лучшее (строгое) определение силы – это утверждение, что сила есть физическая величина равная произведению массы на ускорение $\dot{\mathbf{F}} = m\dot{\mathbf{a}}$. Именно на основе такого определения силу часто измеряют при проведении экспериментов. Однако, если принять такое определение, то получается кажущийся парадокс: второй закон Ньютона превращается просто в определение силы и тогда нечего удивляться, что выполняется равенство $\dot{\mathbf{F}} = m\dot{\mathbf{a}}$, т.к. это по определению. В чем же смысл второго закона Ньютона? Он состоит в том, что величина, определенная как произведение массы на ускорение, обладает рядом замечательных свойств: она характеризует взаимодействие тел (отлична от нуля лишь при их наличии), за-

висит, как правило, только от расстояния между взаимодействующими телами {не зависит от скорости, ускорения и других кинематических характеристик} и, наконец, для нее справедлив **третий закон Ньютона** (конечно, Ньютон понимал, что без формулировки свойств сил его второй закон будет выглядеть логически незавершенным): **силы взаимодействия двух м.т. действуют по одной прямой, противоположно направлены и равны по величине:**

$$\dot{\mathbf{F}}_{12} = -\dot{\mathbf{F}}_{21}. \quad (3.6)$$

Запись третьего закона Ньютона в эквивалентном (3.6) виде: $\dot{\mathbf{F}}_{12} + \dot{\mathbf{F}}_{21} = 0$ менее предпочтительна, т.к. возникает впечатление об уравниваемости сил взаимодействия, а это не так, поскольку эти силы приложены к различным телам.

В соответствии с принципом Галилея для двух инерциальных систем отсчета (штрихованной и нештрихованной) должны одновременно выполняться законы Ньютона $\dot{\mathbf{F}} = m \dot{\mathbf{a}}$ и $\dot{\mathbf{F}}' = m' \dot{\mathbf{a}}'$. Но $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}'$ и из независимости массы от скорости следует, что $m = m'$. Поэтому из принципа Галилея следует **инвариантность сил относительно инерциальных систем отсчета** $\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}'$.

3.3. Реактивное движение. Формула Мещерского

Рассмотрим теперь движение тела (м.т.) с переменной массой. Пусть на тело действует сила $\dot{\mathbf{F}}$ и в единицу времени к телу прибавляется масса $\frac{dm}{dt}$ со скоростью $\dot{\mathbf{u}}$ относительно тела. Тогда, если текущая скорость тела $\dot{\mathbf{V}}$, то согласно второму закону Ньютона (3.5), в системе отсчета, движущейся равномерно со скоростью $\dot{\mathbf{V}}$ имеем:

$$m d\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{u}} dm + \dot{\mathbf{F}} dt,$$

откуда получаем уравнение Мещерского:

$$m \frac{d\dot{\mathbf{V}}}{dt} = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{u}} \frac{dm}{dt}, \quad (3.7)$$

в которое, в отличие от второго закона Ньютона для тела с постоянной массой, входит **реактивная сила** $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{u}} \frac{dm}{dt}$, возникающая в результате передачи телу дополнительного импульса от добавляемой массы.

Пример 3.1. В качестве примера рассчитаем максимальную скорость ракеты без учета сопротивления движению со стороны внешней среды ($\dot{\mathbf{F}} = 0$) и в предположении, что скорость истечения газов относительно ракеты есть постоянный вектор $\dot{\mathbf{u}}$. Уравнение Мещерского в этом случае принимает вид:

$$m \frac{d\dot{\mathbf{V}}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} \frac{dm}{dt} \quad \text{или} \quad d\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{u}} \frac{dm}{m}.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом равенства нулю начальной скорости, получаем (m_0, m_k - начальная и конечная массы ракеты)

$$\dot{\mathbf{V}}_{\max} = -\dot{\mathbf{u}} \ln \left(\frac{m_0}{m_k} \right).$$

Минус возникает из-за противоположности направления векторов $\dot{\mathbf{V}}_{\max}$, и $\dot{\mathbf{u}}$. При $m_k \rightarrow 0$ отсюда находим, что $\dot{\mathbf{V}}_{\max}$ стремится к бесконечности, т.е. максимальная скорость с учетом переменности массы в процессе движения оказывается неограниченной. Интересно сопоставить этот результат с результатом, полученным в предположении, что масса ($m_0 - m_k$) отделилась сразу. При одновременном отделении $\dot{\mathbf{V}} = -(1 - m_0/m_r) \dot{\mathbf{u}}$ (это соотношение следует из закона сохранения импульса, который будет рассмотрен в следующей главе), следовательно, скорость уже ограничена и не может быть больше $\dot{\mathbf{u}}$.

3.4. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета

Соотношения (3.5) справедливы для тел постоянной массы в инерциальных системах отсчета, когда на движение м.т. не наложено никаких ограничений. В тех случаях, если одно из этих условий не выполняется, уравнение движения также может быть представлено в виде уравнения Ньютона, но при этом приходится вводить некоторые дополнительные силы. Например, при рассмотрении тела с переменной массой в п.3.3 была введена реактивная сила, которая характеризовала взаимодействие разделяющихся частей тела. Для м.т. с наложенными ограничениями на движение возникают **силы реакции**, определяющие взаимодействие рассматриваемого тела с телами, ограничивающими это движение. В отличие от реактивных сил и сил реакции, дополнительные силы (**силы инерции**) в неинерциальных системах отсчета не являются мерой взаимодействия тел и их появление обусловлено общими свойствами пространства - времени. Выведем соотношения для расчета сил инерции. Пусть $O X Y Z$ – инерциальная система отсчета, в которой справедлив закон Ньютона $m \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{F}}$, а система отсчета $O' X' Y' Z'$ движется относительно нее с ускорением $\dot{\mathbf{a}}_0$, вращается с угловой скоростью $\dot{\mathbf{W}}$ и угловым ускорением $\dot{\mathbf{b}}$. Очевидно, что $O' X' Y' Z'$ – неинерциальная система отсчета и, как было показано в разделе II, ускорение м.т. в ней имеет три составляющих

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_{con} + \dot{\mathbf{a}}_{rel} + \dot{\mathbf{a}}_{cor}$$

или

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}' + \dot{\mathbf{a}}_0 + [\dot{\mathbf{b}}, \dot{\mathbf{r}}'] + [\dot{\mathbf{W}}, [\dot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{r}}']] + 2[\dot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{V}}'] \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) во второй закон Ньютона для инерциальной системы отсчета $O X Y Z$, находим вид уравнения движения м.т. в неинерциальной системе $O' X' Y' Z'$

$$m(\dot{\mathbf{a}}' + \dot{\mathbf{a}}_0 + [\dot{\mathbf{b}}, \dot{\mathbf{r}}'] + [\dot{\mathbf{W}}, [\dot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{r}}']] + 2[\dot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{V}}']) = \dot{\mathbf{F}}$$

откуда

$$m\dot{\mathbf{a}}' = \dot{\mathbf{F}} - m\dot{\mathbf{a}}_0 - m[\dot{\mathbf{b}}, \dot{\mathbf{r}}'] - m[\dot{\mathbf{W}}, [\dot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{r}}']] - 2m[\dot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{V}}']$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению движения:

$$m\dot{\mathbf{a}}' = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}_0 + \dot{\mathbf{F}}_b + \dot{\mathbf{F}}_w + \dot{\mathbf{F}}_{cor}, \quad (3.9)$$

где $\dot{\mathbf{F}}_0 = -m\dot{\mathbf{a}}_0$ – сила инерции, обусловленная ускорением поступательного движения; $\dot{\mathbf{F}}_b = m[\dot{\mathbf{r}}', \dot{\mathbf{b}}]$ – сила инерции, вызванная изменением угловой скорости вращения; $\dot{\mathbf{F}}_w = -m[\dot{\mathbf{W}}, [\dot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{r}}']] = m W^2 \dot{\mathbf{r}}$ – центробежная сила (вернее "осебежная", т.к. направлена от оси, а не от центра); $\dot{\mathbf{F}}_{cor} = 2m[\dot{\mathbf{V}}', \dot{\mathbf{W}}]$ – кориолисова сила. Итак, в общем случае в неинерциальных системах отсчета справедлив закон Ньютона (3.9), в котором введены дополнительно четыре силы инерции. Эти силы обладают следующими отличительными свойствами: пропорциональны массе м.т.; зависят от характеристик движения $(\dot{\mathbf{a}}_0, \dot{\mathbf{W}}, \dot{\mathbf{b}})$ системы отсчета $O' X' Y' Z'$ относительно произвольной инерциальной системы $O X Y Z$ и, наконец, для них не справедлив третий закон Ньютона, т.к. они не порождаются взаимодействием тел.

Пример 3.2. В северном полушарии правые берега рек – обрывистые, что обусловлено силой Кориолиса, возникающей из-за вращения Земли. Оценим величину этой силы на полюсе (здесь она максимальна, т.к. $\dot{\mathbf{V}} \perp \dot{\mathbf{W}}$), если река течет со скоростью $V = 3,6 \text{ км/час} = 1 \text{ м/с}$ вдоль меридиана, а угловая скорость вращения Земли определяется из условия, что за 24 часа угол поворота составляет 2π радиан $W = 2\pi / 24 / 3600 = 0,7292 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Массу воды примем равной одной тонне, тогда:

$$|\dot{\mathbf{F}}_{cor}| = 2m V W = 2 \times 1 \text{ м/с} \times 0,7292 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1} \times 10^3 \text{ кг} \cong 0,15 \text{ Н} \cong 15 \text{ г}.$$

Хотя на каждую тонну воды действует незначительная сила в 15 граммов, однако ее оказывается достаточно, чтобы реки подмывали правые берега в северном полушарии.

Таким образом, любую задачу механики можно решать в инерциальной или в неинерциальной системах отсчета. Выбор системы диктуется постановкой вопроса и стремлением получить ответ более простым путем. Часто оказывается, что наиболее удобно это делать именно в неинерциальных системах отсчета.

ВОПРОСЫ

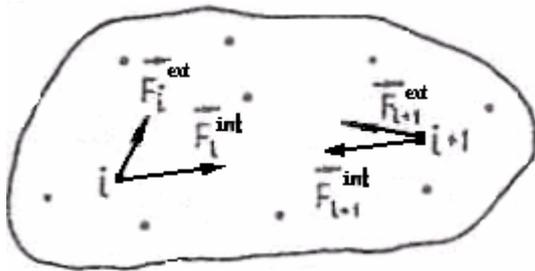
1. Что изучает динамика материальной точки?
2. Какие законы лежат в основе динамики?
3. Опишите ньютоновскую модель пространства - времени.
4. Что такое инерциальные системы отсчета (первый закон Ньютона)?
5. Какими свойствами обладают инерциальные системы отсчета?
6. Сформулируйте принципы относительности Галилея.
7. Что такое масса тела?
8. Ее основные свойства. Что такое сила?
9. Сформулируйте второй закон Ньютона.
10. Сформулируйте третий закон Ньютона.
11. Выпишите уравнение Мещерского. Совпадает ли оно со вторым законом Ньютона?
12. Введение каких сил инерции позволяет использовать второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета?
13. Сформулируйте второй закон Ньютона в системе отсчета $O' X' Y' Z'$, движущейся поступательно с ускорением $\overset{\cdot}{a}_0$ относительно инерциальной системы $O X Y Z$.
14. Найдите силы инерции, действующие на м.т. массой m , которая движется с постоянной скоростью $\overset{\cdot}{V}$ в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\overset{\cdot}{W}$ относительно инерциальной системы отсчета.
15. Почему в северном полушарии правые берега рек обрывистые?

IV. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. СТОЛКНОВЕНИЕ ЧАСТИЦ

В предыдущей главе мы сформулировали основные законы динамики материальной точки. Очевидно, что решение уравнения Ньютона при заданных значениях действующих на тело сил полностью определяет положение тела в пространстве в любой момент времени. Однако в механике существуют и другие понятия, такие как энергия, импульс, момент импульса, и законы сохранения для них, которые позволяют полнее раскрыть закономерности механического движения.

Обратимся теперь к формулировке основных законов сохранения (З.С.) в механике. Почему они так важны? Во-первых, потому что не зависят от траекторий частиц и особенностей действующих сил, что позволяет делать с помощью З.С. общие выводы, не вникая в детальное рассмотрение задачи. Если какой-то процесс противоречит З.С, то этот процесс невозможен и не надо тратить силы на его изучение. Во-вторых, З.С. можно применять и тогда, когда законы действия сил неизвестны. В этом случае З.С. - единственный инструмент для исследований. Так обстоит дело в физике элементарных частиц. В-третьих, даже когда силы известны, З.С. позволяют, как правило, получить решение более изящным путем, чем непосредственное применение второго закона Ньютона. Поэтому, решая задачу, сначала пытаются применить З.С. и, если этого оказывается недостаточно, то используют второй закон Ньютона.

4.1. Закон сохранения импульса системы материальных точек. Задача двух тел



Рассмотрим систему из N материальных точек ($i=1, \dots, N$). Обозначим через F_i^{int} внутренние силы (силы, действующие между точками выделенной системы), а через F_i^{ext} – силы, действующие на 1-ю точку со стороны других внешних объектов. Для каждой из них запишем закон Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (4.1)$$

Суммируя (4.1) по всем частицам системы, получаем

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}}. \quad (4.2)$$

Откуда, обозначая суммарный импульс системы через $\mathbf{P}_\Sigma = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$ и используя линейность операции дифференцирования, имеем

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{P}_\Sigma) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}}.$$

Из третьего закона Ньютона следует равенство нулю суммы внутренних сил, действующих на м.т., т.к. они для каждой пары частиц равны по величине и противоположно направлены $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{int}} = 0$. Тогда, вводя обозначение для суммарной внешней силы $\mathbf{F}_\Sigma^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$, из (4.2) находим соотношение, описывающее закон изменения суммарного импульса системы материальных точек

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_\Sigma) = \mathbf{F}_\Sigma^{\text{ext}} \quad (4.3)$$

Теорема об изменении импульса системы м.т.: в инерциальной системе отсчета скорость изменения суммарного импульса материальных точек равна суммарной внешней силе.

Система м. т. называется замкнутой, если на нее не действуют внешние силы $\dot{F}_{\Sigma}^{ext} = 0$. Поскольку при этом условии из (4.3) следует $\frac{d}{dt}(\dot{P}_{\Sigma}) = \dot{F}_{\Sigma}^{ext} = 0$, то получаем **закон сохранения импульса (ЗСИ) системы м.т.: в замкнутой системе материальных точек суммарный импульс сохраняется**. Кроме того, ЗСИ выполняется в некоторых случаях, когда система м.т. не замкнута:

- внешние силы действуют, но их сумма равна нулю $\dot{F}_{\Sigma}^{ext} = 0$;
- сумма внешних сил равна нулю в некотором направлении $X - \dot{F}_{\Sigma x}^{ext} = 0$, тогда сохраняется проекция суммарного импульса только на это направление $P_{\Sigma x} = const$; взаимодействие осуществляется в течении малых промежутков времени (например, при взрыве) и вследствие этого внутренние силы много больше внешних (в этом случае ЗСИ справедлив лишь приближенно; можно показать, что условием его выполнения является условие малости импульса внешних сил за время взаимодействия τ по сравнению с изменением импульса каждой м.т. $\Delta \dot{P} : \dot{F}_{\Sigma}^{ext} t \ll \Delta \dot{P}$).

Теорема об изменении суммарного импульса позволяет сформулировать закон движения некоторой выделенной точки системы, называемой центром масс. **Под центром масс (ц.м.) системы м.т. понимают точку, радиус-вектор которой в любой момент времени определяется по формуле** (M - масса системы)

$$\frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (4.4)$$

Из (4.4) получаем соотношения для скорости \dot{V}_c и ускорения \dot{a}_c центра масс

$$\dot{V}_c = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{V}_i}{M} \quad (4.5)$$

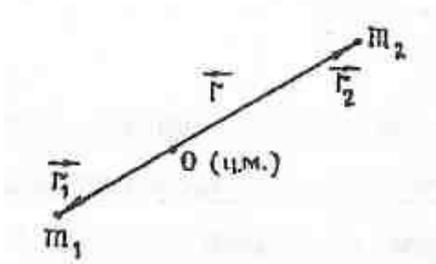
$$\dot{a}_c = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{V}_i}{M} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{P}_{\Sigma}}{M} \right) = \frac{\dot{F}_{\Sigma}^{ent}}{M}$$

откуда

$$M \dot{a}_c = \dot{F}_{\Sigma}^{ent} \quad (4.6)$$

Соотношение (4.6) представляет собой математическую формулировку **теоремы о движении ц.м.:** центр масс системы м.т движется подобно материальной точке с массой, равной массе системы, под действием силы, равной суммарной внешней силе, действующей на систему.

Из этой теоремы получаем следствие: **центр масс замкнутой системы находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.**



Следствие из теоремы о движении ц.м. используется при решении задачи двух тел. Следует отметить, что решение уравнений динамики для систем, состоящих из большого числа материальных точек, встречает непреодолимые математические трудности. Точное решение не удастся найти уже в случае трех м.т. Однако задача двух тел (двух м.т.) имеет простое и исчерпывающее решение, которое широко используется в небесной механике и статистической физике.

Рассмотрим замкнутую систему двух м.т., взаимодействующих между собой и имеющих массы m_1 и m_2 . Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс. Поскольку ц.м. движется равномерно и прямолинейно (или покоится), то рассматриваемая система отсчета будет инерциальной. Пусть \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , - радиусы-векторы м.т. с началом в центре масс, а \mathbf{r} – вектор, проведенный от м.т. с массой m_1 к м.т. с массой m_2 . Из определения радиуса-вектора центра масс имеем:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0. \quad (4.7)$$

Учитывая, что $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}$, из (4.7) получаем

$$\mathbf{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (4.8)$$

Запишем второй закон Ньютона для обеих точек в системе их центра масс (он выполняется, т.к. эта система отсчета – инерциальная):

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}),$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r})$$

и подставим в эти уравнения найденные выше выражения (4.8) для \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Тогда получим

$$-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}), \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}). \quad (4.9)$$

Согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, и уравнения (4.9) для каждой из м.т. тождественны друг другу. Таким образом, в системе ц.м. задача о движении системы из двух м.т. сводится к задаче о движении одной м.т. под действием центральной силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ с приведенной массой μ :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.10)$$

Однако следует помнить, что м.т. с массой μ и радиус - вектором \mathbf{r} является вспомогательной и, проинтегрировав уравнение (4.10), необходимо с помощью (4.8) определить основные характеристики движения двух материальных точек $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$.

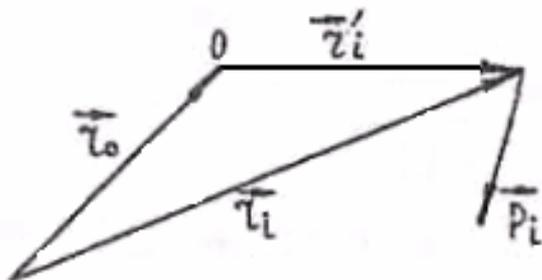
4.2. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим теперь закон сохранения момента импульса (ЗСМИ), который во многом аналогичен ЗСИ. **Моментом импульса материальной точки называется векторное произведение ее радиус-вектора \mathbf{r} на импульс \mathbf{p}**

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}].$$

Момент импульса системы м.т. будем определять в инерциальной системе отсчета относительно некоторого подвижного полюса O , положение которого описывается радиус-вектором \mathbf{r}_0 . Тогда радиус-вектор i -ой точки относительно этого полюса есть $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$ (см. рис.), а ее момент импульса вычисляется по формуле

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}_i] \quad (4.11)$$



мент импульса вычисляется по формуле

Дифференцируя (4.11) по времени и суммируя по всем частицам системы, получаем (V_0 - скорость полюса, V_c - скорость ц.м.):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left[\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{p}_i \right] + \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{p}}_i \right] = \sum_{i=1}^N \left[\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{p}_i \right] + \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\dot{V}_i - V_0, \mathbf{p}_i \right] + \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right] = \dot{M}_\Sigma^{\text{ext}} - \left[V_0, \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right] = \dot{M}_\Sigma^{\text{ext}} + M \left[\dot{V}_c, V_0 \right], \end{aligned}$$

откуда следует теорема об изменении момента импульса

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_\Sigma = \dot{M}_\Sigma^{\text{ext}} + M \left[\dot{V}_c, V_0 \right] \quad (4.12)$$

При выводе (4.12) использовалось равенство нулю суммарных моментов для внутренних сил, следующее из третьего закона Ньютона, и второй закон Ньютона в форме $\frac{d}{dt} \mathbf{p}_i = \left[\mathbf{F}_i^{\text{int}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \right]$. Если полюс O – неподвижен или совпадает с центром масс (либо выполняется какое-то другое условие, при котором $\left[\dot{V}_c, V_0 \right] = 0$), то соотношение (4.12) сводится к равенству производной по времени вектора суммарного момента импульса м.т. векторной сумме моментов всех приложенных к ней сил

$$\frac{d\mathbf{L}_\Sigma}{dt} = \dot{M}_\Sigma^{\text{ext}}. \quad (4.13)$$

В замкнутой системе м.т., когда нет внешних сил и, следовательно, $\dot{M}_\Sigma^{\text{ext}} = 0$, из (4.13) получаем закон сохранения момента импульса: в замкнутой системе м.т. суммарный момент импульса относительно неподвижного полюса или относительно ц.м. (либо относительно любого другого полюса, для которого $\left[\dot{V}_c, V_0 \right] = 0$) сохраняется:

$$\mathbf{L}_\Sigma = \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i \right] = \text{const}. \quad (4.14)$$

Кроме замкнутых систем ЗСМИ имеет место и в тех случаях, когда $\dot{M}_\Sigma^{\text{ext}} = 0$ хотя бы относительно одного полюса, тогда и $\dot{\mathbf{L}}_\Sigma = \text{const}$ относительно этого же полюса. Так, например, обстоит дело при движении системы м.т в центральном поле, где $\dot{\mathbf{L}}_\Sigma = \text{const}$ относительно центра действующей на точку силы. По поводу области применимости ЗСМИ можно повторить то, что говорилось относительно ЗСИ.

4.3 Закон сохранения энергии

Введем понятие работы силы $\dot{\mathbf{F}}$. **Элементарной работой δA на перемещении $d\mathbf{r}$ называется скалярное произведение силы на перемещение** (φ – угол между направлениями векторов силы и перемещения)

$$dA = (\dot{\mathbf{F}}, d\mathbf{r}) = F dr \cos(j).$$

На конечном перемещении работа A вычисляется с помощью интеграла вдоль траектории м.т. (S – число малых участков, на которые разбивается эта траектория)

$$A = \sum_{i=1}^S dA_i = \sum_{i=1}^S F_i dr_i \cos(j_i) = \int_1^2 (\dot{\mathbf{F}}, d\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

Пример 4.1. Рассмотрим примеры расчета работы различных сил.

а) работа упругой силы ($\dot{\mathbf{F}} = -k \mathbf{r}$) (k - коэффициент пропорциональности)

$$A = \int_1^2 (\dot{\mathbf{F}}, d\mathbf{r}) = -\int_1^2 (k \mathbf{r}, d\mathbf{r}) = -k \int_1^2 \frac{d(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{2} = -\frac{kr^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}.$$

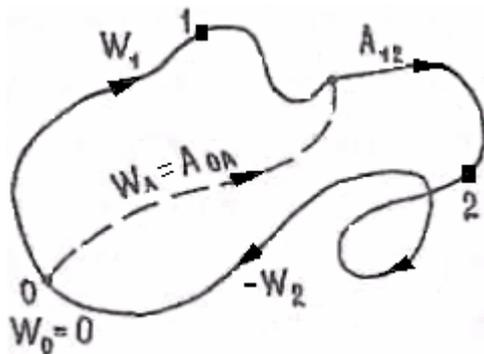
б) работа кулоновской (или гравитационной) силы. Для кулоновских и гравитационных сил справедливо одно и то же уравнение $\mathbf{F} = -\frac{a}{r^3} \mathbf{r}$. Отличаются только значения коэффициентов α : для сил гравитации $\alpha = \gamma Mm$ (m, M - массы притягивающихся тел); для кулоновских сил $\alpha = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}$ (q, Q - величины взаимодействующих зарядов). Тогда

$$A = \int_1^2 (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = -\int_1^2 \frac{(\alpha \mathbf{r}, d\mathbf{r})}{r^3} = -\alpha \int_1^2 \frac{d(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{2r^3} = -\alpha \int_1^2 \frac{d(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{2r^3} - \frac{kr^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$$

в) работа силы тяжести у земной поверхности $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$, $\mathbf{g} = \text{const}$.

$$A = m \int_1^2 (\mathbf{g}, d\mathbf{r}) = -mg \int_1^2 dz = mg(z_1 - z_2).$$

Рассмотренные в примере 4.1. силы интересны в том отношении, что их работа не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным состоянием системы (положением тел). Такие силы называются **потенциальными**. **Стационарное силовое поле, в котором работа силы, создаваемой этим полем, не зависит от формы траектории, а определяется начальным и конечным состоянием системы, называется потенциальным, а сама система, в которой действуют только потенциальные силы – консервативной.**



Если работа не зависит от формы траектории, то можно построить функцию W , называемую **потенциальной энергией**, так, что ее изменение будет определять работу. Построение проводится следующим образом (см. рис.). Выбирается какая-либо, точка пространства O и в ней полагается $W_0 = 0$. В любой другой точке A потенциальная энергия W_A принимается равной работе, которую надо совершить против сил поля при перемещении от т. O в т. A , т.е. $W_A = A_{0A}$. При этом функция

W строится описанным образом однозначно именно потому, что сила потенциальна, иначе бы работы по пути 1 и 2 (см. рис.) оказались неравными, а значение W_A — неопределенным. Знание W позволяет без интегрирования вдоль траектории определить работу при перемещении от точки 1 к точке 2. В самом деле, поскольку работа определяется только положением, то по замкнутой траектории работа равна нулю, и для контура 0-1-A-2-0 получаем

$$W_1 + A'_{12} - W_2 = 0, \text{ откуда } A'_{12} = -(W_1 - W_2) = \Delta W.$$

Поскольку A'_{12} – это работа против сил поля, то работа самого поля A_{12} , очевидно, отличается только знаком $A_{12} = -A'_{12}$, и, следовательно,

$$A_{12} = -\Delta W \quad \text{или} \quad dA = -dW. \quad (4.16)$$

Итак, потенциальная энергия это функция, убыль которой есть работа поля.

Пример 4.2. Из ранее рассмотренных примеров вычисления работы в соответствии с соотношением (4.16) имеем следующие формулы для вычисления потенциальной энергии.

а) упругая потенциальная энергия) в частности, энергия пружины растянутой на r)

$$W = \frac{k r^2}{2};$$

б) кулоновская и гравитационная энергии $W = -\frac{a}{r}$, откуда

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} \quad u \quad W = -g \frac{Mm}{r}$$

в) потенциальная энергия тела в поле тяжести Земли

$$W = m g z.$$

Между потенциальной энергией и вектором силы есть дифференциальная связь. Для вывода этой связи заметим, что при малом перемещении $d\mathbf{r}$ соотношение (4.16) дает $dW = -(\mathbf{F}, d\mathbf{r})$, т.е. $F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dW$. Вводя вектор градиента функции W по формуле $\text{grad}(W) = \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k}$ и учитывая соотношение, определяющее дифференциал функции $d = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = (\text{grad}(W), d\mathbf{r})$, из равенства $dW = -(\mathbf{F}, d\mathbf{r})$ получаем:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z}.$$

$$\mathbf{F} = -\text{grad}(W). \quad (4.17)$$

Будем называть **кинетической энергией м.т. величину T , т.ч.**

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{m(\dot{V}, \dot{V})}{2}.$$

Для малого изменения суммарной кинетической энергии системы м.т. получаем

$$dT_{\Sigma} = d \sum_{i=1}^s T_i = d \sum_{i=1}^s \frac{m_i(\dot{V}_i, \dot{V}_i)}{2} = \sum_{i=1}^s m_i (\dot{V}_i, d\dot{V}_i) = \sum_{i=1}^s m_i \left(\dot{V}_i dt, m_i \frac{d\dot{V}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^s (d\dot{r}_i, \mathbf{F}_i) = dA.$$

Следовательно, справедлива **теорема об изменении кинетической энергии: дифференциал суммарной кинетической энергии системы м.т. равен элементарной работе всех (внутренних и внешних) сил, приложенных к ее материальным точкам**

$$dT_{\Sigma} = dA. \quad (4.18)$$

Здесь важно, что в δA входит работа всех сил, как внутренних, так и внешних, поскольку, хотя по третьему закону Ньютона внутренние силы и равны попарно, но работа от них в сумме в ноль в общем случае не обращается, т.к. соответствующие перемещения могут быть не равны между собой (одним из примеров исключения из общего правила служит совокупность точек, составляющих твердое тело, в котором работа внутренних сил отсутствует).

Пусть система консервативна, т.е. поля сил стационарны и потенциальны. Тогда для нее справедлив закон сохранения полной механической энергии (полной энергией называется сумма кинетической и потенциальной)

$$T_{\Sigma} + W = const. \quad (4.19)$$

Действительно из (4.16) и (4.18) следует:

$$dT_{\Sigma} = \delta A + -dW,$$

откуда

$$d(T_{\Sigma} + W) = 0,$$

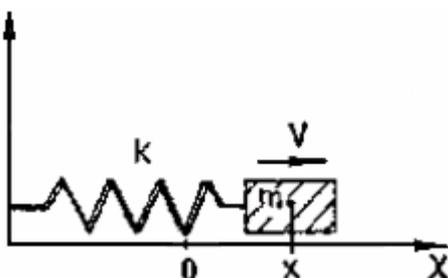
т.е. выполняется соотношение (4.19).

Закон сохранения полной механической энергии (З.С.Э.): при движении консервативной системы м.т. полная механическая энергия сохраняется.

Пример 4.3. Рассмотрим З.С.Э. для конкретных систем

а) Грузик на плоскости, скрепленный с пружиной. Ки-

нетическая энергия грузика $T = \frac{mV^2}{2}$ потенциальная

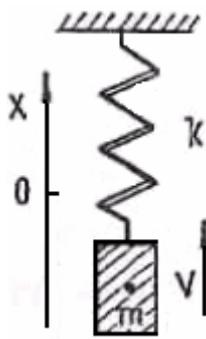


энергия пружины $W = \frac{kx^2}{2}$.

(x - координата груза отсчитываемая от его положения, при котором пружина не растянута, см. рис.) Полная энергия согласно ЗСЭ должна сохраняться:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const.$$

б) Грузик, подвешенный на пружине. Кинетическая энергия груза $T = \frac{mV^2}{2}$, потенци-



альная энергия системы складывается из энергии пружины и потенциальной энергии груза $W = \frac{kx^2}{2} + mgx$, где координата x и потенциальная энергия груза отсчитываются от положения, в котором пружина не растянута (см. рис.). Полная энергия согласно ЗСЭ должна сохраняться

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + mgx = const.$$

в) Две массы m и M , взаимодействующие по закону всемирного тяготения и находящиеся на расстоянии r друг от друга. Потенциальная энергия притягивающихся масс определяется выражением (см. пример 4.2б) $W = -\gamma \frac{Mm}{r}$ и ЗСЭ имеет в этом случае вид

$$\frac{mV_1^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = const.$$

где V_1, V_2 - соответствующие скорости движения масс.

4.4. Столкновение частиц

Рассмотрим применение основных законов сохранения механики для различных типов столкновений частиц. Столкновение частиц наиболее удобно рассматривать в системе их центра масс (С.Ц.М.). Поэтому сначала получим для С.Ц.М. некоторые формулы. Знак - над величиной в дальнейшем означает, что величина рассматривается в системе центра масс. Пусть две частицы с массами m_1, m_2 имеют в некоторой лабораторной системе координат скорости \dot{V}_1, \dot{V}_2 . Тогда согласно (4.5) скорость их ц.м. $\dot{V}_c = (m_1 \dot{V}_1 + m_2 \dot{V}_2) / (m_1 + m_2)$. Рассчитаем импульсы частиц $\overset{\mathbf{r}}{p}_1$, и $\overset{\mathbf{r}}{p}_2$, в С.Ц.М.

$$\begin{aligned} \overset{\mathbf{r}}{p}_1 &= m_1 \overset{\mathbf{r}}{V}_1 = m_1 (\overset{\mathbf{r}}{V}_1 - \overset{\mathbf{r}}{V}_c) = m_1 \overset{\mathbf{r}}{V}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (m_1 \overset{\mathbf{r}}{V}_1 + m_2 \overset{\mathbf{r}}{V}_2) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\overset{\mathbf{r}}{V}_1 - \overset{\mathbf{r}}{V}_2) = m (\overset{\mathbf{r}}{V}_1 - \overset{\mathbf{r}}{V}_2) \end{aligned}$$

Итак,

$$\overset{\mathbf{r}}{p}_1 = m (\overset{\mathbf{r}}{V}_1 - \overset{\mathbf{r}}{V}_2) \quad (4.20)$$

Аналогично получаем для второй частицы

$$\overset{\mathbf{r}}{p}_2 = m (\overset{\mathbf{r}}{V}_2 - \overset{\mathbf{r}}{V}_1), \quad (4.21)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса системы.

Таким образом, из(4.20), (4.21) следует, что в С.Ц.М. импульсы частиц равны по величине:

$$\overset{\mathbf{r}}{p} = \overset{\mathbf{r}}{p}_1 = -\overset{\mathbf{r}}{p}_2 = m (\overset{\mathbf{r}}{V}_1 - \overset{\mathbf{r}}{V}_2) = m \overset{\mathbf{r}}{V}_{rel}, \quad \overset{\mathbf{r}}{V}_{rel} = \overset{\mathbf{r}}{V}_1 - \overset{\mathbf{r}}{V}_2$$

и всегда противоположно направлены.

Найдем суммарную кинетическую энергию частиц в С.Ц.М. ($\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}$):

$$\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \tilde{p}^2 = \frac{\tilde{p}^2}{2m}.$$

Следовательно,

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{p}^2}{2m} = \frac{mV_{rel}^2}{2}. \quad (4.22)$$

Воспользуемся полученными формулами в конкретных случаях столкновения. Различают три типа столкновений: абсолютно неупругие, абсолютно упругие и промежуточный случай – неупругие.

Абсолютно неупругие столкновения – это такие столкновения, когда после удара частицы как бы слипаются и движутся как единое целое. Из З.С.И. и закона сохранения массы имеем (штрих здесь означает, что величина взята после столкновения)

$$(m_1 + m_2) \dot{V}' = m_1 \dot{V}_1 + m_2 \dot{V}_2,$$

откуда

$$\dot{V}' = \frac{m_1 \dot{V}_1 + m_2 \dot{V}_2}{(m_1 + m_2)} = \dot{V}_c. \quad (4.23)$$

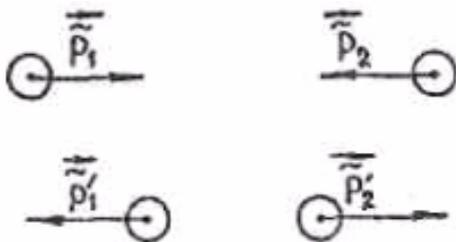
В С.Ц.М. абсолютно неупругих: столкновение выглядит наиболее просто. До столкновения частицы движутся навстречу друг другу, а после столкновения образовавшаяся частица останавливается. Следовательно, кинетическая энергия \tilde{T} целиком переходит в другие виды энергии Q (энергию деформации, внутреннюю энергию, энергию излучения и т.д.), величина которой определяется только модулем относительной скорости V_{rel}

$$Q = \tilde{T} = \frac{mV_{rel}^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{V}_2 - \dot{V}_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos(q)),$$

где q - угол между скоростями частиц до их столкновения.

Абсолютно упругие столкновения – это такие столкновения, когда частицы разлетаются после соударения и при этом сохраняется их суммарная кинетическая энергия. Это означает, что отсутствуют потери энергии на излучение, нагревание, деформирование и т.д.



Рассмотрим сначала **лобовое абсолютно упругое столкновение**. Обозначим модули импульсов частиц в системе ц.м. до и после соударения через \tilde{p} и \tilde{p}' . Тогда в С.Ц.М. условие сохранения кинетической энергии запишется в виде ($\tilde{p} = \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$, $\tilde{p}' = \tilde{p}'_1 = \tilde{p}'_2$, $i=1, 2$ - сталкивающихся частиц)

$$\frac{\tilde{p}^2}{2m} = \frac{\tilde{p}'^2}{2m}, \text{ откуда } |\tilde{p}| = |\tilde{p}'| \text{ и } \dot{V}_i = -\dot{V}'_i,$$

т.е. в С.Ц.М. при лобовом столкновении величины скоростей частиц сохраняются, а направления движения изменяются на противоположные (см. рис.). Теперь найдем скорости частиц после соударения в исходной (лабораторной) системе отсчета, используя, что, согласно следствию из теоремы о движении центра масс, скорость ц.м. до соударения равна скорости после,

а $\dot{V}'_i = \dot{V}'_i + \dot{V}_c$:

$$\dot{V}'_i = \dot{V}'_i + \dot{V}_c = -\dot{V}_i + \dot{V}_c = -(\dot{V}_i - \dot{V}_c) + \dot{V}_c = -\dot{V}_i + 2\dot{V}_c,$$

откуда

$$\dot{V}_i + \dot{V}'_i = 2\dot{V}_c. \quad (4.24)$$

Косое (нелобовое) абсолютно упругое столкновение. В этом случае из условия сохранения кинетической энергии, также как при лобовом столкновении получаем равенство импульсов $\tilde{p} = \tilde{p}'$, но теперь направление разлета частиц может отличаться от первоначального, как показано на рисунке. Рассмотрим частный случай, когда частица с массой m_2 до удара покоилась, т.е. $\dot{V}_2 = 0$. Тогда можно записать

$$\mathbf{p}'_1 = m_1 \dot{V}'_1 = m_1 (\dot{V}_c + \dot{V}'_1) = m_1 \dot{V}_c + \mathbf{p}'_1 \quad (4.25)$$

и аналогично

$$\mathbf{p}'_2 = m_2 \dot{V}_c + \mathbf{p}'_2. \quad (4.26)$$

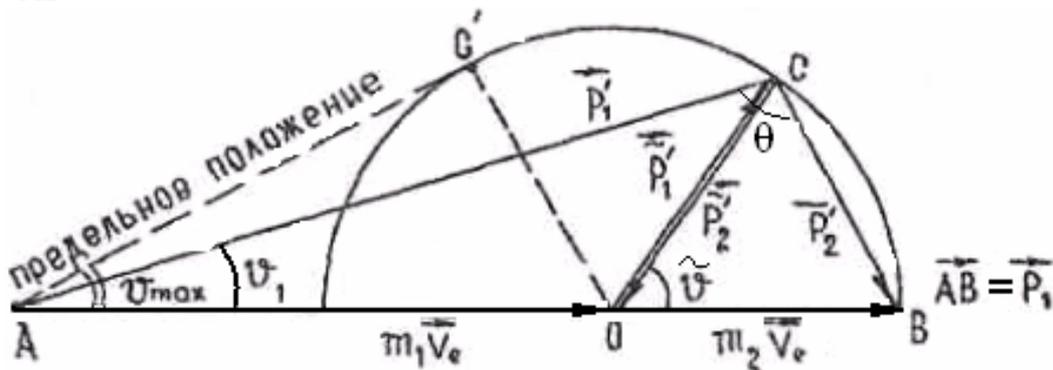
Складывая (4.26) с (4.27) с учетом того, что $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$, получаем З.С.И:

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = (m_1 + m_2) \dot{V}_c = (m_1 + m_2) \frac{m_1 \dot{V}_1}{(m_1 + m_2)} = m_1 \dot{V}_1 = \mathbf{p}_1.$$

Расчет параметров частиц после столкновения в лабораторной системе отсчета оказывается очень просто проводить по векторной диаграмме, показанной на рисунке.

Она строится с использованием соотношений (4.25) и (4.26) в следующей последовательности:

- а) откладывается $AB = p_1$;
- б) проводится окружность радиусом $\tilde{p} = mV_1$, проходящая через точку B и имеющая центр на AB .



Эта окружность и есть геометрическое место точек возможного (не противоречащего законам сохранения) положения точки C . Показанное на рисунке построение справедливо для любого угла $\tilde{\theta}$ и, следовательно, точка C может находиться только на окружности радиуса $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$ с центром в точке O , т.ч. $AO/OB = m_1/m_2$. Точка B тоже находится на этой окружности:

$$OB = m_2 \dot{V}_c = \frac{m_1 \dot{V}_1}{(m_1 + m_2)} = m \dot{V}_{rel} = \tilde{p}.$$

При этом могут реализоваться три различных случая (на рисунке показан третий случай; J_1 – угол отклонения первой частицы в лабораторной системе отсчета, q – угол разлета частиц):

- а) $m_1 < m_2$: точка A внутри окружности, $0 < J_1 < p$, $q < p/2$;
- б) $m_1 = m_2$: точка A на окружности, $0 < J_1 < p/2$, $q = p/2$;
- в) $m_1 > m_2$: точка A вне окружности, $0 < J_1 < J_{max}$, $q > p/2$.

Отметим, что в третьем случае, когда масса налетающей частицы превышает массу покоящейся, существует максимальный угол ее отклонения, который, как следует из рисунка, определяется только соотношением масс

$$\sin(J_{\max}) = \frac{m_2 V_c}{m_1 V_c} = m_2 / m_1. \quad (4.27)$$

Пользуясь построенной векторной диаграммой, легко выразить угол отклонения первой частицы J_1 в лабораторной системе координат через ее угол отклонения в С.Ц.М.

$$\operatorname{tg}(J_1) = \frac{\sin(\tilde{J})}{\cos(\tilde{J}) + m_1 / m_2}. \quad (4.28)$$

Этим исчерпывается информация, которую можно получить из законов сохранения. В их рамках все определяется с точностью до угла поворота первой частицы в С.Ц.М. \tilde{J} .

Неупругие столкновения – это такие столкновения, при которых частицы (тела) после удара могут разлетаться, но, в отличие от абсолютно упругих столкновений, их суммарная кинетическая энергия не сохраняется. Изменение кинетической энергии Q происходит из-за ее преобразования в другие виды энергии или, наоборот, из-за ее образования за счет других видов энергии. Если при этом кинетическая энергия увеличивается $Q > 0$, то столкновение называется **экзотермическим**, если уменьшается $Q < 0$, то – **эндотермическим**. Изменение импульса при столкновении, как и ранее, наиболее просто находится в С.Ц.М. Так как согласно определению неупругого столкновения $\tilde{T}' - \tilde{T} = Q$, то

$$\frac{\tilde{p}'^2}{2m} = \tilde{T}' = \tilde{T} + Q, \quad \text{откуда} \quad \tilde{p}' = \sqrt{2m(\tilde{T} + Q)}. \quad (4.29)$$

Диаграмма импульсов строится так же, как и при абсолютно упругом столкновении, но теперь уже точка B не лежит на окружности, т.к. величина импульсов меняется.

Если $Q < 0$, то неупругое столкновение начинает реализоваться лишь тогда, когда кинетическая энергия налетающей частицы превысит некоторый порог. Выразим эту пороговую энергию через Q . Как всегда, проще решать задачу в С.Ц.М. В ней суммарный импульс равен нулю и после удара возможен случай остановки частиц. Очевидно, что именно в этом случае необходимая на реализацию неупругого столкновения энергия будет минимальна $\tilde{T}_{\min} = |Q|$. Но если в С.Ц.М. частицы остановились, то в исходной системе отсчета они движутся как единое целое со скоростью \dot{V}_c и импульсом \dot{p}_i равным первоначальному

$$T_{\min} = |Q| + \frac{p_1^2}{2(m_1 + m_2)} = |Q| + \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} T_{\min}. \quad (4.30)$$

При выводе (4.30) мы использовали, что $T_{\min} = \frac{p_1^2}{2m_1}$. Решая уравнение (4.30) относительно T_{\min} , окончательно получаем значение пороговой энергии для эндотермических столкновений

$$T_{\min} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} |Q|. \quad (4.31)$$

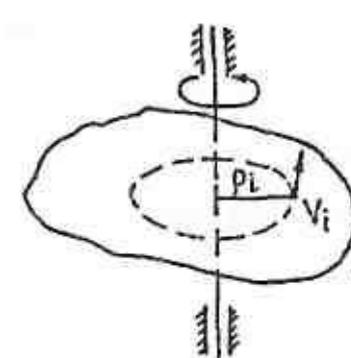
ВОПРОСЫ

1. Почему так велика роль законов сохранения в физике?
2. Сформулируйте закон сохранения импульса системы м.т.
3. Что такое замкнутая система? В каких случаях сохраняется суммарный импульс незамкнутой системы материальных точек?
4. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы материальных точек. Когда ц. м. системы материальных точек находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения?
5. Что такое момент импульса м.т. и системы м.т.? Сформулируйте теорему об изменении момента импульса системы м.т.
6. В каких случаях справедлив закон сохранения момента импульса?
7. Что такое работа силы? Приведите примеры расчета работы силы.
8. Какие силовые поля называются потенциальными?
9. Какая система материальных точек называется консервативной?
10. Как связаны работа и изменение потенциальной энергии в потенциальном поле?
11. Как связаны сила с потенциальной энергией?
12. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии.
13. Когда справедлив закон сохранения полной механической энергии? Сформулируйте его.
14. Какие типы столкновений частиц Вы знаете? Какая физическая величина сохраняется при любом типе столкновений?
15. Что такое абсолютно неупругие столкновения? Как ведет себя при неупругих столкновениях кинетическая энергия?
16. Что такое абсолютно упругие столкновения? Изменяется ли при них кинетическая энергия? Нарисуйте диаграмму, соответствующую абсолютно упругим столкновениям.
17. Что такое неупругие столкновения? Чему равна пороговая энергия для эндотермических столкновений?

V. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ранее мы рассматривали системы материальных точек, расстояния между которыми могли изменяться в процессе движения произвольным образом. Другим важным примером системы м. т. является абсолютно твердое тело (т.т.), когда на точки наложены весьма жесткие связи, а именно: расстояние между точками не меняется. Динамику т.т. рассмотрим сначала для простейшего варианта движения – вращения тела вокруг неподвижной оси, а затем разберем общий случай.

5.1 Момент инерции. Теорема Штейнера

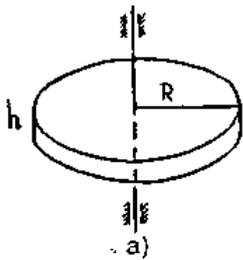


Для вращательного движения существенное значение имеет распределение массы по объему твердого тела. Инертные свойства твердого тела во вращательном движении определяются величиной, которая называется моментом инерции. Момент инерции тела I относительно некоторой оси S определяется как сумма произведений масс m_i его отдельных малых частей на квадрат расстояния этих частей до оси (см. рис.):

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (5.1)$$

Величина I характеризует распределение массы в теле и не зависит от параметров движения. С её помощью легко вычисляется кинетическая энергия вращения твердого тела T_w . Согласно (2.5), линейные и угловые скорости i -ой точки т.т., вращающегося вокруг неподвижной оси, связаны соотношением $V_i = W r_i$. Тогда кинетическая энергия вращения т.т. будет равна:

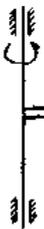
$$T_w = \sum_{i=1}^N m_i \frac{V_i^2}{2} = \frac{W^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \frac{I W^2}{2}.$$



Пример 5.1. Подсчитаем моменты инерции некоторых простейших тел, имеющих массу m .

а) плоский диск с плотностью ρ , толщиной h и радиусом R . Момент инерции относительно перпендикулярной к плоскости диска оси вращения, проходящей через центр (см. рис.), согласно (5.1) равен:

$$I = \int_0^R 2\rho r dr h r^2 = 2\rho h r \int_0^R r^3 dr = \frac{\rho R^4}{2} h r = \frac{m R^2}{2}.$$



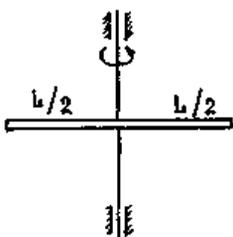
б)

б) стержень длины L с перпендикулярной к нему осью вращения, проходящей через конец (см. рис., I - линейная плотность стержня). Из (5.1) получаем

$$dm = I dx, \quad I = \int_0^L I x^2 dx = \frac{I L^3}{3} = \frac{m L^2}{3}. \quad (5.3)$$

в) стержень длины L с перпендикулярной к нему осью вращения, проходящей через его середину (см. рис.). Используя (5.1), находим

$$I_c = \int_{-L/2}^{L/2} I x^2 dx = \frac{I L^3}{12} = \frac{m L^2}{12}. \quad (5.4)$$



в)

Из (5.3) и (5.4) следует, что $I = I_c + m(L/2)^2$. Оказывается это утверждение справедливо для любых тел и носит название теоремы Штейнера.

Теорема Штейнера: Момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс плюс произведение массы на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_c + md^2 \quad (5.5)$$

Для доказательства (5.5) совместим ось OZ с произвольной осью вращения S , а ось Ox направим так, чтобы она пересекала параллельную ось, проходящую через центр масс C (см.

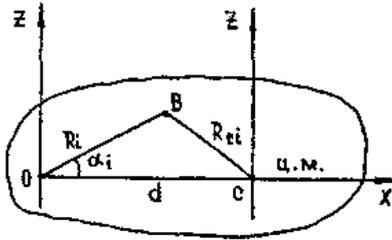


рис.). Обозначим через R_i и R_{ci} расстояния от выделенного элемента \hat{A} массы m_i до каждой из осей. По определению имеем:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2, \quad I_c = \sum_{i=1}^N m_i R_{ci}^2.$$

Из косоугольного треугольника ΔOBC следует

$$R_{ci}^2 = R_i^2 + d^2 - 2dR_i \cos \alpha.$$

Тогда $I_c = I + md^2 - 2d \sum x_i m_i = I + md^2 - 2dmx_c$, а поскольку

$x_c = d$, то окончательно получаем, что $I = I_c + md^2$ и теорема доказана.

5.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Выведем основное уравнение движения т.т. из теоремы об изменении кинетической энергии, которую применим для частного случая вращения тела вокруг неподвижной оси. Подсчитаем работу dA , совершаемую над телом при повороте его на угол dj . В отличие от общего случая системы м.т., для твердого тела работа внутренних сил равна нулю (т.к. нет относительных перемещений точек) и при применении теоремы об изменении кинетической энергии необходимо принимать во внимание только работу внешних сил F^{ext} . Тогда

$$dA = F^{ext} r \cos(q) dj = F^{ext} l dj = M^{ext} dj.$$

и, следовательно, работа определяется моментом внешних сил M^{ext} :

$$dA = M^{ext} dj. \quad (5.6)$$

Согласно теореме об изменении кинетической энергии системы, из соотношений (5.2), (5.6) имеем

$$dT = dA \quad \text{или} \quad d\left(\frac{IW^2}{2}\right) = M^{ext} dj,$$

откуда, деля на dt , получаем основное уравнение динамики вращения т.т. вокруг неподвижной оси

$$I \frac{dW}{dt} = M^{ext}. \quad (5.7)$$

Это же уравнение можно получить из теоремы об изменении момента импульса системы м.т. относительно неподвижного полюса (4.13)

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \vec{M}_\Sigma^{ext}.$$

Для этого найдем $\dot{\vec{L}}_\Sigma$ и подставим в соотношение теоремы (4.13), используя связь между линейной и угловой скоростями $V_i = W_{ri}$:

$$L_\Sigma = \sum |\vec{r}_i, \vec{p}_i| = \sum_{i=1}^N m_i r_i v_i \sin(q) = W \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = IW,$$

откуда

$$L_\Sigma = IW. \quad (5.8)$$

Из (4.13) и (5.8) получаем опять уравнение (5.7). Для вращающегося тела, на которое не действуют внешние моменты, закон сохранения момента импульса, в соответствии с (5.8), записывается в виде

$$IW = const. \quad (5.9)$$

Пример 5.2. ЗСМИ "помогает" фигуристке увеличить угловую скорость вращения. Уже вращаясь, она прижимает руки к телу и тем самым уменьшает свой момент инерции от I до I_2 , увеличивая одновременно угловую скорость. Изменение угловой скорости можно определить из (5.9), приравняв моменты инерции до и после прижатия рук:

$$I_1 W_1 = I_2 W_2, \text{ откуда } W_2 = \frac{I_1}{I_2} W_1.$$

Т.к. $I_1 > I_2$, то согласно полученной формуле $W_2 > W_1$. Фигуристку заставляет раскручиваться сила Кориолиса, действующая на руки (см. второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета, п.3.4). При этом, она сама совершает работу против центробежной силы, которая, в свою очередь, идет на увеличение кинетической энергии фигуристки.

Отметить, что между вращением т.т. вокруг неподвижной оси и движением м.т. по прямой существует аналогия в основных определяющих соотношениях и переменных, которая представлена в таблице.

ТАБЛИЦА АНАЛОГИЙ			
движение м.т. по прямой		вращение т.т. вокруг неподвижной оси	
координата м.т.	X	угол поворота	j
линейная скорость	$v = \frac{dx}{dt}$	угловая скорость	$w = \frac{dj}{dt}$
линейное ускорение	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	угловое ускорение	$b = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2j}{dt^2}$
масса м.т.	m	момент инерции т.т.	I
II З.Н.	$m a_x = F_x$	уравнение движения	$Ib = M$
импульс м.т.	$P_x = mV_x$	момент импульса т.т.	$L = IW$
З.С.И. ($F_x = 0$)	$m V_x = const$	З.С.И.И. ($M = 0$)	$IW = const$

Используя аналогии из представленной таблицы, можно писать соотношения для вращения по известным уравнениям для движения по прямой. При этом достаточно только заменить x на j , m на I и т.д.

5.3. Уравнения Эйлера

Рассмотрим общий случай движения т.т. – случай, когда тело вращается и одновременно движется поступательно. Оказывается, что определить кинетическую энергию такого движения можно довольно просто по теореме Кенига. **Теорема Кёнига: кинетическая энергия любой системы м.т. (в том числе и т.т.) равна кинетической энергии воображаемой м.т. с массой рассматриваемой системы м.т. и скоростью, равной скорости центра масс, плюс кинетическая энергия системы м.т. относительно системы отсчета, связанной с центром масс и движущейся поступательно.**

Докажем эту теорему. Пусть T' - кинетическая энергия системы м.т. относительно поступательно движущейся со скоростью V_c системы отсчета, связанной с центром масс. Тогда скорость i^{oi} м.т. относительно лабораторной системы отсчета V_i связана со скоростью этой же точки в С.Ц.М. соотношением $\dot{V}_i = \dot{V}_i' + \dot{V}_c$ и для кинетической энергии в лабораторной системе T получаем:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\vec{V}_i, \vec{V}_i)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{V}_i' + \vec{V}_c, \vec{V}_i' + \vec{V}_c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i'^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\vec{V}_c, \vec{V}_i') = \frac{m V_c^2}{2} + T'$$

откуда и следует теорема Кенига:

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + T'. \quad (5.10)$$

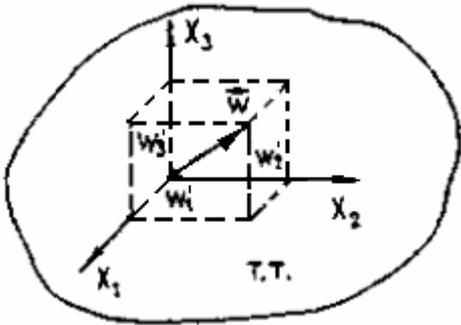
При выводе (5.10) использовалось, что

$$\sum_{i=1}^N m_i (\vec{V}_i, \vec{V}_i') = \sum_{i=1}^N (\vec{V}_c, m_i (\vec{V}_i - \vec{V}_i')) = (\vec{V}_c, \sum_{i=1}^N m_i V_i' - \vec{V}_c \sum_{i=1}^N m_i) = 0.$$

В соответствии с теоремой Кёнига для определения кинетической энергии т.т. необходимо найти ее величину относительно центра масс T' . В системе ц.м. у т.т. одной из его неподвижных точек является, очевидно, центр масс и, следовательно, мгновенная ось вращения тоже проходит через него. Так же, как в случае вращения вокруг неподвижной оси, получаем $T' = \frac{IW}{2}$ (см. (5.2), I - момент инерции относительно мгновенной оси вращения), и (5.10) принимает вид

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{IW^2}{2}. \quad (5.11)$$

Полученное соотношение (5.11) не очень удобно для решения задач, т.к. момент инерции I будет, в общем случае, зависеть от времени из-за смены ориентации мгновенной оси вращения относительно тела. Поэтому найдем такое выражение для T , в котором характеристики инерции вращения не зависят от времени. Будем считать, что у тела имеется неподвижная точка O и введем систему координат $O X_1 X_2 X_3$, связанную с ней. Тогда, согласно (2.9), $\vec{V} = [\vec{W}, \vec{r}']$ и для кинетической энергии относительного вращения получаем ($i, k = 1, 2, 3$ - индексы осей системы координат $O X_1 X_2 X_3$,



(см. рис.); знак \sum означает суммирование по всем частицам т.т., индекс суммирования для избежания громоздкости в формулах опущен):

$$\begin{aligned} T' &= \sum \frac{m(\vec{V}, \vec{V})}{2} = \sum \frac{m([\vec{W}, \vec{r}'], [\vec{W}, \vec{r}'])}{2} = \frac{1}{2} \sum m(\vec{W}, [\vec{r}', [\vec{W}, \vec{r}']]) = \frac{1}{2} \sum m((\vec{W}r'^2 - \vec{r}'(\vec{W}, \vec{r}')), \vec{W}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m(W_i' r'^2 - x_i x_k W_k') W_i' = \frac{W_i' W_k'}{2} \sum m(d_{ik} r'^2 - x_i x_k), \end{aligned}$$

где d_{ik} - символ Кронекера ($d_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $d_{ik} = 1$ при $i = k$). Или, вводя тензор момента инерции, который задается в каждой из систем координат таблицей (матрицей) из девяти чисел, определяемых по формуле

$$I_{ik} = \sum m(d_{ik} r'^2 - x_i x_k), \quad (5.12)$$

получаем

$$T' = \frac{1}{2} I_{ik} W_i' W_k'. \quad (5.13)$$

При выводе (5.12), (5.13) использовалось правило суммирования по повторяющимся индексам (например, $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$). Из теоремы Кёнига (5.10) и соотношения (5.13) следует окончательная формула для кинетической энергии т.т.

$$T = \frac{\sum mV_c^2}{2} + \frac{I_{ik} W_i' W_k'}{2}. \quad (5.14)$$

Для выяснения физического смысла тензора момента инерции распишем в соответствии с (5.12) его компоненты:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) = \sum m(x_2^2 + x_3^2) = \sum m r_1^2 = I_1, \\ I_{22} &= \sum m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2^2) = \sum m(x_1^2 + x_3^2) = \sum m r_2^2 = I_2, \end{aligned}$$

$$I_{33} = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^2) = \sum m(x_1^2 + x_2^2) = \sum m r_3^2 = I_3,$$

$$I_{12} = I_{21} = -\sum m x_1 x_2, \quad I_{13} = I_{31} = -\sum m x_1 x_3, \quad I_{23} = I_{32} = -\sum m x_2 x_3$$

где r_i - расстояние от рассматриваемой точки до оси Ox .

Таким образом, компоненты тензора I_{ij} с одинаковыми индексами представляют собой моменты инерции относительно координатных осей, соответствующих этому индексу (см. соотношение (5.1)). Попарно равные компоненты с различными индексами называются **центробежными моментами инерции**. Для осей, являющихся осями симметрии, центробежные моменты обращаются в ноль. Более того, оказывается, что для каждой точки тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, называемые **главными** и такие, что относительно этих осей центробежные моменты равны нулю. Поэтому в главных осях тензор момента инерции имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

и выражение (5.14) для кинетической энергии упрощается

$$T = \frac{\sum m V_c^2}{2} + \frac{1}{2}(A W_1^2 + B W_2^2 + C W_3^2). \quad (5.15)$$

Величины I_{ij} и A, B, C при вращении т.т. остаются постоянными (не зависят от времени), т.к. оси системы координат $O X_1 X_2 X_3$ связаны с телом, и их положение относительно тела не меняется. В то же время проекции вектора угловой скорости на эти оси оказываются, очевидно, переменными, даже когда т.т. вращается равномерно.

Теперь подсчитаем момент импульса т.т. относительно центра масс (при выводе используется формула для двойного векторного произведения, см. раздел II):

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum [\vec{r}', \vec{p}] = \sum [\vec{r}', \vec{V}] = \sum [\vec{r}', \vec{V}_c + \vec{W}, \vec{r}'] = \left[\sum m \vec{r}', \vec{V}_c \right] + \sum m [\vec{r}', \vec{W}, \vec{r}'] = \\ &= \left[\sum m \vec{V}_c, \vec{V}_c \right] + \sum m \left(\vec{W} r' - r'^2 (\vec{W}, \vec{r}') \right) \end{aligned}$$

Спроектируем полученное выражение для \vec{L} на оси связанной с т.т. системы координат:

$$\vec{L} = \sum m (W_i' r'^2 - x_i x_j W_j') = W_j' \sum m (d_{ij} r'^2 - x_i x_j) = I_{ij} W_j'.$$

Следовательно,

$$L_i = I_{ij} W_j'. \quad (5.16)$$

Если оси – главные, то соотношение (5.16) записывается в виде:

$$L_1 = A W_1', \quad L_2 = B W_2', \quad L_3 = C W_3'. \quad (5.17)$$

Используя полученные результаты, легко вывести основные уравнения динамики т.т., называемые **уравнениями Эйлера**. На основании теоремы об изменении суммарного момента импульса (4.11), записанной с помощью формулы (2.8) в виде

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} + [\vec{W}, \vec{L}_c] = \vec{M}_\Sigma^{ext}$$

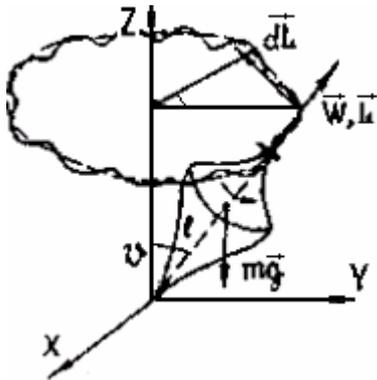
и с учетом (5.17) получаем динамические уравнения Эйлера для описания вращения тела вокруг центра масс:

$$\begin{cases} A \frac{dW'_1}{dt} + (C - B) W'_2 W'_3 = M_1'^{ext}, \\ B \frac{dW'_2}{dt} + (A - C) W'_1 W'_3 = M_2'^{ext}, \\ C \frac{dW'_3}{dt} + (B - A) W'_1 W'_2 = M_3'^{ext}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Из анализа приведенного вывода уравнений Эйлера следует, что они справедливы и в случае вращения т.т. вокруг произвольной неподвижной точки.

5.4. Динамика гироскопов

Остановимся теперь на динамике вращения гироскопов. **Гироскопом называется массивное симметричное тело, ($B = C = 1$), вращающееся вокруг оси симметрии с большой угловой скоростью.** Специфические свойства движения гироскопов нашли себе разнообразное практическое применение (например, в автоматических системах управления летательных аппаратов). Наиболее распространенным примером гироскопа является волчок (см. рис.) Опыт показывает, что под действием силы тяжести волчок не падает, а совершает прецессию с угловой скоростью \vec{g} .



Прецессией называется такое движение волчка, когда его ось равномерно вращается вокруг вертикали, описывая круговой конус. Одновременно с прецессией сам волчок равномерно вращается вокруг собственной оси. Найдем связь между скоростью прецессии и собственной угловой скоростью вращения волчка \vec{W} . По теореме о скорости изменения момента импульса (4.11) имеем $\left| \frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} \right| = M^{ext}$ Подставляя в это соотношение выражения для $\left| d\vec{L}_\Sigma \right|$ и $M^{ext}(L_w \gg L_y)$:

$$\left| d\vec{L}_\Sigma \right| = L_\Sigma \sin(q) g dt = IWg \sin(q) dt, \quad M^{ext} = mgI \sin(q),$$

получаем приближенную формулу угловой скорости прецессии гироскопа (1 – высота центра тяжести гироскопа)

$$g = \frac{mgI}{IW}. \quad (5.19)$$

Интересно, что угловая скорость прецессии не зависит от угла наклона оси волчка к горизонту. Формула (5.19) соответствует опыту, т.к. из нее следует, что $g \sim \frac{1}{W}$ и с увеличением W скорость g падает. На самом деле движение волчка сложнее, поскольку на прецессию накладывается нутация: небольшие колебания угла наклона q

ВОПРОСЫ

- 1 . Почему задача динамики твердого тела, вообще говоря, легче задач динамики системы материальных точек?
- 2 . Что такое момент инерции? Зависит ли он от характеристик движения?
- 3 . Какова связь, между кинетической энергией вращения тела вокруг неподвижной оси и его угловой скоростью?
- 4 . Подсчитайте моменты инерции плоского диска и стержня.
- 5 . Сформулируйте теорему Штейнера.
- 6 . Выпишите основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.
- 7 . Сформулируйте закон сохранения момента инерции для вращающегося тела. Когда он справедлив?
- 8 . В чем заключается аналогия между вращением твердого тела вокруг неподвижной оси и движением материальной точки по прямой?
- 9 . Сформулируйте теорему Кенига.
- 10 . Что такое тензор момента инерции? Какой он имеет вид в главных осях?
- 11 . Выпишите динамические уравнения Эйлера для вращения твердого тела. При каких условиях они справедливы?
- 12 . Что такое гироскоп? Чем обусловлена его прецессия?
- 13 . Как связана угловая скорость прецессии с собственной угловой скоростью волчка?
- 14 . Какая сила создает момент силы, увеличивающий угловую скорость фигуристки, прижимающей руки к телу, в системе отсчета, вращающейся с ее начальной угловой скоростью?

VI. КОЛЕБАНИЯ

Основные законы механики мы с вами уже изучили. Теперь посмотрим как они работают в очень интересном случае движения механических систем – в колебательных процессах.

6.1. Свободные незатухающие колебания

Одним из наиболее распространенных типов движения механических систем являются малые свободные колебания вблизи устойчивого положения равновесия. Оказывается, что,



несмотря на все разнообразие колебательных движений, малые незатухающие колебания одномерных систем (систем, положение которых задается одной переменной) описываются уравнением одного и того же вида. Выведем его для двух конкретных систем. Рассмотрим грузик на гладкой плоскости, скрепленный с пружинкой. Дифференцируя по времени закон сохранения полной энергии для этой системы (см. главу 4)

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const,$$

получаем $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$, откуда, вводя $w = \sqrt{k/m}$, приходим к так называемому каноническому виду уравнения малых свободных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0. \quad (6.1)$$

Систему, описываемую уравнением (6.1), принято называть **гармоническим осциллятором**. (Гармоническим, т.к. решение уравнения представляется в виде суперпозиции гармонических функций – синусов и косинусов.)

Рассмотрим теперь физический маятник – тело, колеблющееся вокруг неподвижной оси, параллельной земной поверхности (см. рис.). Записывая динамическое уравнение (5.7) для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси,



$$I \frac{d^2j}{dt^2} = -mgr \sin(j),$$

получаем при малых j , когда $\sin(j) \cong j$, уравнение, аналогичное (6.1) (отличие лишь в обозначении и физическом смысле переменной, определяющей положение одномерной системы: в (6.1) то x , а в (6.2) – j)

$$I \frac{d^2j}{dt^2} + w^2j = 0, \quad (6.2)$$

где $w = \sqrt{\frac{mgr}{I}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$ – круговая частота колебаний; $L = \frac{I}{mr}$ – приведенная длина физического маятника.

Итак, для изучения малых свободных колебаний одномерных систем достаточно рассмотреть решения уравнения типа (6.1). Как легко проверить непосредственной подстановкой, общее решение этого дифференциального уравнения записывается в виде

$$x = A \cos(\omega t + j_0), \quad (6.3)$$

где постоянные A и j_0 определяются из начальных условий. Постоянная A называется амплитудой, j_0 – начальной фазой колебаний, а w – круговой (или циклической) частотой колебаний. Из (6.3) следует, что вблизи положения равновесия малые колебания являются гармоническими, т.е. описываются гармоническими функциями вида:

$$x = A \cos(\omega t + j_0) \quad \text{или} \quad x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Поскольку период функции $\cos(j)$ равен 2π , то период колебаний, совершаемых по закону $x = A \cos(\omega t + j_0)$, определяется из соотношения

$$T = 2p / w, \quad (6.4)$$

откуда для грузика на пружинке и физического маятника имеем, соответственно,

$$T = 2p \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{и} \quad T = 2p \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (6.5)$$

Для любых других одномерных систем период малых гармонических колебаний находят аналогично: сначала приводят динамическое уравнение к каноническому виду (6.1), а затем определяют из него w и используют соотношение (6.4). Применяется и другой метод нахождения периода T , основанный на равенстве при колебательных процессах максимальных значений кинетических и потенциальных энергий $T_{\max} = W_{\max}$. Это равенство следует из закона сохранения полной энергии $T + W = const$, выполнения неравенств $T \geq 0$, $W \geq 0$ и существования таких состояний системы, когда T или W равны нулю (для обеспечения выполнения неравенства $W \geq 0$ необходимо за начало отсчета потенциальной энергии принять потенциальную энергию системы в положении равновесия).

Пример 6.1. В качестве примера определим энергетическим методом период колебаний грузика на пружинке:

$$T_{\max} = \max_t \left(\frac{mx^2}{2} \right) = \max_t \left(\frac{mw^2 A^2}{2} \sin^2 (wt + j_0) \right) = \frac{mw^2 A^2}{2},$$

$$W_{\max} = \max_t \left(\frac{kx^2}{2} \right) = \max_t \left(\frac{kA^2}{2} \cos^2 (wt + j_0) \right) = \frac{kA^2}{2}.$$

Поскольку $T_{\max} = W_{\max}$, то получаем $\frac{mw^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$, откуда $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и, согласно (6.4),

$$T = 2p \sqrt{\frac{m}{k}},$$

что, конечно, совпадает с (6.5). Из найденных выражений для T_{\max} и W_{\max} следует также, формула для полной энергии малых колебаний

$$E = T + W = T_{\max} + W_{\max} = \frac{mw^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Следовательно, полная энергия колебаний пропорциональна квадратам амплитуды и частоты. Согласно закону сохранения энергии ($E = const$), получаем $\frac{kA^2}{2} = const$ или $A = const$, т.е. при свободных колебаниях системы амплитуда не изменяется. Последнее справедливо, если в системе не действуют непотенциальные силы типа трения.

Изучение гармонического осциллятора часто удобно проводить в фазовой плоскости, одной из координат которой является смещение x , а другой - импульс гармонического осциллятора P . Каждому значению смещения x соответствует некоторое значение импульса. Продифференцируем общее решение (6.3) для смещения по времени и умножим на массу осциллятора m , тогда

$$p = mx = -mA w \sin (wt + j_0). \quad (6.6)$$

Представим уравнения (6.3) и (6.6) в виде:

$$\frac{x}{A} = \cos (wt + j_0),$$

$$\frac{P}{mA w} = -\sin (wt + j_0).$$

Возведя их в квадрат и сложив, получаем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{P^2}{m^2 A^2 w^2} = 1 \quad (6.7)$$

с полюсами $a = A$ и $b = mA\omega$.

Таким образом, точка, изображающая систему в фазовом пространстве, в процессе движения гармонического осциллятора описывает эллипс, который и является ее фазовой траекторией. Так как площадь эллипса равна πab , то площадь, ограниченная этой траекторией S , вычисляется по формуле:

$$S = \pi A(mA\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

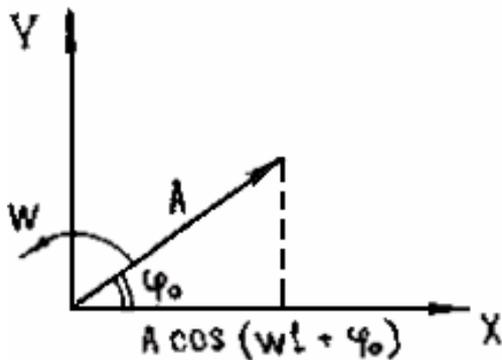
В примере 6.1 показано, что $mA^2\omega^2/2$ есть полная энергия осциллятора E . Вводя собственную частоту свободных колебаний осциллятора $n = \omega/2\pi$, можно записать площадь эллипса в виде $S = E/n$.

Поскольку площадь, ограниченная любой замкнутой кривой, вычисляется с помощью интеграла вдоль этой кривой, то и в случае эллипса имеем $S = \oint Pdx$, откуда

$$\oint Pdx = \frac{E}{n}. \quad (6.8)$$

Можно показать, что величина $\oint Pdx$ является адиабатическим инвариантом, т.е. она не меняется при достаточно медленных изменениях (малых возмущениях) колебательной системы и, следовательно, энергия в этом случае должна быть пропорциональна частоте. Этот вывод и соотношение (6.8) играют важную роль в квантовой механике.

6.2. Сложение гармонических колебаний



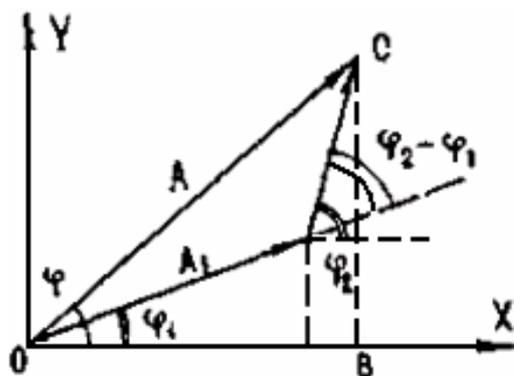
Во многих случаях возникает задача сложения гармонических колебаний. При этом оказывается полезным их графическое представление в виде векторов. Из начала координат – точки O – отложим вектор с длиной, равной амплитуде колебания A , и углом с осью $x - j_0$ (см. рис.). Если представить себе, что этот вектор вращается с угловой скоростью ω , то проекция вектора на ось x будет изменяться в пределах от $-A$ до A по закону

$$x = A \cos(\omega t + j_0).$$

Следовательно, проекция конца вектора совершает колебания по гармоническому закону с амплитудой, равной длине вектора, круговой частотой, равной угловой скорости вращения, и начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью x в начальный момент времени. Очевидно, любое гармоническое колебание может быть представлено в виде такого вектора. Рассмотрим теперь, какой операции над векторами соответствует сложение колебаний одного направления и равной частоты. Пусть

надо сложить колебание $x_1 = A_1 \cos(\omega t + j_1)$ с колебанием $x_2 = A_2 \cos(\omega t + j_2)$. Тогда в результате сложения получится снова гармоническое колебание x с той же частотой ω

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + j).$$



Т.к. при сложении векторов их проекции также складываются, то вектор, соответствующий результирующему колебанию, есть просто сумма векторов складываемых колебаний (см. рис.). По теореме косинусов из показанного на рисунке треугольника получаем выражение для суммарной амплитуды

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(j_2 - j_1). \quad (6.9)$$

Соотношение для нахождения фазы j находится из различного представления длины катета BC

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(j)(A_1 \cos(j_1) + A_2 \cos(j_2)) &= A_1 \sin(j_1) + A_2 \sin(j_2), \\ \operatorname{tg}(j) &= \frac{A_1 \sin(j_1) + A_2 \sin(j_2)}{A_1 \cos(j_1) + A_2 \cos(j_2)}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Проанализируем полученные уравнения. Если разность фаз колебаний составляет $\Delta j = j_1 - j_2 = 0, \pm 2p, \mathbf{K}, \pm 2kp$ ($k = 0, 1, 2, \mathbf{K}$), то амплитуда результирующего колебания максимальна и равна $A_1 + A_2$. При разности фаз $\Delta j = j_1 - j_2 = \mathbf{np}, \mathbf{K}, \pm(2k+1)p$ ($k = 0, 1, 2, \mathbf{K}$) колебания находятся в противофазе, и амплитуда результирующего колебания минимальна $A = |A_1 - A_2|$.

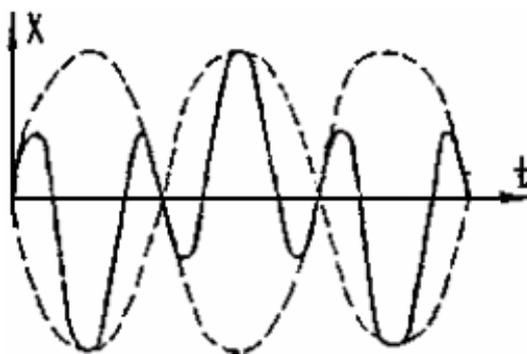
Результат сложения колебаний с разной частотой оказывается уже негармоническим колебанием, и векторное представление в этом случае не работает. Пусть складываемые колебания в начальный момент не имеют сдвига по фазе:

$$x_1 = A \cos(w_1 t) \quad \text{и} \quad x_2 = A \cos(w_2 t),$$

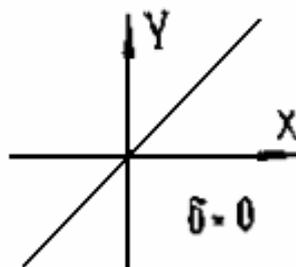
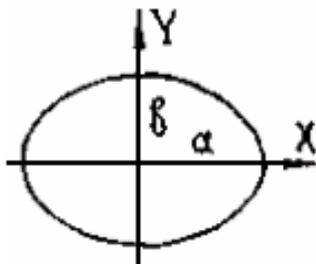
тогда

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{w_1 + w_2}{2} t\right)$$

Интерес представляет случай близких частот, при котором результирующее колебание должно быть в каком-то смысле близко к гармоническому (при $w_1 = w_2$, оно гармоническое). На самом деле, когда $|w_1 - w_2| \ll w_1 + w_2$, то



множитель $2A \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{2} t\right)$ медленно меняющаяся амплитуда, и результирующее колебание представляет собой **модулированное гармоническое колебание** с частотой $w \approx w_1 \approx w_2$. Такой тип колебаний называется **биениями**. Зависимость при биениях показана на рисунке.



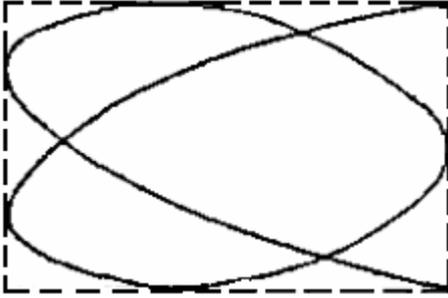
Если колебания – взаимно-перпендикулярны, то результат сложения можно непосредственно наблюдать на электронном осциллографе, подав на его отклоняющие пластины (тоже взаимно-перпендикулярные) напряжения, пропорциональные величинам складываемых колебаний. При этом в общем случае на экране получаются довольно сложные и деформирующиеся фигуры. Наиболее простой вид эти фигуры имеют при условии равенства частот складываемых колебаний x и y :

$$x = a \cos(wt), \quad y = b \cos(wt + d). \quad (6.11)$$

Конец вектора результирующего колебания будет описывать кривую, уравнение которой получается после исключения параметра wt из соотношений (6.11). Это уравнение можно записать в виде

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{2xy}{ab} \cos(d) = \sin^2(d). \quad (6.12)$$

Из него следует, что при различных d получается либо эллипс, либо прямая (например, при $d = 0$), которые в зависимости от значения d имеют различную ориентацию (см. рисунок).



Если частоты складываемых колебаний слегка различны, то разность фаз d будет медленно изменяться, а эллипс соответственно деформироваться и поворачиваться. Когда различие частот не мало, то образуются так называемые **фигуры Лиссажу**, существенно отличающиеся по своему виду от эллипсов, т.к. за время одного периода происходит значительное изменение d . На рисунке показана фигура Лиссажу, образуемая при отношении частот 1:2.

6.3 Колебания с трением

Ранее нами были рассмотрены свободные незатухающие колебания систем. Однако на практике свободные колебания системы всегда затухающие. Затухание колебаний обусловлено наличием сил трения или сил сопротивления окружающей среде движению тела. Работа таких сил, называемых **диссипативными**, переводит механическую энергию в другие виды энергии, чаще всего в тепло; полная механическая энергия при этом не сохраняется и амплитуда колебаний уменьшается. Для учета влияния этих сил на процесс колебаний нужно к упругой возвращающей к положению устойчивого равновесия силе добавить силу трения (диссипации).

Простейший вид трения, называемого **вязким**, соответствует случаю, когда сила пропорциональна скорости $F_{fr} = -a \dot{x}$. С учетом силы трения уравнение колебаний грузика на пружинке (второй закон Ньютона) записывается в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - a \dot{x}$$

или в каноническом виде ($b = \frac{a}{2m}$ и $w^2 = \frac{k}{m}$)

$$\ddot{x} + 2b \dot{x} + w^2 x = 0.$$

Решением уравнения (6.13) при не очень большом затухании ($b < w$) является функция

$$X = A \exp(-bt) \cos(\tilde{w}t + j) \quad (6.13)$$

с круговой частотой колебаний

$$\tilde{w} = w \sqrt{1 - \frac{b^2}{w^2}} \quad (6.14)$$

и экспоненциально затухающей амплитудой.

Введем ряд физических величин, которые характеризуют процесс затухания и диссипативные свойства колебательных систем. Найдем время, в течении которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\frac{A}{Ae^{-bt}} = e, \quad \text{откуда} \quad bt = 1, \quad (6.15)$$

т.е. коэффициент затухания $b = a/2m$ обратен по величине промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз. Важным свойством рассматриваемого типа колебаний является сохранение отношения амплитуд через период $\tilde{T} = T / \sqrt{1 - \frac{b^2}{w^2}}$ ($T = 2\pi/w$ – период колебаний без трения; наличие трения увеличивает период до \tilde{T}). Найдем это отношение, называемое **декрементом затухания**:

$$A_{n-1} / A_n = A(t) / A\left(t + \tilde{T}\right) = A \exp(-bt) / A \exp\left(-b\left(t + \tilde{T}\right)\right) = \exp(b\tilde{T})$$

Логарифм этого отношения d есть **логарифмический декремент затухания**

$$d = \ln(A_{n-1} / A_n) = b\tilde{T} = a\tilde{T}/2m = \left(t/\tilde{T}\right)^{-1} = 1/N = const.$$

Следовательно, он обратен по величине числу колебаний N , совершаемых за время, при котором амплитуда уменьшится в e раз. Видно также, что затухание тем быстрее, чем больше коэффициент трения a , меньше масса m и длительнее период T . Логарифмический декремент затухания характеризует способность системы рассеивать энергию. Амплитуда колебаний убывает по закону $\exp(-bt)$. Энергия, запасенная в системе, пропорциональна амплитуде в квадрате (см. пример 6.1), следовательно, она убывает по закону $\exp(-2bt)$. Тогда относительное уменьшение энергии за период равно:

$$\Delta E / E = \frac{E(t) - E\left(t + \tilde{T}\right)}{E(t)} = \frac{1 - \exp\left(-2b\tilde{T}\right)}{1} = 1 - \exp(-2d). \quad (6.16)$$

При незначительном затухании ($d \ll 1$): $\exp(-2d) = 1 - 2d$ и из (6.16) следует

$$\Delta E / E = 1 - (1 - 2d) = 2d. \quad (6.17)$$

Введем понятие **добротности системы** как величины, определяющей обратную относительной убыли энергии при изменении фазы на один радиан

$$Q = p/d, \quad Q = 2pE/\Delta E. \quad (6.18)$$

Используя соотношение (6.17), приходим к следующему выражению для Q , справедливому при незначительном затухании:

$$Q = 2pE/\Delta E = p/d. \quad (6.19)$$

Таким образом, при малых d добротность колебательной системы обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания. Существуют колебательные системы с весьма малым декрементом затухания. Например, для колебательного радио-контура $d = 0,02 \mathbf{K} 0,05$; для камертона $d = 10^{-3}$; для кварцевой пластинки $d = 10^{-4} \mathbf{K} 10^{-5}$.

Пример 6.2. Оценим число колебаний системы с трением до ее остановки. Т.к. колебания затухают по показательному закону, то, в идеальном случае (теоретически) они прекращаются при $t = \infty$. Но на практике можно принять, что колебания заканчиваются, когда их амплитуда падает до некоторой достаточно малой доли от начального значения. Обычно условно считают эту долю равной 0,01. Тогда время затухания t определяется соотношением

$$e^{-bt} = 0,01, \quad \text{откуда} \quad t \cong 4,6 \times \frac{1}{b} = 4,6 \times \frac{\tilde{T}}{d}.$$

Если, например, логарифмический декремент затухания $d = 0,1$, то число колебаний N , при которых движение практически прекращается, составляет

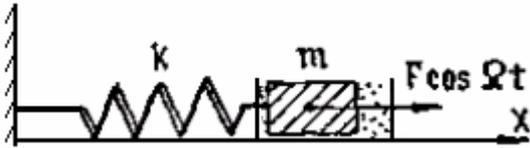
$$N = \frac{t}{\tilde{T}} = \left(4,6 \times \frac{\tilde{T}}{d}\right) / \tilde{T} = \frac{4,6}{d} = 46.$$

6.4. Вынужденные колебания

При свободных колебаниях частота определяется только свойствами системы и не зависит от параметров начального воздействия, вызвавшего колебательный процесс. В тех случаях, когда колебательной системе частота "навязывается" внешним периодическим воздействием, колебания называются вынужденными. Выведем каноническое уравнение вынужденных колебаний для массы на пружинке, когда на нее помимо упругой силы со стороны пружины и силы

вязкого трения действует внешняя вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F \cos(\Omega t)$ (см. рис.). В этом случае закон Ньютона записывается в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - a \frac{dx}{dt} + F \cos(\Omega t).$$



Вводя $f = F/m$, $w^2 = k/m$, $\beta = a/2m$, приходим к каноническому виду уравнения вынужденных колебаний с трением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + w^2 x = f \cos(\Omega t). \quad (6.20)$$

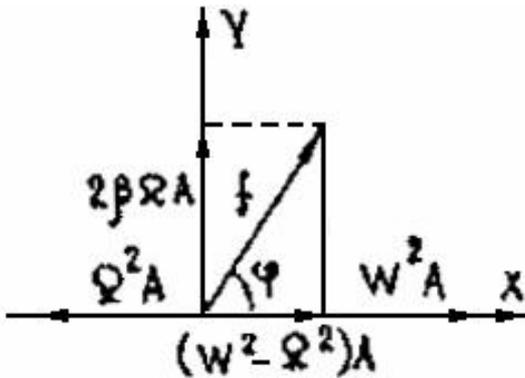
Полное решение уравнения (6.20) состоит из двух членов: общего решения однородного уравнения (6.13), которое затухает со временем, и частного решения, описывающего поведение осциллятора в установившемся режиме, когда влияние начальных условий уже не существенно и все определяется только параметрами внешнего воздействия. Будем искать это частное решение уравнения (6.20) в виде

$$x = A \cos(\Omega t - j). \quad (6.21)$$

Продифференцировав (6.21) по времени, получаем, что члены уравнения (6.20) имеют вид:

$$\begin{aligned} 2b \dot{x} &= -2b \Omega A \sin(\Omega t - j) = 2b \Omega A \cos(\Omega t - j + p/2), \\ \ddot{x} &= -\Omega^2 A \cos(\Omega t - j) = \Omega^2 A \cos(\Omega t - j + p), \\ w^2 x &= w^2 A \cos(\Omega t - j). \end{aligned}$$

Следовательно, гармоническое колебание $f \cos(\Omega t)$ является суммой трех гармонических колебаний, фазы которых отличаются на $p/2$ или p . Сложим эти колебания, используя векторную диаграмму (см. рис.).



Представим последнее колебание $w^2 x$ вектором длины $w^2 A$ вдоль оси x , тогда первое колебание изобразится вектором длиной $2b \Omega A$ со сдвигом по фазе на $p/2$ относительно него, а второе - вектором длиной $\Omega^2 A$ и со сдвигом по фазе на p . Как видно из рисунка, амплитуда вынужденных колебаний определится условием

$$(w^2 - A^2)^2 A^2 + 4b^2 \Omega^2 A^2 = f^2,$$

откуда

$$A = \frac{f}{\sqrt{(w^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}} = \frac{f/(2b)}{\Omega \sqrt{1 + \frac{w^2}{4b^2} \left(\frac{w}{\Omega} - \frac{\Omega}{w} \right)^2}}. \quad (6.22)$$

Отставание по фазе вынужденного колебания от вынуждающей силы равно

$$\text{tg} j = \frac{2b \Omega}{w^2 - \Omega^2}. \quad (6.23)$$

Из (6.22) следует, что амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и зависит от ее частоты. При определенной для данной системы частоте вынуждающих колебаний Ω амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется **резонансом**, а соответствующая частота – **резонансной частотой** Ω_p . Она определяется из условия максимума функции (6.22) и равна

$$\Omega_p = \sqrt{w^2 - 2b^2}. \quad (6.24)$$

Отметим, что резонансная частота не совпадает с собственной частотой колебаний системы (6.14). Кроме того, как видно из (6.22), резонансная частота для скорости отличается от резонансной частоты для перемещения и оказывается равной собственной частоте колебаний без трения w .

Подставив значение частоты (6.24) в (6.22), получаем выражение для резонансной амплитуды

$$A_p = \frac{f}{2b\sqrt{w^2 - b^2}}. \quad (6.25)$$

В отсутствие затухания резонансная частота $\Omega_p = w$, а резонансная амплитуда стремится к бесконечности. При незначительном затухании резонансная частота, амплитуда и ее резонансное значение определяются величиной добротности Q :

$$\Omega_p = \sqrt{w^2 - 2b^2} = w\sqrt{1 - 2b^2/w^2} = w\sqrt{1 - 2b^2/w^2} = w\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}\left(\frac{\tilde{w}}{w}\right)^2} \approx w\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

$$A = \frac{f/(2b)}{\Omega\sqrt{1 + \frac{w^2}{4b^2}\left(\frac{w - \Omega}{\Omega}\right)^2}} = \frac{f/(2b)}{\Omega\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{w}{\tilde{w}}\right)^2\left(\frac{w - \Omega}{\Omega}\right)^2}} \approx \frac{f/(2b)}{\Omega\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{w - \Omega}{\Omega}\right)^2}}.$$

$$A_p = \frac{f}{2b\sqrt{w^2 - b^2}} = \frac{f}{2bw\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}}.$$

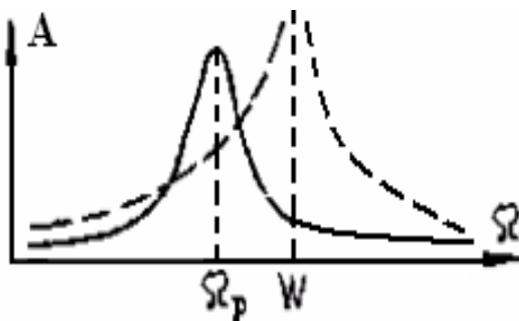
В окрестности резонанса, когда $\Delta\Omega/w = |\Omega - \Omega_p|/w \ll 1$ и затухание мало, для резонансной кривой из (6.22), (6.25) получаем:

$$A/A_p = \frac{\sqrt{w^2 - b^2}}{\Omega\sqrt{1 + \frac{w^2}{4b^2}\left(\frac{w - \Omega}{\Omega}\right)^2}} \approx \frac{w}{(w + \Delta\Omega)\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{w}{w + \Delta\Omega} - \frac{w + \Delta\Omega}{w}\right)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{2\Delta\Omega}{w}\right)^2}}. \quad (6.26)$$

Форму резонансной кривой характеризуют ее шириной $2\Delta\Omega$, измеренной на уровне $A = A_p/\sqrt{2}$. Подставляя в (6.26) это значение амплитуды, получаем выражение ширины резонансной кривой через добротность Q и собственную частоту w

$$2\Delta\Omega = w/Q. \quad (6.27)$$

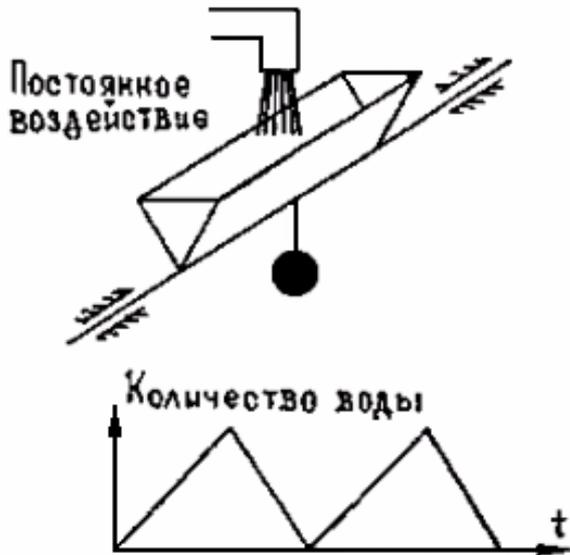
По полученным результатам легко построить зависимость амплитуды колебаний от частоты (амплитудно-частотную характеристику) (6.22), показанную на рисунке (пунктирная линия соответствует случаю отсутствия трения). Видно, что учет затухания приводит к качественному изменению вида амплитудно-частотной характеристики (резонансной кривой): пропадает разрыв. Причем, как следует из (6.27), чем меньше трение (больше добротность Q), тем уже пик резонансной кривой.



6.5. Параметрические и автоколебания

Рассмотрим некоторые другие виды колебаний, которые часто встречаются на практике, но не так просто математически описываются, как рассмотренные выше. Это, например, авто- и параметрические колебания.

Автоколебания – колебания, возбуждаемые и поддерживаемые непериодическим воздействием. Наиболее ярким примером автоколебаний является флаттер – колебательные движения крыльев, весьма опасные для самолетов. В жизни мы можем наблюдать различные примеры автоколебаний. Так, на рисунке показан пример системы, в которой постоянный поток воды вызывает колебания количества воды в переворачивающейся ванне. Из графика зависимости



стояние от центра тяжести человека до оси вращения качелей.

количества воды в анне от времени ясно, что эти колебания - негармонические. Это общее свойство всех автоколебаний, т.к. автоколебания возникают лишь в нелинейных системах, а уравнение гармонических колебаний - линейно.

Параметрические колебания – колебания, которые поддерживаются за счет действия внешних сил при изменении внутренних параметров системы. Типичным примером системы, совершающей параметрические колебания, являются качели. Человек, стоящий на качелях, приседает в точке их максимального отклонения, где центробежная сила равна нулю, а встает в нижней точке (положении равновесия), соответствующей наибольшей скорости и центробежной силе. Колебания поддерживаются за счет работы человека в поле силы тяжести. Изменяемый параметр - рас-

ВОПРОСЫ

1. Что такое свободные незатухающие колебания? Напишите канонический вид уравнения малых гармонических колебаний.
2. Какие параметры характеризуют гармонические колебания?
3. Приведите примеры механических систем, представляющих собой гармонический осциллятор.
4. Нарисуйте фазовую траекторию гармонического осциллятора. С какими величинами связана площадь полученного эллипса?
5. Как найти период малых свободных колебаний для любых одномерных систем?
6. Выпишите канонический вид уравнения свободных затухающих колебаний с вязким трением.
7. Что характеризуют коэффициент затухания, логарифмический декремент, добротность? Каков их физический смысл?
8. Что такое вынужденные колебания? Напишите канонический вид уравнения вынужденных колебаний с трением.
9. Что такое резонанс? Чем отличается вид резонансных кривых при наличии и отсутствии трения в колебательной системе?
10. Что такое автоколебания? Приведите примеры автоколебаний.
11. Какие колебания называются параметрическими? Приведите примеры.
12. Изобразите гармоническое колебание в виде вектора. Объясните как с помощью векторного представления складываются два колебания равной частоты.
13. Что такое биения? Приведите примеры явлений, при которых наблюдаются биения.

VII. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

7.1. Модель сплошной среды

До сих пор мы рассматривали две модели материальных объектов: материальная точка и абсолютно твердое тело. В абсолютно твердом теле расстояния между точками не изменяются. Однако многие реальные тела под действием приложенных сил меняют свою форму и объем. Исследовать эти изменения можно только в рамках более общей модели – **модели сплошной среды**, позволяющей описывать течения жидкостей и газов, а также деформацию тел, находящихся в твердой фазе.

Суть модели сплошной среды заключается в том, что материальный объект представляется состоящим из континуума частиц, заполняющих его объем непрерывно, т.е. всякий элементарный (малый) объем жидкости или газа содержит еще очень большое число частиц. Поэтому под **малым объемом** следует понимать **объем малый по сравнению с объемом рассматриваемой среды, но в то же время большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями**. Например, если говорят о движении точки жидкости, то речь идет не о смещении отдельной молекулы, а об изменении положения целого элемента объема, содержащего достаточно много молекул, но принимаемого в механике сплошных сред за точку.

Модель сплошной среды, в которой дискретная совокупность молекул, составляющих материальный объект, распределяется непрерывным образом, весьма удобна, т.к. позволяет применить к ней математический анализ непрерывных (во многих случаях дифференцируемых) функций. К каждому отдельному элементу мы применяем законы классической, а не квантовой механики именно потому, что они состоят из множества атомов, т.е. являются макроскопическими объектами. Состояние движущейся жидкости (газа) математически описывается заданием распределений ее скорости \dot{V} , давления P и плотности r как функций пространственных координат и времени:

$$\dot{V} = \dot{V}(x, y, z, t), \quad P = P(x, y, z, t), \quad r = r(x, y, z, t).$$

Такой подход к описанию, когда мы располагаемся в точке пространства (x, y, z) и следим в ней за изменением параметров среды, называется **эйлеровым способом задания движения**. Однако можно сделать и иначе: выбрать частицу жидкости с начальными координатами (x_0, y_0, z_0) и, двигаясь вместе с нею, следить как меняются ее скорость, давление и плотность:

$$V = \dot{V}(x_0, y_0, z_0, t), \quad r = r(x_0, y_0, z_0, t), \quad P = P(x_0, y_0, z_0, t).$$

Такой подход называется **лагранжевым способом задания движения**. Каждый из подходов позволяет полностью описать движение среды и его выбор определяется лишь постановкой задачи и соображениями удобства. Далее будем использовать эйлеров способ задания движения.

Механика сплошных сред разделяется на механику жидкости и газа и механику деформируемого твердого тела. Такое разделение обусловлено тем, что жидкости и газы при не очень быстрых движениях сопротивляются изменению только объема, а твердые тела - объема и формы.

7.2. Уравнения сохранения массы, энергии и импульса

Рассмотрим **стационарное движение** жидкости (газа), когда в любой точке (x, y, z) параметры состояния не изменяются со временем:

$$\dot{V}(x, y, z, t) = const, \quad r(x, y, z, t) = const, \quad P(x, y, z, t) = const.$$

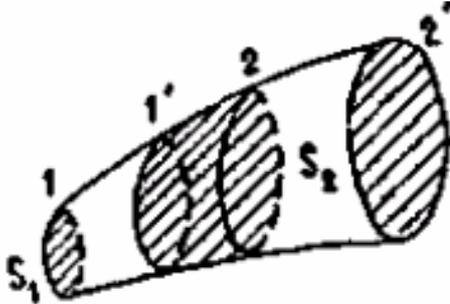
Траектории частиц при таком движении совпадают с **линиями тока** (линиями, касательные к которым в каждой точке имеют направление скорости). **Часть жидкости, протекающей внутри поверхности, образованной линиями тока, будем называть стружкой**, если ее поперечное сечение столь мало, что параметры потока можно считать постоянными по всему сечению.

Запишем для струйки законы сохранения (точнее, изменения) массы, энергии и импульса. Пусть начальное положение рассматриваемого элемента определяется сечениями 1 и 2, а конечное - 1' и 2' (см. рис.). В области 1' - 2 масса не изменяется. Поскольку через боковую поверхность струйки поток массы отсутствует, то приток массы в область 1' - 2 за время dt равен оттоку:

$$dG = S_1 r_1 V_1 dt = S_2 r_2 V_2 dt.$$

Откуда для струйки получаем **уравнение неразрывности, соответствующее закону сохранения массы**

$$r V S = const. \quad (7.1)$$



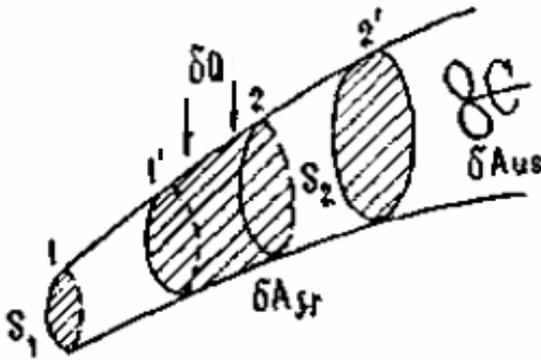
Будем называть **плотностью тока** вектор \vec{j} , направление которого совпадает с направлением вектора скорости \vec{V} , модуль равен расходу массы за единицу времени через единичную площадку, ему перпендикулярную:

$$j = \frac{1}{S} \frac{dG}{dt} = rV. \quad (7.2)$$

Используя определение плотности тока (7.2), уравнение неразрывности можно записать в виде

$$jS = const, \quad (7.3)$$

т.е. плотность тока увеличивается в местах сгущения линий тока, где поперечное сечение струйки S - мало.



Получим теперь соотношения, которые следуют из закона об изменении энергии. Тепло dQ , сообщаемое жидкости, и работа dA , совершаемая над ней давлением при переходе из состояния 1-2 в состояние 1'-2', идут на изменения ее внутренней, потенциальной и кинетической энергий (dU , dW , dT , соответственно), а также на совершение стружкой полезной работы dA_{us} и работы против сил трения dA_{fr} (см. рис.). Приращение любого вида энергии есть разность ее значений в положениях 1-2 и 1'-2'. Но часть 1'-2 - общая

для обоих положений и разность определяется различием соответствующих значений в частях 2-2' и 1-1':

$$\begin{aligned} dT &= r_2 V_2 S_2 dt \frac{V_2^2}{2} - r_1 V_1 S_1 dt \frac{V_1^2}{2} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} dG, \\ dW &= g(z_2 - z_1) dG, \quad dU = (U_2 - U_1) dG \\ dA &= r_1 V_1 S_1 dt - r_2 V_2 S_2 dt = \left(\frac{P_1}{r_1} - \frac{P_2}{r_2} \right) dG. \end{aligned}$$

Из выше приведенных соотношений и закона об изменении энергии в форме $dQ + dA = dA_{us} + dA_{fr} + dW + dU + dT$ получаем

$$dQ + \left(\frac{P_1}{r_1} - \frac{P_2}{r_2} \right) dG = dA_{us} + dA_{fr} + g(z_2 - z_1) dG + (U_2 - U_1) dG + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} dG.$$

Т.к. тепло dQ складывается из внешнего тепла dQ_{ent} и тепла, выделяющегося при работе против сил трения dQ_{fr} ($dQ_{fr} = dA_{fr}$), то окончательно имеем

$$\frac{dQ_{ent}}{dG} + \left(\frac{P_1}{r_1} - \frac{P_2}{r_2} \right) = \frac{dA_{us}}{dG} + g(z_2 - z_1) + (U_2 - U_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} dG. \quad (7.4)$$

Используя определение энтальпии единицы массы $I = U + \frac{P}{r}$ из (7.4) получаем **уравнение теплосодержания струйки**

$$\frac{dQ_{ent}}{dG} = \frac{dA_{us}}{dG} + g(z_2 - z_1) + (I_2 - I_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} dG, \quad (7.5)$$

где $\frac{dQ_{ent}}{dG}$, $\frac{dA_{us}}{dG}$ - внешнее тепло и совершаемая струйкой полезная работа на единицу массы для участка 1-2. Во многих случаях изменение потенциальной энергии единицы массы $g(z_2 - z_1)$ мало, а струйка - теплоизолирована и не совершает работы. Тогда (7.5) упрощается

$$I + \frac{V^2}{2} = const. \quad (7.6)$$

Следует подчеркнуть, что полученные уравнения для энергии струйки справедливы как для идеальной жидкости (газа), в которой отсутствуют силы трения, так и для вязкой жидкости, где силы трения могут играть существенную роль.

Для идеального газа, имеющего постоянные значения теплоемкостей C_v , C_p (при постоянном объеме и давлении, соответственно) и молярную массу m энтальпия линейно зависит от температуры

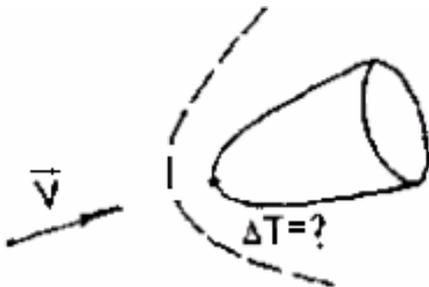
$$I = U + P/r = C_v T + RT/m = (C_v + R/m)T = C_p T.$$

и уравнение теплосодержания тогда имеет вид

$$C_p T + \frac{V^2}{2} = const. \quad (7.7)$$

Из (7.7) следует, что если скорость газа вдоль струйки не меняется, то не изменяется и его температура даже при наличии трения (для обеспечения постоянной скорости при наличии трения давление должно падать, а газ, расширяясь без подвода тепла, должен был бы охлаждаться, но благодаря работе против сил трения к нему подводится тепло dQ_{fr} , которое в точности компенсирует охлаждение при расширении). В струйке (трубке) постоянного сечения из-за трения температура газа убывает. Действительно, $P_2 < P_1$, следовательно $r_2 < r_1$, а поскольку $rV = const$, то $V_2 < V_1$ и учитывая, что $C_p T + \frac{V^2}{2} = const$, получаем $T_2 < T_1$.

Пример 7.1. Найдем максимальную температуру, до которой может разогреться идеальный газ при его полном торможении (например, у носка симметричного тела, движущегося в атмосфере, см. рис.).



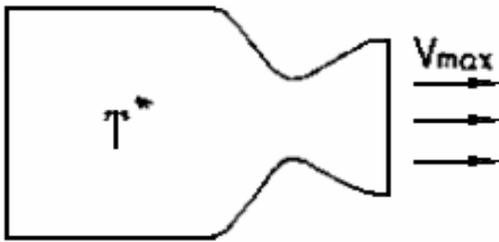
Если идеальный газ, имеющий скорость V , остановить, то его температура T возрастет до так называемой температуры торможения T^ которую можно найти из уравнения теплосодержания (7.7)*

$$C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T^* \quad \text{откуда} \quad T^* = T + \frac{V^2}{2C_p} = T + \frac{V^2}{2100}.$$

Последнее равенство написано для воздуха с учетом его значения теплоемкости $C_p = 1050$ кДж/кг. При скорости потока $V = 1000$ м/с получаем увеличение температуры

$$\Delta T = T^* - T = \frac{10^6}{2100} \text{ град} \cong 500 \text{ град}.$$

Пример 7.2. Определим максимальную скорость истечения газа из сосуда, в котором его скорость была равна нулю, а температура T^* . Используя $C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T^*$ и учитывая, что скорость будет

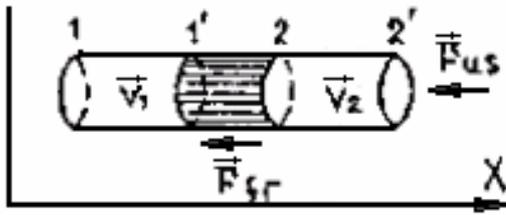


максимальна в том идеальном случае, когда газ охладится до абсолютного нуля $T = 0$, получаем (для воздуха)

$$V_{\max} = \sqrt{C_p T^*} = 44,8\sqrt{T^*} \text{ м/с}$$

При $T^* = 4900^\circ\text{K}$ имеем $V_{\max} \cong 3\text{км/с}$.

Перейдем к формулировке закона изменения импульса для жидкости. Импульс сообщается жидкости силами давления P , трения F_{fr} , и противодействия F_{us} со стороны устройств, над которыми совершается полезная работа (см. рис.), а также силой тяжести. В области $1'-2$ импульс не меняется и поэтому приращение импульса выделенной части жидкости есть разность его значений в областях $1-1'$ и $2-2'$. Уравнение запишем для проекции на ось малой части струйки (a - угол между осью струйки и горизонталью)



$(V_2 - V_1)dG = (P_1 S_1 - P_2 S_2)dt - (F_{fr} - F_{us})dt - dGg \sin(a)dt$.

Поскольку $dG = S_1 r_1 V_1 dt = S_2 r_2 V_2 dt = SrVdt$ и $V \sin(a)dt = dz$, то это равенство можно записать в дифференциальном виде

$$VdV = -\frac{dP}{r} - d\left(\frac{(F_{fr} - F_{us})Vdt}{rSVdt}\right),$$

откуда следует **уравнение Бернулли**:

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dP}{r} + d\left(\frac{dA_{us}}{dG} + \frac{dA_{fr}}{dG}\right) + g dz = 0. \quad (7.8)$$

Для горизонтальной струйки при отсутствии сил трения и полезной работы уравнение Бернулли упрощается и сводится к $dP = -rVdV$, т.е. в этом случае увеличение скорости может быть вызвано только уменьшением давления.

Отметим, что уравнение Бернулли может быть получено и из уравнения энергии (7.4), записанном в дифференциальном виде:

$$d\left(\frac{dQ}{dG}\right) - d\left(\frac{P}{r}\right) = d\left(\frac{dA_{us}}{dG} + \frac{dA_{fr}}{dG}\right) + g dz + dU + d\left(\frac{V^2}{2}\right) \quad (7.9)$$

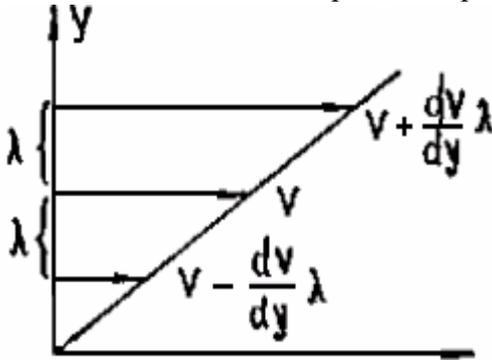
Используя первое начало термодинамики для единицы массы жидкости $d\left(\frac{dQ}{dG}\right) - Pd\left(\frac{1}{r}\right) = dU$, из (7.9) опять получаем (7.8).

7.3. Вязкость. Ламинарное и турбулентное течения

Наиболее разработанной в механике является теория движения идеальной жидкости (газа), в которой силы трения не учитываются. Влияние сил трения, обусловленных вязкостью жидкости или газа, обычно проявляется лишь вблизи поверхности обтекаемого тела. Силы трения оказываются основной причиной возникновения сопротивления движению тел в жидких и газообразных средах. Величина силы трения на единицу площади называется **напряжением трения** t . Эта величина связана с изменением скорости жидкости в направлении нормали к рассматриваемой площадке **законом трения Ньютона**, который записывается следующим образом:

$$t = m \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (7.10)$$

В кинетической теории, которая рассматривает жидкость или газ как совокупность большого числа движущихся и взаимодействующих друг с другом м.т. (эти м.т. соответствуют молекулам среды), вязкость связывается с обменом импульсами слоями, имеющими различную скорость. Рассмотрим упрощенную модель переноса импульса от одного слоя к другому. Характерным пространственным размером переноса является l - длина свободного пробега молекул. В слой со скоростью V со стороны больших y переносится импульс $\frac{1}{6}ncm \left(V + \frac{\partial V}{\partial y} l \right) dSdt$ (n, c, m -



плотность, скорость теплового движения и масса молекул, коэффициент $1/6$ взят из соображений симметрии), а со стороны меньших y : $\frac{1}{6}ncm \left(V + \frac{\partial V}{\partial y} l \right) dSdt$ (см. рис.). Этот перенос в сумме и дает импульс силы между слоями $t dSdt$, т.е.

$$t dSdt = \frac{1}{3}ncm \frac{\partial V}{\partial y} l dSdt,$$

откуда получаем закон Ньютона вида (7.10)

$$t = \frac{1}{3}ncml \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (7.11)$$

Из (7.10) и (7.11) следует значение для коэффициента вязкости ($r = nm$)

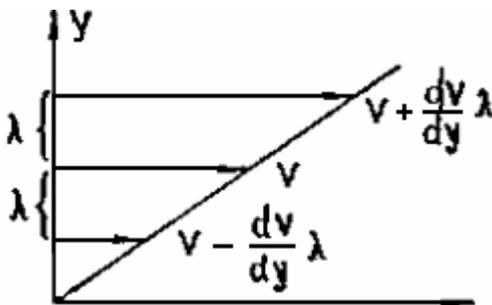
$$m = \frac{1}{3}ncml = \frac{1}{3}rc l. \quad (7.12)$$

Более точные расчеты с учетом закона распределения молекул по скоростям теплового движения дают тот же результат, но с другим значением коэффициента (вместо $\frac{1}{3}$ получается 0,499). В соответствии с (7.12) вязкость не зависит от давления и пропорциональна средней скорости теплового движения молекул, которая в свою очередь, пропорциональна $\sqrt{T} \left(l \sim \frac{1}{ns} \right)$, s - эффективное сечение столкновения)

$$m \sim ncm l \sim mc \sim \sqrt{T}.$$

В действительности, конечно, зависимость вязкости от температуры более сложная.

Важной безразмерной характеристикой любого вязкого течения является безразмерный параметр – **число Рейнольдса** $Re = \frac{rVL}{m}$, характеризующее отношение сил вязкости к силам инерции.



Пример 7.3. На примере обтекания пластины (см. рис.) покажем, что основные характеристики явления определяются числом Рейнольдса. Найдем толщину d пограничного слоя

– слоя у поверхности обтекаемого тела длиной L , где силы вязкости и силы инерции сравнимы. Оценим для элемента жидкости $dx dy dz$ порядок сил инерции F_{in} и трения F_{fr} :

$$F_{in} = ma = r \cdot dx dy dz \cdot a = rV \frac{\partial V}{\partial y} dx dy dz \sim rV \frac{V}{L} dx dy dz \sim \frac{rV^2}{L} dx dy dz,$$

$$F_{fr} = \left(t + \frac{\partial t}{\partial y} dy \right) dx dz - t \cdot dx dz = \frac{\partial t}{\partial y} dx dz dy = m \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx dy dz \sim m \frac{V}{d^2} dx dy dz.$$

За границу пограничного слоя примем поверхность, на которой силы инерции и силы вязкости сравниваются

$$F_{in} = F_{fr} \quad \text{или} \quad \frac{rV^2}{L} dx dy dz \sim m \frac{V}{d^2} dx dy dz$$

откуда

$$\frac{d}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

Через число Рейнольдса Re выражается и величина безразмерных касательных напряжений в пограничном слое

$$t = m \frac{\partial V}{\partial y} \sim m \frac{V}{d} \sim \frac{mV}{L} \sqrt{Re},$$

откуда

$$\frac{t}{rV^2} \sim \frac{m}{rVL} \sqrt{Re} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

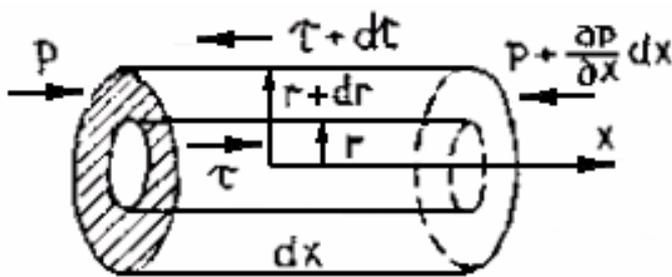
Число Рейнольдса служит не только для оценки количественных характеристик погранслоя, но определяет характер течения. При небольших значениях Re движение частиц среды имеет упорядоченный характер и такое течение называется **ламинарным**. В случае больших Re движение частиц становится беспорядочным, возникают неравномерные пульсации скорости в продольном и поперечном направлениях. Такое течение называется **турбулентным**. Критическое число Рейнольдса Re^* , соответствующее переходу от ламинарного течения к турбулентному, зависит от величины начальных возмущений, т.е. от интенсивности турбулентности набегающего потока. Для плоской пластины $Re^* \sim 10^5 \mathbf{K}10^6$ т.е. начиная с x , удовлетворяющего условию $\frac{rVx}{m} \sim 10^5 \mathbf{K}10^6$, течение около пластинки переходит

от ламинарного к турбулентному. Для течения в круглой трубе $Re^* = \frac{rVx}{m} \sim 2300 \mathbf{K}10^5$, где

величина 2300 соответствует случаю, затекания в трубу, имеющую острые кромки.

7.4. Течение вязкой жидкости в круглой трубе

Рассмотрим стационарное ламинарное вязкое течение жидкости в круглой трубе (течение Пуазейля).



Будем считать, что скорость направлена по оси x и зависит только от радиальной координаты r , т.е. $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$. Тогда,

поскольку течение стационарно $\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0$, то $a_x = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = 0$ и для каждого цилиндрического элемента жидкости (см. рис.) сила давления со стороны

других элементов, равная

$$dF_p = (P - (P + dP)) 2\pi r dr = -dP \cdot 2\pi r = -\frac{\partial P}{\partial x} 2\pi r \cdot dr dx,$$

уравновешивается силой вязкого трения F_{fr} :

$$dF_{fr} = 2pr \cdot dr dx - (t + dt)2p(r + dr)dx = -2pr \left(\frac{dr}{r} t + dt \right) dx = -2pr \left(\frac{dr}{r} t + \frac{dt}{dr} dr \right) dx =$$

$$= -2pr dr dx \left[\frac{1}{r} \left(-m \frac{dV}{dr} \right) + \frac{d}{dr} \left(-m \frac{dV}{dr} \right) \right] = 2pr \cdot m \cdot dr dx \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$$

Записывая равенство этих сил, получаем уравнение для распределения скорости по радиусу трубы

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Интегрируя это уравнение с учетом того, что скорость конечна при $r = 0$ и равна нулю у стенки {условие прилипания) $V|_{r=R} = 0$ (R – радиус трубы), находим распределение скорости по радиусу

$$V = - \frac{1}{4m} \frac{\partial P}{\partial x} (R^2 - r^2). \quad (7.13)$$

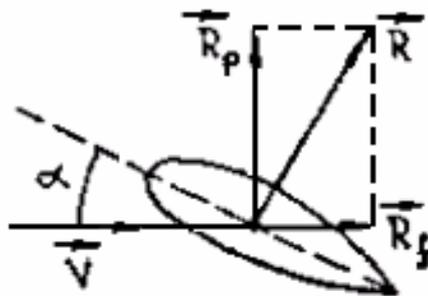
Скорость расхода жидкости Q (объем, проходящий в единицу времени через любое поперечное сечение трубы) находится интегрированием по сечению:

$$Q = 2p \int_0^R r |V(r)| dr = - \frac{p}{2m} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{p}{8m} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| R^4. \quad (7.14)$$

При малых скоростях, когда течение - ламинарное, соотношение (7.14) хорошо соответствует опытными данным (например, в капиллярах, где R - мало и, согласно (7.13), оказывается малым также и V).

7.5. Лобовое сопротивление и подъемная сила. Сила Стокса

Рассмотрим теперь движение симметричного тела в вязкой несжимаемой жидкости с целью определения действующих на тело со стороны среды сил. Обозначим через \dot{R}_f – силу лобового сопротивления, направленную противоположно скорости; \dot{R}_p – подъемную силу, направленную перпендикулярно скорости; $\dot{R} = \dot{R}_f + \dot{R}_p$ – результирующую силу, (см. рис.). Эти силы при заданной форме тела определяются следующими параметрами: L – характерным размером тела; α – углом атаки (углом между направлением скорости и осью симметрии тела); V - скоростью движения; ρ, μ - плотностью и вязкостью жидкости. Из этих параметров можно составить только две независимые безразмерные величины: число Рейнольдса Re и угол атаки α . Независимо от того, какую из составляющих сил сопротивления мы рассматриваем, соответствующая ей безразмерная сила может быть функцией только этих двух величин:



$$\frac{R}{\rho V^2 L^2} = f(Re, \alpha), \quad \frac{R_f}{\rho V^2 L^2} = f_f(Re, \alpha), \quad \frac{R_p}{\rho V^2 L^2} = f_p(Re, \alpha).$$

Определение функций f, f_f, f_p для различных форм тела является одной из основных задач теории и эксперимента в гидромеханике. При достаточно медленном движении роль вязкости оказывается определяющей и силы сопротивления не должны зависеть от плотности ρ .

Последнее возможно, когда $f_{f,p} = \frac{y(\alpha)}{Re}$ ($y(\alpha)$ - неизвестная функция угла атаки). Отсюда, например, для силы лобового сопротивления получаем:

$$R_f = \rho V^2 L^2 \cdot \frac{\mu}{\rho V L} y(\alpha) = \rho V L \mu y_L(\alpha). \quad (7.15)$$

В случае обтекания шара ясно, что вследствие симметрии задачи силы не могут зависеть от угла атаки, т.е. $y_f(\alpha) = \text{const} = A$. Значение постоянной A было вычислено Стоксом в предположении, что движение шара достаточно медленное, и можно пренебречь нелинейными членами типа $V \frac{\partial V}{\partial x}$ (именно этот случай и представляет интерес, поскольку, если скорости велики, то обтекание становится турбулентным и решение даже с учетом нелинейных членов в уравнении, описывающем ламинарное движение жидкости, не будет соответствовать действительности). Подставляя в (7.15) найденное Стоксом значение $A = 3\mu$ и $A \{ r \text{ - радиус шара} \}$, получаем формулу Стокса:

$$R_f = 6\mu r V m, \quad (7.16)$$

позволяющую определить величину силы сопротивления при ламинарном обтекании шара вязкой жидкостью.

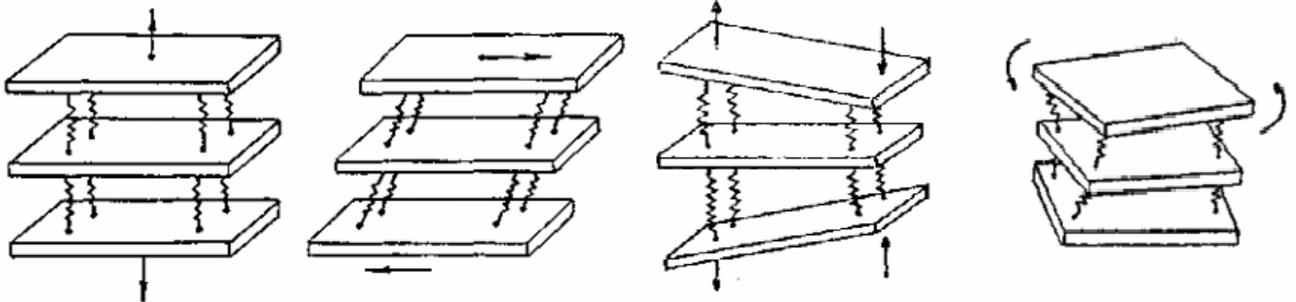
ВОПРОСЫ

1. В чем суть модели сплошной среды?
2. Чем отличается модель сплошной среды от модели абсолютно твердого тела?
3. Опишите эйлеров и лагранжев способы задания движения.
4. Чем определяется выбор способа (эйлеров или лагранжев) задания движения сплошной среды?
5. На какие подразделы и почему разделяется механика сплошной среды?
6. Напишите уравнения неразрывности и теплосодержания для струйки жидкости.
7. Как связаны энтальпия и внутренняя энергия единицы массы вещества?
8. Напишите уравнение теплосодержания для идеального газа.
9. Что такое температура торможения? Определите ее для идеального газа, имеющего температуру T и движущегося со скоростью V .
10. Напишите уравнение Бернулли.
11. Сформулируйте закон Ньютона для сил трения в жидкости. Чем обусловлены и где существенны силы вязкого трения?
12. Что является причиной возникновения сопротивления движению тел в жидких и газообразных средах?
13. Что такое число Рейнольдса? Что оно характеризует?
14. Напишите формулу Стокса для ламинарного обтекания шара вязкой жидкостью. Почему сила Стокса не зависит от угла атаки α ?

VIII. МЕХАНИКА ТЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

8.1. Уравнения теории упругости

Перейдем к рассмотрению механики деформируемых твердых тел. В отличие от жидкостей и газов, твёрдые тела сопротивляются не только изменению объема, но и формы. При этом, если нагрузки не очень велики, то после их снятия деформации исчезают, а форма и



объём тела возвращаются к исходным. Такое **свойство тел восстанавливать свою форму и объём называется упругостью**. В упругих телах силы, с которыми отдельные части тела действуют друг на друга, определяются деформациями этих взаимодействующих частей. При всем разнообразии деформаций тел оказывается возможным свести их к двум элементарным видам: растяжению (сжатию) и сдвигу (искажению формы). Для их наглядного представления можно воспользоваться моделью тела в виде множества одинаковых пластин. При растяжении этой модели (раздвигании недеформируемых пластинок) изменение расстояния между пластинами происходит таким образом, что расстояния между соседними пластинами остаются одинаковыми (см. рис.). Это соответствует однородному растяжению твёрдого тела. Деформацию сдвига можно смоделировать, сдвигая верхнюю пластину относительно нижней параллельно самой себе (см. рис.). При этом расстояния между пластинами останутся неизменными, но точки соседних пластин, лежащие на одной вертикали, сдвинутся относительно друг друга на некоторую величину. В этом случае мы имеем однородный сдвиг. На модели можно пронаблюдать и деформацию изгиба, наклонив верхнюю пластину (см. рис.). При этом, расстояния между соседними пластинами в разных местах изменятся по-разному (неоднородное растяжение и сжатие). Кручение мы получим, повернув верхнюю пластину вокруг вертикальной оси (см. рис.). При этом расстояние между пластинами останется неизменным, но точки пластины, лежащие на одной вертикали, сдвинутся друг относительно друга на разные значения (неоднородный сдвиг).

Основными законами для описания упругого деформирования изотропных материалов, свойства которых одинаковы во всех направлениях, служат закон Гука и соотношение Пуассона, полученные экспериментальным путем.

Закон Гука. При достаточно малых силах F удлинение Δl бруска пропорционально растягивающей силе, приложенной к его торцам

$$\Delta l \sim F \quad (8.1)$$

Соотношение Пуассона. При растяжении брусок сжимается в поперечном направлении, причем относительное сжатие оказывается пропорциональным относительному продольному растяжению (h - поперечный размер бруска, l - длина бруска)

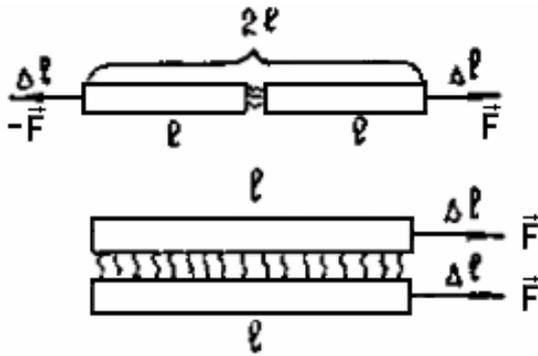
$$\frac{\Delta h}{h} \sim \frac{\Delta l}{l}. \quad (8.2)$$

Или, вводя коэффициент пропорциональности Пуассона n , имеем

$$\frac{\Delta h}{h} = -n \frac{\Delta l}{l}. \quad (8.3)$$

Установим теперь как удлинение Δl зависит от длины l и площади поперечного сечения бруска S . Для этого мысленно соединим два бруска длиной l каждый и растянем их силой F . При этом на каждый из них будет тоже действовать сила F и, очевидно, общее удлинение составит $2\Delta l$ (см. рисунок). Следовательно, $\Delta l \sim l$.

Сложим два бруска боковыми гранями и к каждому из них приложим силу F (см. рис.).



Опять получим, очевидно, удлинение Δl , но оно уже достигнуто силой $2F$ из-за увеличения площади сечения до $2S$. Поэтому $\Delta l \sim \frac{F}{S}$. Обобщая преды-

дущее, находим, что $\Delta l \sim \frac{Fl}{S}$. Коэффициент пропорциональности называется модулем Юнга и, обозначая его через E , закон Гука можно записать в виде:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad \text{или} \quad s = E e_1, \quad (8.4)$$

где $s = \frac{F}{S}$ - напряжение - сила, действующая на единицу площади; $e_1 = \frac{\Delta l}{l}$ — продольная деформация - относительное удлинение в направлении оси бруса. Тогда для поперечного удлинения имеем

$$\frac{\Delta h}{h} = -n \frac{\Delta l}{l} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta h}{h} = -\frac{n F}{E S} \quad \text{или} \quad e_h = -\frac{n}{E} s. \quad (8.5)$$

Знак минус введен потому, что для большинства материалов при $\Delta l > l$ (растяжение) в продольном направлении имеет место $\Delta h < 0$ (сжатие) в поперечном.

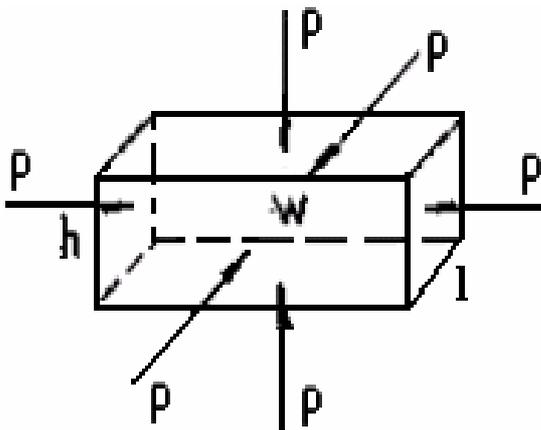
Закон Гука можно записать в дифференциальной форме, выразив деформацию бруска через перемещение $u(x)$. Если x - координата точки бруска до деформации, x' - после, то $x' = x + u$, следовательно

$$e_1 = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x'_2 - x'_1}{\Delta x} = \frac{[x_2 + u(x_2)] - [x_1 + u(x_1)] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x_2) - u(x_1)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

и закон Гука принимает вид

$$s = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.5)$$

Важным следствием линейности законов Гука и Пуассона является **принцип суперпозиции**: если на упругую среду действует сумма сил $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$, то полная деформация есть сум-



ма деформаций от каждого из воздействий $e = \sum_{i=1}^N e_i$

(N - число приложенных к телу (среде) сил; e и e_i - относительные удлинения в любом заданном направлении). Причем, очевидно, результат не зависит от порядка приложения сил.

Рассмотрим теперь простейшие задачи об упругом деформировании в случае **однородных деформаций**, т.е. когда они одинаковы во всех точках тела. Найдем деформацию бруска с характерными размерами l , h и w под действием равномерного давления P окружающей его жидкости (гидростатического давления). Используем принцип суперпозиции. Тогда

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{\Delta l_3}{l},$$

где Δl_1 – сжатие из-за приложения P к торцам $\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{P}{E}$; Δl_2 – растяжение из-за приложения P к вертикальным граням $\frac{\Delta l_2}{l} = n \frac{P}{E}$; Δl_3 – растяжение из-за приложения P к горизонтальным граням $\frac{\Delta l_3}{l} = n \frac{P}{E}$. Итак,

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{P}{E}(1-2n). \quad (8.6)$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{P}{E}(1-2n), \quad \frac{\Delta w}{w} = -\frac{P}{E}(1-2n). \quad (8.7)$$

Используя (8.6), (8.7), найдем изменение объема ΔV ($V = lhw$):

$$\Delta V = (l + \Delta l)(h + \Delta h)(w + \Delta w) - lhw \cong V \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta w}{w} \right) = -3PV \frac{1-2n}{E},$$

откуда получаем

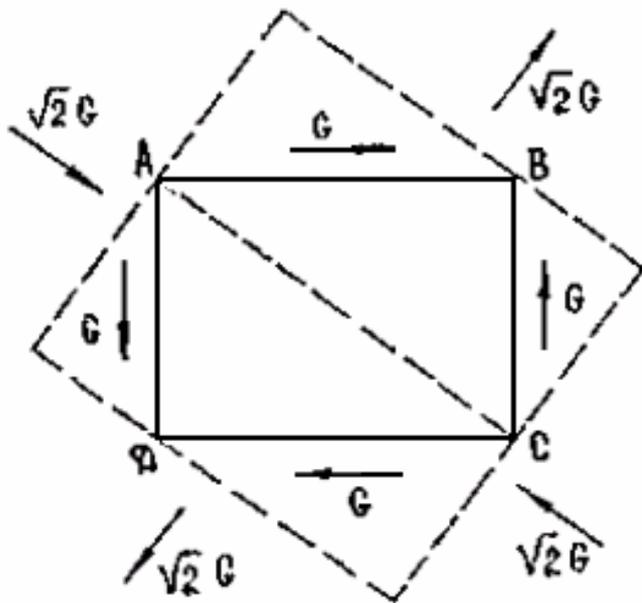
$$P = -K \frac{\Delta V}{V}, \quad (8.8)$$

где коэффициент $K = \frac{E}{3(1-2n)}$ называется **модулем объёмного сжатия**. Из этого выражения

модуля объёмного сжатия K через E и n следует, что, т.к. $K > 0$, то $n < \frac{1}{2}$. При $n = \frac{1}{2}$ полу-

чаем $K = \infty$, т.е. значение $n = \frac{1}{2}$ – максимально и соответствует несжимаемому материалу.

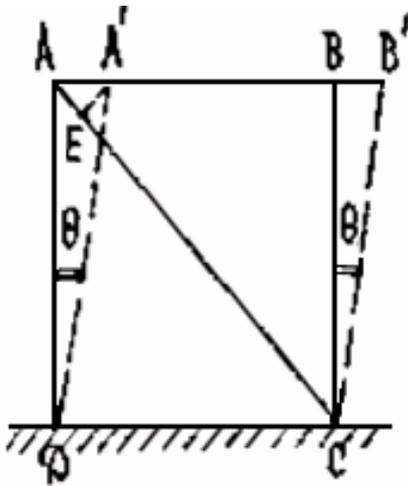
Другим важным случаем однородных деформаций является **деформация чистого сдвига**, которая реализуется, когда к боковым граням бруска равномерно приложены касательные усилия (см. рис.). Возникающие в этой задаче напряжения и деформации называются сдвиговыми. При сдвиге меняется только форма, а объем сохраняется. Изменение формы характеризуется искажением углов – их отклонением от прямых (от $p/2$), а само отклонение определяется относительным изменением длин диагоналей $\frac{\Delta D}{D}$. Ока-



зывается, что задача о сдвиге сводится к известным задачам о растяжении и сжатии в двух взаимно - перпендикулярных направлениях, как это показано на рисунке. Используя это, по закону Гука легко рассчитать относительное изменение длины диагонали

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2SE}} + n \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2SE}} = \frac{(1+n)G}{E S}. \quad (8.9)$$

Найдем теперь сдвиговую деформацию, которая характеризуется углом θ (см. рисунок). Считая, что изменение прямого угла мало по сравнению с ним, получаем:



$$q \cong \operatorname{tg}(q) = \frac{AA'}{AD} = \frac{\sqrt{2}AE}{AD} = \frac{\sqrt{2}AD}{D/\sqrt{2}} = 2 \frac{AD}{D} = \frac{2(1+n)G}{E S}.$$

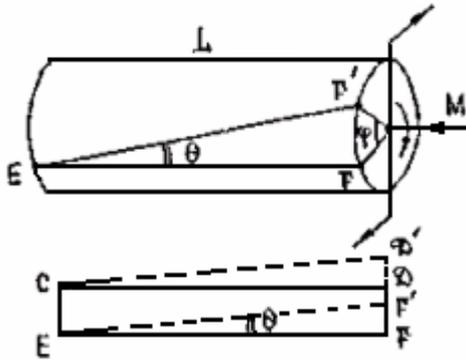
Откуда, выводя модуль сдвига $m = \frac{E}{2(1+n)}$, касательное

напряжение $t = \frac{G}{S}$ и сдвиговую деформацию $g = q$, находим закон Гука для сдвига

$$t = mg. \tag{8.10}$$

Из выражения для m через E и n и требования $m > 0$ следует $n > -1$. Итак, $-1 < n < \frac{1}{2}$, но фактически $0 < n < \frac{1}{2}$.

В отличие от двух ранее рассмотренных случаев деформации, как правило, оказываются неоднородными. Классической задачей, в которой деформации неоднородны, является **кручение круглого стержня** (см. рис.).



Определим крутящий момент, необходимый для закручивания на угол j закрепленного стержня, т.е. тела, длина которого много больше его поперечных размеров. Выделим в нем цилиндрический элемент с радиусом r , для которого имеем:

$$q = \frac{rj}{L} = t / m \rightarrow t = m \frac{rj}{L} \rightarrow dM = t \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi m j \frac{r^3}{L} dr.$$

Интегрируя по всем элементам от $r = r_1$ до $r = r_2$, находим закручивающий момент:

$$M = \int_{r_1}^{r_2} dM = 2\pi m j / L \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = m \frac{p(r_2^4 - r_1^4)}{2L} j.$$

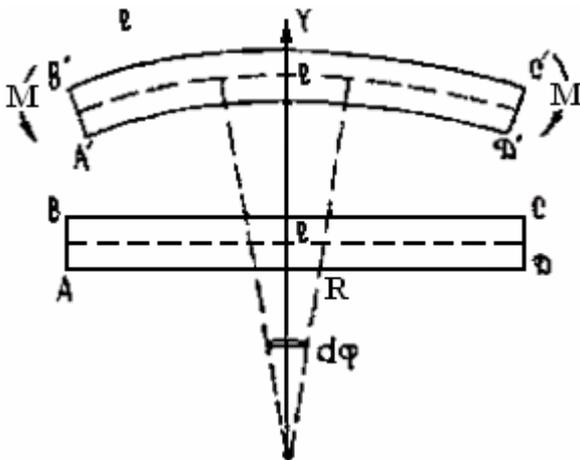
Итак,

$$M = fj, \tag{8.11}$$

где $f = \frac{1}{2} mp(r_2^4 - r_1^4) / L$.

В случае сплошного сечения, когда стержень не имеет внутренних полостей, $r_1 = 0$, $r_2 = a$ и формула для момента упрощается

$$M = \frac{p m a^4}{2L} j. \tag{8.12}$$



Неоднородная деформация имеет место и в случае изгиба балки. **Балкой называется стержень, работающий на изгиб.** Воспользуемся справедливой для балок гипотезой Д. Бернулли, в соответствии с которой сечения после изгиба остаются плоскими. Из этой гипотезы следует, что существует нейтральный слой, не деформирующийся при изгибе. Чем дальше точка от нейтрального слоя, тем в ней больше деформации:

$$e = \frac{(R + y)dj - Rdj}{Rdj} = \frac{y}{R},$$

где R - радиус кривизны нейтральной оси балки; y - расстояние от нейтральной оси до рассматриваемой точки балки; dj - угол между двумя прямыми, проведенными из центра кривизны к концам выделенного линейного участка (см. рис.). Согласно закону Гука (8.4) для напряжений в балке, получаем

$$s = Ee = \frac{E y}{R}.$$

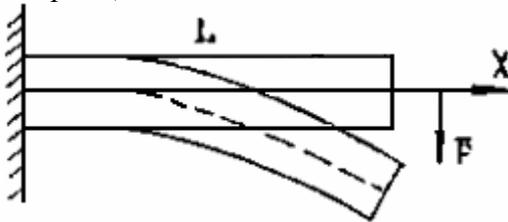
При известном распределении напряжений изгибающий момент находится интегрированием по сечению стержня:

$$M = \int s y dS = \int \frac{E y^2}{R} dS = \frac{E}{R} \int y^2 dS = \frac{EI}{R},$$

где $I = \int y^2 dS$ - момент инерции сечения балки относительно оси, лежащей в нейтральном слое. Итак, основное уравнение изгиба балки имеет вид

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}. \quad (8.13)$$

Пример 8.1. Найдём форму изгиба консольной балки (балки жестко - заземленной с одного из краев).



Пусть прогиб нейтральной оси балки задается функцией $x = x(x)$ (см. рис.), а на ее свободный край действует сила F , тогда кривизна балки и изгибающий момент вычисляются из соотношений:

$$\frac{1}{R} \cong -\frac{d^2 x}{dx^2}, \quad M = F(L - x)$$

и уравнение изгиба (8.13) записывается как

$$\frac{d^2 x}{dx^2} = -\frac{F(L - x)}{EI}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем форму балки

$$x = C_1 x + C_2 - \frac{Fx^2}{2EI} \left(L - \frac{x}{3} \right).$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из условий на левом краю

$x|_{x=0} = \frac{dx}{dx}|_{x=0} = 0$, которые означают отсутствие прогиба и горизонтальность касательной к нейтральной оси в месте жесткого заземления балки. Отсюда $C_1 = C_2 = 0$ и, следовательно,

$$x = -\frac{Fx^2}{2EI} \left(L - \frac{x}{3} \right)$$

Максимальный прогиб у балки на правом свободном краю при $x = L$

$$|x_{\max}| = |x|_{x=L} = \left| -\frac{Fx^2}{2EI} \left(L - \frac{x}{3} \right) \right|_{x=L} = \frac{FL}{3EI}.$$

8.2. Упругие волны в стержнях

Мы рассмотрели стационарные деформации упругих сред в простейших случаях. Если же внешнее воздействие на тело изменяется во времени, то возникает волновое движение, при котором возмущение деформации передается от одних участков среды к другим с конечной скоростью. Одним из простейших случаев такого волнового движения являются упругие продольные волны в стержнях.

Волны называются продольными, когда смещение в них параллельно направлению распространения. В стержне продольные волны можно возбудить ударом по его торцу

в направлении оси. Выведем уравнение, описывающее распространение этой волны. Из дифференциальной формы закона Гука (8.5) имеем

$$\frac{F}{S} = s = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.14)$$

Разность сил в сечениях по второму закону Ньютона создает ускорение и, используя (8.14), получаем:

$$rS\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x,$$

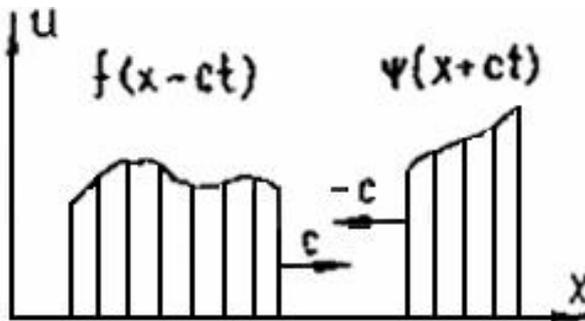
откуда, считая $ES = const$, получаем волновое уравнение продольных колебаний в стержне,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.15)$$

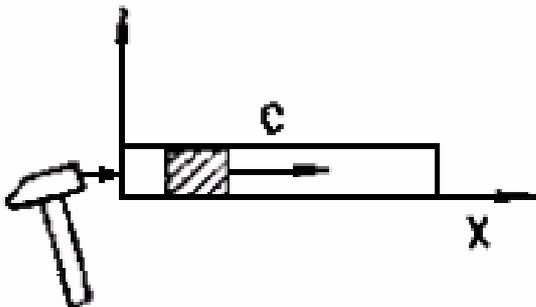
где $c = \sqrt{\frac{E}{r}}$ – скорость распространения продольных волн в стержне. Общее решение (8.15) имеет вид (f, y – произвольные функции)

$$u(x, t) = f(x - ct) + y(x + ct), \quad (8.16)$$

в котором первый член описывает волну, бегущая в положительном направлении оси x , а второй – в отрицательном со скоростями, равными c (см. рис.). Из общего решения (8.16) видно, что аргументы функций f и y (а значит и их значения не изменяются при $x - ct = const$, $x + ct = const$, соответственно. Дифференцируя эти равенства, получаем скорости распространения фиксированного значения перемещения $\frac{dx}{dt} = \pm c$).



Пример 8.2. Значение скорости продольных волн в стержне можно получить, не обращаясь к волновому уравнению (8.15), а рассмотрев частный случай распространения кратковременного импульса прямоугольной формы (приблизительно такой импульс формируется в стержне при резком ударе по его концу, см. рис.). По теореме об изменении импульса для заштрихованной на рисунке части материала, вовлеченного в движение (V – скорость частиц вещества) импульс равен



откуда

$$\Delta P = F\Delta t, \quad \Delta P = \Delta mV = rC\Delta tSV, \quad F\Delta t = sS\Delta t = EeS\Delta t,$$

откуда

$$rC\Delta tSV = EeS\Delta t, \quad \text{т.е.} \quad rCV = Ee.$$

Подставляя в последнее соотношение $e = V/C$ (это равенство доказывается дифференцированием $u(x, t) = y(x + ct)$ по x и t , поскольку $e = \frac{\partial u}{\partial x}, V = \frac{\partial u}{\partial t}$, получаем искомое значение скорости

$$c = \sqrt{\frac{E}{r}}.$$

Если стержень имеет конечную длину или состоит из разнородных по длине материалов, то это оказывает влияние на распространение волн. Математически влияние учитывается посредством задания граничных условий. Сформулируем их в произвольной точке $x = l$. Если на границе не допускается смещения, то она называется **абсолютно жесткой**, и на ней выполняется условие

$$u|_{x=1} = 0. \quad (8.17)$$

В противоположном случае **абсолютно мягкой (свободной) границы** усилия на ней, а значит, и напряжения должны быть нулевыми:

$$s|_{x=1} = 0 \rightarrow E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \quad (8.18)$$

При контакте двух спаянных стержней требуется выполнение двух условий: непрерывность перемещений (из-за отсутствия разрыва между стержнями) и равенство напряжений (согласно третьему закону Ньютона):

$$s_1|_{x=1} = s_2|_{x=1} \rightarrow E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad u_1|_{x=1} = u_2|_{x=1}. \quad (8.19)$$

Учет влияния на распространение волн граничных условий приводит к таким явлениям как их отражение и формирование прошедших волн. Законы отражения и прохождения волн в упругом материале достаточно изучать на гармонических волнах, т.к., согласно известной из математики теореме, практически любую встречающуюся в физических приложениях функцию можно разложить в интеграл Фурье по гармоническим составляющим, а затем, используя принцип суперпозиции (уравнение и граничные условия - линейны) и гармонические законы отражения, легко получить результат отражения в общем случае. Для гармонических волн перемещение, исходя из (8.15), представляется в виде (f и y - тригонометрические функции (\cos, \sin))

$$u(x,t) = a \cos(kx - wt + y_1) + b \cos(kx + wt + y_2), \quad (8.20)$$

где k - волновое число, w - круговая частота. Волна (8.20) обладает пространственно-временной периодичностью. В фиксированный момент времени t волновое возмущение $u(x,t)$ принимает одинаковые значения при изменении координаты x на величину l , называемую **длиной волны** и равную (учтено, что функция косинус имеет период $2p$)

$$l = \frac{2p}{k}. \quad (8.21)$$

Согласно (8.21) волновое число $k = \frac{2p}{l}$ представляет собой число волн, укладывающихся на отрезке длиной $2p$. Если же рассматривать волновой процесс в заданной точке пространства x , то величина $u(x,t)$ меняется с периодом

$$T = \frac{2p}{w}. \quad (8.22)$$

С помощью введенных характеристик пространственно-временной периодичности l и T гармоническая волна (8.20) записывается в виде

$$u(x,t) = a \cos \left(2p \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} + d_1 \right) \right) + b \cos \left(2p \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} + d_2 \right) \right) \quad (8.23)$$

Поскольку функция $u(x,t)$ должна удовлетворять волновому уравнению, то длина волны l , период колебаний T и скорость распространения волны c должны быть связаны некоторым соотношением. Сравнивая (8.23) с (8.16), получаем

$$l = cT. \quad (8.24)$$

Соотношение (8.24) имеет простой физический смысл: за время T имеющееся в какой-либо точке волновое возмущение с одной стороны распространяется на расстояние cT , а с другой стороны это возмущение повторяется через время T в той же самой точке, т.е. величина возмущений совпадает на расстоянии $l = cT$.

Для удобства промежуточных выкладок $u(x,t)$ записывают в комплексной форме ($e^{ij} = \cos(j) + i \sin(j)$):

$$u(x,t) = a e^{i(kx-wt)} e^{iy_1} + b e^{i(kx+wt)} e^{iy_2} = A e^{i(kx-wt)} + B e^{i(kx+wt)}, \quad (8.25)$$

где A, B представляют собой комплексные амплитуды. Конечно, физический смысл имеет только вещественная часть выражения (8.25). Однако, если мы совершаем линейные операции над комплексными волнами (сложение, дифференцирование по t или x , интегрирование и т.д.), то вещественная часть окончательного результата будет равна результату тех же операций над вещественной частью исходных волн. Но с экспонентами оперировать значительно проще, чем с тригонометрическими функциями и поэтому используют комплексное представление гармонических волн. В том случае, когда операции – нелинейны, например, при определении энергии квадратичной по перемещению, надо с самого начала использовать вещественную форму.

Пример 8.3. Рассмотрим для примера **прохождение гармонической волны через границу двух стержней**. Пусть слева на границу падает волна $u_+ = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$. В результате отражения в первой среде будет две волны, идущие к границе и от нее. С учетом сохранения частоты (сохранение частоты, как легко видеть, также следует из граничных условий) смещение в первом стержне записывается в виде

$$u_1 = A(e^{ik_1x} + Ve^{-k_1x}), \quad k_1 = \omega / c_1.$$

От границы вправо во втором стержне может идти только одна уходящая волна

$$u_2 = ZAe^{ik_2x}, \quad k_2 = \omega / c_2$$

Подставляя эти выражения для перемещений в граничные условия

$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0} \quad \text{и} \quad E_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} = E_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=0},$$

получаем

$$\begin{cases} 1 + V = Z, \\ ikE_1(1 - V) = ikE_2, \end{cases}$$

откуда следуют **формулы Френеля**:

$$V = \frac{\sqrt{r_1 E_1} - \sqrt{r_2 E_2}}{\sqrt{r_1 E_1} + \sqrt{r_2 E_2}} = \frac{n - m}{n + m}, \quad Z = 1 + V = \frac{2n}{n + m},$$

где $n = c_1 - c_2$, $m = r_2 - r_1$.

В отсутствие вынуждающей продольной силы стержень колеблется (вибрирует) на собственных частотах, при этом в нем образуется стоячая волна. Найти собственные частоты можно, решая волновое уравнение с соответствующими граничными условиями и предполагая, что в стержне установятся гармонические колебания. Подставляя в волновое уравнение перемещение в виде гармоники, записанной в комплексном виде $u = j(x)e^{-i\omega t}$, получаем уравнение для собственных форм колебаний стержня

$$\frac{d^2 j}{dx^2} + k^2 j = 0 \quad (8.26)$$

с решением

$$j = A \sin(kx) + B \cos(kx). \quad (8.27)$$

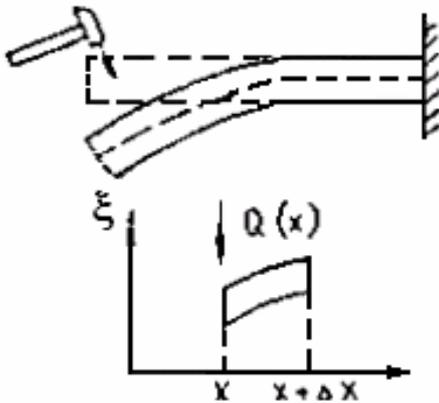
Пример 8.4 В качестве примера продольных собственных колебаний в сплошной среде рассмотрим **вибрацию стержня с абсолютно жесткими границами** (см. рис.). Подставляя в граничные условия $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ функцию (8.27), имеем $B = 0$ и $A \sin(kl) = 0$. Из второго соотношения, полагая, что $A \neq 0$ (иначе $u \equiv 0$), получаем $\sin(kl) = 0$, откуда $kl = n\pi$ ($n = 1, 2, 3$). Следовательно, $k = n\pi / l$ и для стержня набор собственных частот определяется по формуле:

$$\omega_n = kc = n\pi \frac{c}{l}..$$

Так как собственные формы стержня есть $u = A \sin(n\pi \frac{x}{l})$, то легко видеть, что $(n-1)$ – число узлов (точек, где $u = 0$). Случай со свободными границами рассматривается аналогично. Набор частот получается тот же, но число узлов в этом случае равно n .

Рассмотрим теперь **поперечные волны изгиба в стержнях**. Такой вид волн возникает при ударе по стержню в поперечном направлении.

Смещение оказывается перпендикулярным направлению распространения волны, как и должно быть в случае, когда волна – поперечная (см. рис.). Второй закон Ньютона для элемента Δx записывается в виде



$$r S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \Delta x = Q(x + \Delta x) - Q(x) = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x$$

или

$$r S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (8.28)$$

где Q – поперечная {или перерезывающая} сила, равная сумме сдвиговых (касательных) напряжений, действующих в рассматриваемом сечении, перпендикулярном нейтральной оси стержня. Величина Q связана с моментом M уравнением вращения для элемента стержня длиной Δx :

$$Q \Delta x + [M(x + \Delta x) - M(x)] = r I \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} \Delta x.$$

откуда

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} + r I \frac{\partial^2 j}{\partial t^2}. \quad (8.29)$$

Дифференцируя уравнение (8.29) по x и подставляя $\frac{\partial Q}{\partial x}$ из (8.28), получаем ($M = EI \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$)

$$\text{и } j \cong \text{tg}(j) = \frac{\partial x}{\partial x}$$

$$r S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial x^4} = r I \frac{\partial^4 x}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (8.30)$$

Покажем, что в случае длинноволновых возмущений, когда характерная длина волны l значительно больше характерной толщины стержня, стоящий в правой части (8.30) член мал по сравнению с $r S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$. Введем эффективный радиус инерции сечения r , т. ч. $I = r_0^2 S$. Пусть T и l – характерные масштабы изменения x по времени и длине. Тогда:

$$\left(r I \frac{\partial^4 x}{\partial x^2 \partial t^2} \right) / \left(r S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) = (r_0^2 S r x / l^2 T^2) / (r S x / T^2) = \left(\frac{r_0^2}{l} \right) \ll 1,$$

т.к. поперечные размеры стержня r_0 много меньше длины волны l . В этом приближении правой частью в (8.30) можно пренебречь и уравнение для волн изгиба приобретает вид

$$r S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial t^4} = 0. \quad (8.31)$$

Уравнение волн изгиба имеет четвертый порядок по x и для однозначного определения решения необходимо формулировать четыре граничных условия. Например, в случае жестко-зашемленного края смещение и угол поворота равны нулю $x|_{x=1} = 0, \frac{\partial x}{\partial x}|_{x=1} = 0$; для свобод-

но-опертого края момент в сечении и смещение равны нулю $M|_{x=1} = 0$, $x|_{x=1} = 0$ или, с учетом (8.13), $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}|_{x=1} = 0$, $x|_{x=1} = 0$ и, наконец, когда край свободен, момент и перерезывающая сила равны нулю, т.е. $M|_{x=1} = 0$, $Q|_{x=1} = -\frac{\partial M}{\partial x}|_{x=1} = 0$ или, с учетом (8.13), $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}|_{x=1} = 0$, $\frac{\partial^3 x}{\partial x^3}|_{x=1} = 0$.

В отличие от решения (8.16) уравнения продольных волн (8.15), общее решение уравнения поперечных волн изгиба (8.31) уже нельзя представить в виде волн произвольной формы, распространяющихся с постоянной скоростью. Поэтому рассмотрим более простой случай гармонической волны, когда

$$x(x, t) = Af(x)e^{-i\omega t}.$$

Для нее из (8.31) следует

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - k^4 f = 0, \quad \text{где} \quad k = \left(\frac{r}{Er_0^2} \right)^{1/4} \omega^{1/2}. \quad (8.32)$$

Находя общее решение (8.32), получаем

$$x(x, t) = A_+ e^{i(kx - \omega t)} + A_- e^{-i(kx + \omega t)} + B_+ e^{kx - i\omega t} + B_- e^{-kx - i\omega t}.$$

Первые два слагаемых соответствуют волнам, распространяющимся в разные стороны со скоростью

$$C = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{Er_0^2}{r} \right)^{1/4} \omega^{1/2}. \quad (8.33)$$

Из (8.33) следует, что изгибные волны в стержне, в отличие от продольных, обладают дисперсией (зависимостью скорости распространения C от частоты колебаний ω или длины волны l).

8.3. Фазовая и групповая скорости волн

Рассматриваемая нами до сих пор скорость распространения волн на самом деле являлась скоростью перемещения фазы волны, т.е. скоростью перемещения точки, у которой $\omega t \pm kx = const$. Такие скорости называются **фазовыми**, и мы будем их помечать соответствующим индексом f ($C = C_f$). В тех волновых процессах, когда эти скорости оказываются постоянными (не зависящими от частоты для монохроматических волн), форма волны (распределение ее характеристик) по мере ее распространения не меняется, и фазовая скорость совпадает со скоростью перемещения области локализации волновой энергии. При этом частота ω линейно зависит от волнового числа k . Однако, как мы видели в п. 8.2 на примере изгибных волн (см. соотношение (8.33)), такая линейность не всегда имеет место. В случае, когда фазовая скорость зависит от частоты, форма волны при распространении меняется, т.е. имеет место **дисперсия**. Для немонохроматических волн, представляющих собой, согласно теореме Фурье, суперпозицию монохроматических волн, каждая из которых перемещается, вообще говоря, со своей скоростью, необходимо ввести новое понятие – **групповую скорость** – **скорость группы монохроматических волн, движущейся как целое в окрестности рассматриваемого промежутка времени и характеризующей скорость распространения полной энергии волны**. При выводе соотношения, определяющего групповую скорость C_g , предположим для простоты, что группа волн состоит из двух монохроматических волн, имеющих фазовые скорости C_f и $C_f + dC_f$ и длины волн l и $l + dl$. За скорость перемещения волн в целом (групповую скорость) C_g примем скорость какой-либо ее характерной точки,

например, максимума. Условием образования максимума при наложении волн в точке x и в момент времени t будет равенство фаз (или их отличие на $2\pi n, n = 0, \pm 1, \mathbf{K}$)

$$\frac{C_f t - X}{l} = \frac{(C_f + dC_f) t - X}{l + dl},$$

из которого следует зависимость от времени координаты максимума:

$$X(t) = t \left(C_f - l \frac{dC_f}{dl} \right) = t \frac{d(C_f k)}{dk} = t \frac{d(C_f k)}{dk} = t \frac{dw}{dk},$$

отсюда, дифференцируя по t , получим скорость движения точки максимума, которая и является в данном случае групповой скоростью C_g :

$$C_g = C_f - l \frac{dV_f}{dl} = \frac{dw}{dk}. \quad (8.34)$$

Из полученного соотношения (8.34), в частности, следует, что, как уже отмечалось, при линейной зависимости $w = w(k)$ групповые и фазовые скорости совпадают, т.к. все входящие в группу волн гармоника имеют одинаковую фазовую скорость $C = \frac{w}{k} = const$, с которой и

движется вся волна в целом, не изменяя своей формы.

Пример 8.5. В случае изгибных волн в стержне найдем групповую скорость, используя (8.32) и (8.34):

$$C_g = \left. \frac{dw}{dk} \right|_0 = 1 / \frac{dk}{dw} = 1 / \frac{d}{dw} \left[\left(\frac{r}{Er_0^2} \right)^{1/4} w^{1/2} \right] = \left(\frac{Er_0^2}{r} \right)^{1/4} / \frac{d}{dw} (w^{1/2}) = 2 \left(\frac{Er_0^2}{r} \right)^{1/4} w^{1/2} = 2 \frac{w}{k} = 2C_f$$

Следовательно, групповая скорость изгибных волн в стержне вдвое больше фазовой.

ВОПРОСЫ

1. Что такое упругое тело?
2. К каким двум видам можно свести все разнообразие деформаций твердых тел?
3. Каковы основные законы описания упругого деформирования изотропного твердого тела? Сформулируйте законы Гука и Пуассона.
4. Сформулируйте принцип суперпозиции для упругой среды. Следствием чего он является?
5. Что такое чистый сдвиг? Сформулируйте закон Гука для сдвига.
6. Напишите закон Гука в дифференциальной форме.
7. Какие деформации твердых тел называются однородными?
8. Что такое стержень и балка? Опишите виды деформаций стержня (растяжение, кручение, изгиб).
9. Каков физический смысл волнового числа и как оно связано с длиной волны?
10. Дайте определение продольной волны.
11. Как возбуждаются продольные волны в стержнях? Выпишите волновое уравнение упругих продольных колебаний в стержне.
12. Определите собственные частоты продольных колебаний стержня с абсолютно жесткими границами.
13. Когда возбуждаются поперечные волны изгиба в стержнях? Выпишите уравнение для упругих волн изгиба.
14. Что такое дисперсия? Как связаны между собой фазовая и групповая скорости волн?