



**КОРОЛЕВСКИЙ ИНСТИТУТ
УПРАВЛЕНИЯ, ЭКОНОМИКИ И СОЦИОЛОГИИ**

Утверждаю
Проректор по учебной работе КИУЭС
В.В. Котрин

« _____ » _____ 2007 г.

Кафедра математики и естественнонаучных дисциплин

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
(курс лекций)**

Острик А.В. Аналитическая механика: Курс лекций. - Королев: КИУЭС, 2007, 44 с.

Рецензент: д. ф. - м. н. Грязнов В.К.

Предлагаемое учебное пособие представляет собой краткое изложение курса лекций, прочитанных студентам КИУЭС по специальности 22020165 «Управление и информатика в технических системах». Целью курса является начальное ознакомление студентов с общими идеями, принципами и законами аналитической механики. Особенностью работы является широкое использование величин с индексами и правила суммирования по повторяющимся индексам, что существенно сокращает объем и делает выкладки более обзорными. Каждый раздел курса приблизительно соответствует материалу нескольких (от одной до трех) лекций.

РЕКОМЕНДОВАНО

Учебно-методическим
советом КИУЭС
Протокол № 9 от 20 июня 2007 г.

Курс лекций рассмотрен и
одобрен на заседании кафедры
математики и естественнонаучных
дисциплин.
Протокол № 7 от 04.04.2007 г

Зав. кафедрой математики и
естественнонаучных дисциплин
д. ф. - м. н., профессор Борисов В.Ф.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью настоящего курса лекций является начальное ознакомление студентов с общими идеями, принципами и законами аналитической механики. В соответствии с принципом разумной достаточности [18] ставится задача упростить изложение аналитической механики настолько, насколько это возможно, чтобы все еще достаточно полно изложить суть предмета. В связи с этим в качестве объектов изучения рассматриваются только системы материальных точек с нестационарными, голономными, удерживающими связями.

По аналитической механике написано много хороших книг, и предлагаемый краткий курс ни в коей мере не может их заменить. Однако при подготовке к экзаменам у студентов нет времени работать с большими объемами литературы в поисках ответов на поставленные программой вопросы. В этих условиях полезно иметь под руками краткое изложение основ аналитической механики, представленных с единых методических позиций и в одной системе обозначений.

Особенностью курса является широкое использование величин с индексами и правила суммирования по повторяющимся индексам, что существенно сокращает объем и делает выкладки более обозримыми.

Курс лекций читался студентам второго курса КИУЭС (группы УИ-02, УО-02), уже знакомым с механикой систем свободных материальных точек и абсолютно твердого тела в объеме курса Механика - I.

Автор надеется, что учебное пособие окажется полезным для студентов, и с интересом ждет отзывов, пожеланий, замечаний и предложений.

Изучение предлагаемого учебного пособия по аналитической механике, конечно же, недостаточно для ее глубокого усвоения. Для дальнейшего изучения рассматриваемых вопросов может оказаться полезной приводимая ниже литература.

I. ВВЕДЕНИЕ

Основным объектом изучения аналитической механики является несвободная (с наложенными связями) система материальных точек и твердых тел. Если движения – несвободны, то в уравнения второго закона Ньютона необходимо добавить подлежащие определению силы реакции со стороны связей, что существенно осложняет получение решений конкретных задач механики. С другой стороны, наличие связей ограничивает число степеней свободы системы, а значит, уменьшает порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей ее поведение. Основная задача аналитической механики и заключается в разработке методов, позволяющих описать поведение механической системы системой дифференциальных уравнений, не содержащих неизвестных реакций связи и имеющих наименьший возможный порядок. Таким образом, ставится задача максимального учета особенностей поведения системы, порождаемых наложенными связями.

Далее с целью упрощения будут рассматриваться системы, состоящие только из материальных точек (м.т.), на которые наложены голономные, удерживающие и, в общем случае, нестационарные связи (классификацию связей см. далее).

1.1. Классификация связей и обозначения

Связями называются ограничения, накладываемые на координаты и скорости м.т. механической системы. Математически связи выражаются в виде уравнений или неравенств, содержащих время, координаты и скорости точек. **Связи называются голономными, если они могут быть записаны в виде соотношений, не содержащих производных от координат** (в противном случае связи являются неголономными, т.е. неинтегрируемыми). В том случае, когда уравнения связей не содержат явной зависимости от времени, связь называется стационарной (соответственно, при наличии этой зависимости – нестационарной). В наиболее общем виде нестационарные голономные связи описыва-

ются системой нелинейных уравнений (m – число наложенных на систему м.т. связей; N – число м.т. в механической системе):

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \bullet \\ f_m(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Если число точек N , а число связей m , то число степеней свободы s (число независимых параметров, которыми полностью задается конфигурация системы) равняется:

$$s = 3N - m.$$

Таким образом, индексы, характеризующие отдельные элементы (связи, м.т., их координаты, их независимая совокупность координат и т.д.) рассматриваемой системы материальных точек (СМТ), могут изменяться: от 1 до m (например, номера связей); от 1 до N (например, номера м.т. или индексы их радиус - векторов); от 1 до $3N$ (например, номера подряд занумерованных координат или проекций скоростей точек м.т., см. ниже), от 1 до s (например, номера независимых параметров – обобщенных координат – полностью характеризующих конфигурацию системы). Для того чтобы каждый раз не писать пределы изменения, закрепим их за определенными индексами:

$$\alpha = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3; k = 1, \dots, s; n = 1, \dots, s; l = 1, \dots, s; \nu = 0, \dots, 2s; i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, 3N; \rho = 1, \dots, m.$$

Кроме того, для сокращения обозначений, будем считать, что если индексы где-то написаны, то он пробегает все соответствующие ему значения. Например,

$$f_\rho(\vec{r}_i) = f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \dots, f_m(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

В тех немногочисленных случаях, когда индекс требуется фиксировать, будем ставить ограничительную черту справа от переменной с индексом. Например, $f(\vec{r}_i|)$ означает функцию от радиус-вектора i -ой точки.

При применении индексных обозначений оказывается удобным занумеровать координаты м.т. и проекции, характеризующих их векторов единым образом, например,

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}) = (x_j),$$

$$(\vec{F}_i) = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, \dots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz}) = (F_1, \dots, F_{3N}) = (F_j)$$

Используя принятые соглашения, довольно громоздкую систему уравнений (1.1) можно записать в одном из следующих видов:

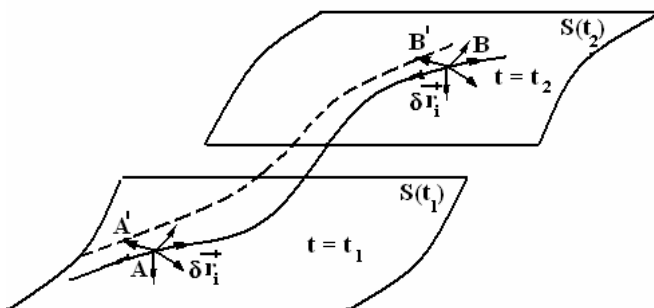
$$f_\rho(\vec{r}_i, t) = 0, \quad f_\rho(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad f_\rho(x_j, t) = 0. \quad (1.2)$$

И, наконец, в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем пользоваться правилом Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся индексу, например:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{i=N} a_i b_i, \quad a_j b_j = \sum_{j=1}^{j=3N} a_j b_j, \quad a_j b_j| \neq \sum_{j=1}^{j=3N} a_j b_j.$$

1.2. Виртуальные перемещения и вариации координат

Виртуальными перемещениями $\delta \vec{r}_i$ называются бесконечно малые перемещения материальных точек системы, удовлетворяющие наложенным на нее связям, в фиксированный момент времени. Виртуальными такие перемещения называются потому, что они не предполагают наличия движения, а являются воображаемыми изменениями конфигурации СМТ, удовлетворяющими



удовлетворяющие наложенным на нее связям, в фиксированный момент времени. Виртуальными такие перемещения называются потому, что они не предполагают наличия движения, а являются воображаемыми изменениями конфигурации СМТ, удовлетворяющими

ми условиям связи (1.1). Например, пусть условия связи задают, что рассматриваемая $i^{\text{аб}}$ м.т. должна в любой момент времени находиться на некоторой деформирующейся, движущейся поверхности $S(t)$. Тогда истинное движение м.т. может описываться кривой AB , а виртуальные перемещения $\delta \vec{r}_i$ в моменты времени $t=t_1, t_2$ стрелочками, как показано на рисунке. Таким образом, виртуальные перемещения, в отличие от истинных перемещений не есть функции времени. Однако из виртуальных перемещений в каждый момент времени можно выбрать такие, что в совокупности они составят некоторую непрерывную виртуальную траекторию $\tilde{x}_i(t), \tilde{y}_i(t), \tilde{z}_i(t)$ (она показана на рисунке пунктирной линией $A'B'$), которая удовлетворяет наложенным на м.т. связям, но ее координаты отличается от координат истинного движения точки $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$ на бесконечно малые величины:

$$\begin{cases} \delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t), \\ \delta y_i(t) = \tilde{y}_i(t) - y_i(t), \\ \delta z_i(t) = \tilde{z}_i(t) - z_i(t), \end{cases}$$

называемые вариациями координат. Отметим, что вариации координат уже являются функциями времени. Мы рассматривали варьирование координат фиксированной $i^{\text{об}}$ материальной точки, но во многих случаях оказывается полезным одновременное изменение всей совокупности координат СМТ, т.е. варьирование траектории в многомерном ($3N$ -мерном) пространстве

$$\delta x_j(t) = \tilde{x}_j(t) - x_j(t).$$

Таким образом, **вариация координат есть бесконечно малое приращение координат точек СМТ от истинного движения к виртуальному, допускаемому связями.**

Введенное понятие вариации позволяет применять широко используемый в аналитической механике метод варьирования функций, зависящих от координат СМТ и времени. Пусть задана некоторая функция координат $f(x_j, t)$, тогда согласно формуле Тейлора вариация этой функции определяется соотношением:

$$\delta f(x_j, t) = f(x_j + \delta x_j, t) - f(x_j, t) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_j. \quad (1.3)$$

Поскольку полный дифференциал функции $f(x_j, t)$ равняется $df(x_j, t) = \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial t} dt$, то он отличается от вариации лишь слагаемым $\frac{\partial f}{\partial t} dt$ и мы можем написать

$$\delta f = df \Big|_{dx_j = \delta x_j}^{dt=0}. \quad (1.4)$$

1.3. Обобщенные координаты и скорости

Используя понятие вариации функции координат и времени, накладываемые на виртуальные перемещения ограничения, которые обусловлены связями (1.1), теперь можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_j = 0. \quad (1.5)$$

В соответствии с (1.5) среди $3N$ вариаций координат, задающих положение материальных точек механической системы N м.т., только $s = 3N - m$ оказываются независимыми. Поскольку **число независимых величин, задание которых полностью определяет конфигурацию СМТ (положение всех ее точек), называется числом степеней свободы**, то в данном случае при наложении на механическую систему m связей оно оказывается равным s . Очевидно, что параметры, задающие конфигурацию СМТ, не обязательно

должны быть декартовыми координатами м.т. Любые s величин q_k , полностью характеризующие положение м.т. системы с s степенями свободы, называются обобщенными координатами, и могут быть с успехом использованы для описания поведения СМТ. Соответственно, производные по времени от обобщенных координат \dot{q}_k (в дальнейшем, где это оказывается удобным, мы будем полную производную по времени обозначать точкой сверху дифференцируемой функции) называются обобщенными скоростями. В общем случае многомерное (размерностью s) пространство, образованное совокупностью обобщенных координат СМТ q_k называется конфигурационным.

Обобщенные координаты уже оказываются независимыми, несмотря на то, что на СМТ наложены внешние связи. Кроме того, их меньше, чем координат м.т. на число связей m . Поэтому постановка и решение задач механики для СМТ со связями в обобщенных координатах упрощается (особенно в том случае, когда размерность конфигурационного пространства невелика). Однако задание для СМТ обобщенных координат в некоторый момент времени не определяет динамику развития механической системы в последующие моменты. Как следует из опыта, только одновременное задание обобщенных координат и скоростей позволяет предсказать дальнейшую эволюцию СМТ. С точки зрения математической постановки задачи это означает, что должны существовать уравнения, позволяющие по значениям обобщенных координат и скоростей рассчитать вторые производные \ddot{q}_k (получение последующих производных уже не является проблемой, т.к. соответствующие уравнения для них могут быть найдены дифференцированием по времени уравнений для определения вторых производных). Вывод этих уравнений, называемых уравнениями движения, и является одной из основных задач аналитической механики.

Поскольку по своему определению обобщенные координаты полностью задают конфигурацию СМТ, то по ним могут быть однозначно рассчитаны декартовы координаты м.т., т.е. должны существовать функциональные зависимости (уравнения преобразования)

$$x_j = x_j(q_k, t). \quad (1.6)$$

Отметим, что по своему математическому смыслу эти функциональные зависимости – есть просто параметрическое представление (q_k -параметры) решения системы уравнений связей (1.2), и, если связи стационарны, то время, отсутствуя в (1.2), не будет явно входить и в (1.6). Обратное преобразование

$$q_k = q_k(x_j, t). \quad (1.7)$$

может быть неоднозначным в некоторых точках (x_j) . Например, если м.т. движется согласно наложенным связям вдоль некоторой самопересекающейся кривой, то в точках ее пересечения обобщенная координата (в качестве нее может быть взято расстояние вдоль кривой, как при естественном способе задания движения в первой задаче кинематики) принимает столько значений сколько раз происходит самопересечение. Предельным случаем этого примера является движение м.т. по замкнутой кривой, где любая точка этой кривой обладает столькими значениями обобщенной координаты, сколько полных оборотов совершила м.т.

В конкретных случаях выбор обобщенных координат подсказывается видом связей, ограничивающих свободу движения СМТ. Число степеней свободы s также может быть найдено следующим способом. Если СМТ не имеет возможности менять свою конфигурацию, то $s = 0$. При возможности движения фиксируется одна из декартовых координат той м.т., которая способна эту координату менять. Если дальнейшее изменение конфигурации невозможно, то $s = 1$. Иначе опять фиксируем одну из координат одной из оставшейся подвижной м.т. и т.д., пока не определится s (очевидно, что этот процесс закончится, т.к. число степеней свободы СМТ не может неограниченно расти, будучи не больше $3N$).

II. ПРИНЦИПЫ ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

2.1. Принцип Лагранжа

Принцип Лагранжа (идея принципа принадлежит Э. Торричелли, а его обобщение на случай неудерживающих связей – М.В. Остроградскому) формулируется для несвободных СМТ, находящихся в равновесии. Необходимым и достаточным условием равновесия СМТ с наложенными связями является система $3N$ уравнений

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \quad (2.1)$$

или, используя единую нумерацию компонент векторов сил, приложенных к м.т.,

$$F_j + R_j = 0, \quad (2.2)$$

где \vec{F}_i – суммарный вектор заданных (активных) сил, приложенных к $i^{\text{ой}}$ материальной точке; \vec{R}_i – суммарный вектор сил реакции связей, приложенных к $i^{\text{ой}}$ материальной точке. Умножим каждое из уравнений (2.8) на соответствующее виртуальное перемещение $\delta \vec{r}_i$ и просуммируем полученные равенства

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.3)$$

Поскольку каждое слагаемое $\vec{F}_i \delta \vec{r}_i$ и $\vec{R}_i \delta \vec{r}_i$ в левой части (2.3) представляет собой работу соответствующих сил, приложенных к $i^{\text{ой}}$ м.т. на виртуальном перемещении $\delta \vec{r}_i$, то ее называют виртуальной работой и, следовательно, **сумма виртуальных работ заданных сил и сил реакции для СМТ, находящихся в равновесии, равна нулю.**

Так как связи в данном случае учитываются силами реакциями, то последние можно включить в заданные, считая все точки свободными (удовлетворение условиям связи будет обеспечено силами реакции), тогда перемещения становятся независимыми и из (2.3) следует (2.1). Поэтому равенство нулю суммарной виртуальной работы (2.3) является необходимым и достаточным условием равновесия СМТ.

Условие (2.3) – неудобно, т.к. содержит неизвестные силы реакции. Попытаемся их исключить, накладывая на связи в СМТ дополнительные требования. Разложим каждую из сил реакции на нормальную \vec{N}_i и тангенциальную \vec{T}_i . (силу трения) составляющие

$$\vec{R}_i = \vec{N}_i + \vec{T}_i \quad (2.4)$$

и подставив в (2.3), получим (учтено, что в силу перпендикулярности \vec{N}_i и $\delta \vec{r}_i$ сумма $\vec{N}_i \delta \vec{r}_i = 0$)

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{T}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь идеальные связи, в которых по определению силы трения отсутствуют (более общим является требование, что работа сил реакции, создаваемых идеальными связями, на виртуальных перемещениях не совершается). Тогда второе слагаемое в (2.5) обращается в ноль, и мы получаем **принцип виртуальных перемещений Лагранжа: виртуальная работа заданных сил, приложенных к механической системе с идеальными связями и находящейся в равновесии, равна нулю**

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.6)$$

Используя единую нумерацию компонент векторов из (2.6) получаем принцип виртуальных перемещений в виде

$$F_j \delta x_j = 0. \quad (2.7)$$

Теперь из (2.7) уже не могут быть получены условия равновесия (2.2), т.к. δx_j не являются независимыми. Однако независимыми являются обобщенные координаты q_k и для них из (1.6) и (2.7) получаем

$$F_j \delta x_j = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \delta q_k = 0. \quad (2.8)$$

Вводя обозначение для обобщенной силы Q_k , равной

$$Q_k = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \quad (2.9)$$

из (2.8) находим математическую формулировку принципа виртуальных перемещений Лагранжа в обобщенных координатах

$$Q_k \delta q_k = 0. \quad (2.10)$$

В принципе виртуальных перемещений (2.10) все обобщенные виртуальные перемещения $\delta q_k = 0$. – уже независимы, и из него следует система уравнений равновесия механической системы

$$Q_k = 0. \quad (2.11)$$

Компоненты обобщенных силы Q_k , определяемые равенством (2.9), являются обобщением понятия компонент механической силы. В зависимости от соответствующей ей обобщенной координаты δq_k сила Q_k может иметь различный физический смысл. В частности, ее размерность не фиксирована, а определяется по формуле (это следует из того что $Q_k \delta q_k$ имеет размерность работы δA ; в данном случае скобки означают размерность физической величины, в них заключенной)

$$[Q_k] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_k]}. \quad (2.12)$$

Например, из (2.12) получаем, что если обобщенная координата – угол (величина безразмерная), то размерность обобщенной силы совпадает с размерность момента силы (Дж=н×м). Так в случае бесконечно малого поворота тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, работа равняется произведению проекции на ось вращения суммарного момента действующих сил на угол поворота.

Отметим, что обобщенные силы в конкретных задачах удобнее рассчитывать не по соотношению (2.9), а на основе выражения работы сил

$$\delta A = Q_k \delta q_k. \quad (2.13)$$

Согласно (2.13) обобщенная сила равняется коэффициенту при вариации обобщенной координаты в выражении возможной работы. Поэтому достаточно посчитать работу при изменении конфигурации СМТ в результате бесконечно малого приращения только одной $k^{\text{ой}}$ обобщенной координаты на δq_k . Работа окажется пропорциональной этому приращению, а коэффициент пропорциональности равным искомой обобщенной силе Q_k .

В случае потенциальных сил также упрощается определение величин Q_k . Так как компоненты силы определяются дифференцированием потенциальной энергии $U(x_j)$

$$F_j = - \frac{\partial U}{\partial x_j},$$

то из (2.9) получаем

$$Q_k = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k}. \quad (2.14)$$

В соответствии с (2.11) и (2.14) условия равновесия СМТ в случае действия только потенциальных сил записываются в виде необходимых условий экстремума функции потенциальной энергии

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0. \quad (2.15)$$

В заключение отметим, что полученные уравнения равновесия, вообще говоря, справедливы только в случае голономных, стационарных, идеальных связей. Однако требование идеальности может быть несколько ослаблено. Если связи неидеальны, но силы трения выражаются через нормальные компоненты сил реакции связей, как это имеет место в случае сухого трения, то эти силы трения можно включить в заданные, а связи считать по-прежнему идеальными

2.2. Принцип Даламбера – Лагранжа

Дифференциальные уравнения движения несвободной СМТ могут быть представлены в форме уравнений равновесия. Впервые возможность этого представления была отмечена Даламбером. На основе подхода Даламбера полученные в предыдущем разделе условия равновесия СМТ могут быть обобщены на случай движения.

Для N материальных точек второй закон Ньютона в векторном представлении имеет вид

$$m_i \vec{a}_i | = \vec{F}_i + \vec{R}_i = 0, \quad (2.16)$$

где m_i , $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$ – масса и вектор ускорения $i^{\text{ой}}$ точки системы. Введем даламберовы силы инерции по формулам

$$\vec{F}_i^{\text{ин}} = -m_i \vec{a}_i |. \quad (2.17)$$

Тогда из (2.16), (2.17) получаем систему уравнений движения в виде условий равновесия сил, приложенных к м.т. механической системы

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{F}_i^{\text{ин}} = 0. \quad (2.18)$$

Представление уравнений движения СМТ в виде (2.18) составляет **содержание принципа Даламбера: если к заданным силам и силам реакции связей движущейся СМТ добавить силы инерции, то в каждый момент времени такая система сил будет уравновешенной**. Конечно, в действительности механическая система не находится в равновесии, утверждается лишь, что уравновешивается совокупность трех видов сил. Принцип Даламбера оказывается полезным в задачах, где требуется определить реакции связей в движущихся механических системах. Но кроме практических применений он играет роль связующего звена между принципом виртуальных перемещений в статике (принципом Лагранжа) и принципом виртуальных перемещений в динамике (принципом Даламбера – Лагранжа).

Так же, как и в случае статики (см. предыдущий подраздел), из условий равновесия (2.18) получим принцип виртуальных перемещений, но теперь он уже будем сформулирован для движущейся системы. Умножим каждое из уравнений (2.18) на соответствующее виртуальное перемещение $\delta \vec{r}_i$ и просуммируем полученные равенства

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \delta \vec{r}_i + \vec{F}_i^{\text{ин}} \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.19)$$

В случае идеальных связей, когда работа сил реакции на виртуальных перемещениях не совершается $\vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$, из (2.19) получаем **принцип Даламбера–Лагранжа: в любой момент времени движения механической системы с идеальными связями алгебраическая сумма виртуальных работ заданных и даламберовых сил инерции равна нулю**

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{F}_i^{\text{ин}} \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.20)$$

Принцип Даламбера – Лагранжа является одним из наиболее общих вариационных принципов классической механики и может быть использован в качестве ее основной аксиомы. Так же, как и принцип Лагранжа в статике, он может быть обобщен на тот случай неидеальных связей, когда тангенциальные составляющие сил реакций \vec{T}_i , будучи известными (например, для сухого трения они выражаются через нормальные), включаются в набор заданных сил. С учетом таких заданных сил трения принцип Даламбера – Лагранжа принимает вид

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{T}_i \delta \vec{r}_i + F_i^{in} \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.21)$$

или в покомпонентной записи

$$F_j \delta x_j + T_j \delta x_j + F_j^{in} \delta x_j = 0. \quad (2.22)$$

III. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

3.1. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Даламбера – Лагранжа

Из общего вариационного принципа Даламбера-Лагранжа следуют уравнения динамики СМТ в обобщенных координатах, называемые уравнениями Лагранжа. Суть вывода этих уравнений заключается в замене в уравнениях принципа Даламбера – Лагранжа (2.20) (во втором слагаемом пришлось использовать знак суммы, т.к. индекс i входит в слагаемые трижды):

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.1)$$

декартовых координат м.т. на обобщенные по формулам преобразования (1.6).

Получим предварительно для этих преобразований несколько полезных соотношений. Расписывая полную производную по времени от любой координаты м.т.

$$\dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t} \quad (3.2)$$

и дифференцируя ее по обобщенной скорости \dot{q}_k , получаем

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad (3.3)$$

т.е. у производной $\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k}$ можно убирать точки (полные производные по времени) сверху и

снизу одновременно.

Продифференцируем (3.2) по обобщенной координате q_n ($n=1, \dots, s$)

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n} = \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_n} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_n} \quad (3.4)$$

и просто распишем полную производную по времени от частной производной декартовой координаты м.т. по обобщенной координате

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_n} \right) = \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_n \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_n \partial t}. \quad (3.5)$$

Правые части равенств (3.4), (3.5) совпадают, следовательно, полную производную по времени и частную по обобщенной координате можно переставлять местами

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_n} \right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n}. \quad (3.6)$$

Перейдем теперь непосредственно к выводу уравнений движения Лагранжа. Первая сумма в (3.1) может быть представлена через обобщенные силы, аналогично тому, как это было сделано в статике СМТ для принципа виртуальных перемещений Лагранжа

$$(Q_k = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k})$$

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i = F_j \delta x_j = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \delta q_k = Q_k \delta q_k. \quad (3.7)$$

Запишем теперь вторую сумму в (3.1) в виде:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right) \delta q_k$$

и, используя (3.3), (3.6), преобразуем слагаемое для компоненты x_i (для компонент y_i, z_i преобразования аналогичны; суммирования по i в этом преобразовании ррр):

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} &= m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \right) = m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \left(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \left(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} \right)}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{ix}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_{ix}}{\partial q_k}, \end{aligned}$$

где T_{ix} – часть кинетической энергии $i^{\text{ой}}$ м.т., обусловленная составляющей скорости по оси x . Поскольку для компонент y_i, z_i преобразования аналогичны, то имеем для второй суммы (3.1) следующее выражение через кинетическую энергию СМТ:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right) \delta q_k = \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \sum_{i=1}^N (T_{ix} + T_{iy} + T_{iz}) \delta q_k = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В результате из (3.1), (3.7), (3.8) получаем

$$\left(Q_k - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \right) \delta q_k = 0$$

и, так как вариации обобщенных координат δq_k – независимы, то написанная сумма обращается в нуль лишь при нулевых коэффициентах при них. Откуда получаем систему уравнений движения в Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \quad (3.9)$$

Так как при выводе уравнений Лагранжа использовались достаточно общие нестационарные преобразования координат (1.6), которые могут рассматриваться не только как переход к обобщенным координатам, но и как переход к другой системе отсчета, в общем случае неинерциальной, то весьма замечательным оказывается тот факт, что вид этих уравнений один и тот же (в него явно не входят функции преобразования). Таким образом, мы получили уравнения движения инвариантные по отношению к выбору систем отсчета и параметров, описывающих конфигурацию СМТ (в частности, систем координат). Такой высокий уровень инвариантности делает уравнения Лагранжа весьма полезными при исследованиях механических систем.

3.2. Уравнения Лагранжа для обобщенно – потенциальных сил

Если действующие на СМТ силы – потенциальны, то согласно (2.14)

$$Q_k = -\frac{\partial U(q_k, t)}{\partial q_k} \quad (3.10)$$

и уравнения Лагранжа (3.9) записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$$

или, перенося все в левую часть и учитывая независимость потенциальной энергии от обобщенных скоростей

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} = 0.$$

Из последнего соотношения видно, что поведение СМТ с потенциальными силами определяется разностью кинетической и потенциальной энергий, называемой функцией Лагранжа или лагранжианом

$$L = L(\dot{q}_l, q_n, t) = T - U. \quad (3.11)$$

Следовательно, уравнения Лагранжа в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (3.12)$$

Как видно из вывода уравнений (3.12), они могут быть получены и в том случае, когда обобщенные силы определяются более общим соотношением, чем (3.10)

$$Q_k = Q_k(\dot{q}_l, q_n, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U(\dot{q}_l, q_n, t)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U(\dot{q}_l, q_n, t)}{\partial q_k}. \quad (3.13)$$

Это соотношение переходит в (3.10), когда введенная функция обобщенного потенциала $U(\dot{q}_k, q_k, t)$ не зависит от обобщенных скоростей.

Таким образом, уравнения Лагранжа (3.12) и вид лагранжиана (3.11) остаются верными и для случая обобщенно-потенциальных сил. Как будет показано в следующем подразделе, обобщенный потенциал удастся построить для зависящих от скорости электромагнитных сил Лоренца и сил инерции, вводимых при рассмотрении неинерциальных систем отсчета. Вне описания в рамках уравнений (3.11) оказываются только диссипативные силы, рассеивающие механическую энергию, которые могут быть учтены обобщенными непотенциальными силами Q_k^* . Как следует из (3.9) и вывода (3.12), в этом наиболее общем случае, уравнения Лагранжа записываются, как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^*. \quad (3.14)$$

3.3. Функция Лагранжа для различных механических систем

Прежде всего, отметим, что функция Лагранжа задается неоднозначно. Ее неоднозначность следует уже из того факта, что входящая в нее функция потенциальной энергии определена с точностью до константы. Однако неоднозначность задания лагранжиана этим не ограничивается. Легко видеть, что прибавление к нему любой функции времени $\psi(t)$ или полной производной по времени от любой функции координат $\chi(\dot{q}_k)$ не изменяет уравнений движения (3.14):

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L+\psi(t))}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(L+\psi(t))}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}. \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L+\chi(q_k))}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(L+\chi(q_k))}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L+\frac{\partial \chi}{\partial q_n} \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(L+\frac{\partial \chi}{\partial q_n} \dot{q}_n)}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \\
& + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_n \partial q_k} \dot{q}_n = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_n \partial q_k} \dot{q}_n - \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_n \partial q_k} \dot{q}_n = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь структуру входящих в лагранжиан обобщенного потенциала и кинетической энергии СМТ. Так как, согласно (3.13), обобщенно-потенциальная сила не зависит от ускорений, то обобщенный потенциал может быть лишь линейной функцией скоростей (здесь и в дальнейшем числовые индексы у величин T , U означают максимальную степень обобщенной скорости, от которой зависит соответствующее слагаемое):

$$U = U(q_k, \dot{q}_k, t) = b_n(q_k, t) \dot{q}_n + U_0(q_k, t) = U_1 + U_0. \quad (3.15)$$

Общее выражение для кинетической энергии получается в виде:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial q^k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial z_i}{\partial q^k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{2} \sum_i^{3N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^k} \frac{\partial x_i}{\partial q^n} + \frac{\partial y_i}{\partial q^k} \frac{\partial y_i}{\partial q^n} + \frac{\partial z_i}{\partial q^k} \frac{\partial z_i}{\partial q^n} \right) \dot{q}_k \dot{q}_n + \sum_i^{3N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q^k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q^k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \\
&+ \frac{1}{2} m_i \left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} a_{kn}(q_l, t) \dot{q}_k \dot{q}_n + a_k(q_l, t) \dot{q}_k + a(q_l, t) = T_2 + T_1 + T_0,
\end{aligned} \quad (3.16)$$

где введены обозначения для коэффициентов (коэффициенты $a_{kn}(q, t)$ называются коэффициентами инерции системы):

$$\begin{aligned}
a_{kn}(q, t) &= \sum_i^{3N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^k} \frac{\partial x_i}{\partial q^n} + \frac{\partial y_i}{\partial q^k} \frac{\partial y_i}{\partial q^n} + \frac{\partial z_i}{\partial q^k} \frac{\partial z_i}{\partial q^n} \right), \\
a_k(q, t) &= \sum_i^{3N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q^k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q^k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right), \\
a(q, t) &= \frac{1}{2} m_i \left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right).
\end{aligned} \quad (3.17)$$

Таким образом, согласно (3.16), (3.17), в общем случае кинетическая энергия оказывается квадратичной функцией обобщенных скоростей, коэффициенты в которой зависят от обобщенных координат и времени. Легко видеть, что в случае стационарных связей кинетическая энергия становится уже однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими лишь от обобщенных координат (коэффициенты $a_k(q_l, t)$, $a(q_l, t)$ зануляются)

$$T = \frac{1}{2} a_{kn}(q_l) \dot{q}_k \dot{q}_n = T_2. \quad (3.18)$$

Поскольку любая квадратичная форма приводится к диагональному виду, то при соответствующем выборе обобщенных координат кинетическая энергия записывается в виде суммы квадратов обобщенных скоростей умноженных на коэффициенты инерции:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s a_{kk}(q_l) \dot{q}_k^2. \quad (3.19)$$

Из полученных соотношений следует, что для СМТ с обобщенно-потенциальными силами при нестационарных связях лагранжиан имеет вид

$$L = L(\dot{q}_k, q_k, t) = \frac{1}{2} a_{kn}(q_l, t) \dot{q}_k \dot{q}_n + a_k(q_l, t) \dot{q}_k + a(q_l, t) - b(q_k, t) \dot{q}_n - U_0(q_k, t) = T_2 + T_1 + T_0 - U_1 - U_0.$$

Если же связи стационарны, а обобщенно-потенциальные силы не зависят явно от времени, то выражение для лагранжиана существенно упрощается

$$L = L(\dot{q}_k, q_l) = \frac{1}{2} a_{kn}(q_l) \dot{q}_k \dot{q}_n - b_n(q_k) \dot{q}_n - U_0(q_k) = T_2 - U_1 - U_0. \quad (3.20)$$

Покажем, что к обобщенно-потенциальным сводятся электромагнитные силы, построив для них обобщенный потенциал. На м.т., имеющую заряд q_{el} , действует сила Лоренца F_L равная (индексом el помечаются переменные, относящаяся к электромагнетизму, т.к. в нашем курсе механики некоторые из них обозначают другую физические величины)

$$\vec{F}_L = q_{el} \vec{E}_{el} + q_{el} [\vec{V}, \vec{B}_{el}], \quad \vec{E}_{el} = -grad(\varphi_{el}) - \frac{\partial \vec{A}_{el}}{\partial t}, \quad \vec{B}_{el} = rot(\vec{A}_{el}), \quad (3.21)$$

где \vec{E}_{el} , \vec{B}_{el} – силовые характеристики электромагнитного поля, а $\varphi_{el}(\vec{r}, t)$, $\vec{A}_{el}(\vec{r}, t)$ – его скалярный и векторный потенциалы. Докажем, что в качестве обобщенного потенциала может быть взята функция $x^{оii}$ составляющей электромагнитной силы:

$$U = q_{el} \varphi_{el} - q_{el} \vec{A}_{el} \vec{V}. \quad (3.22)$$

На самом деле, из (3.13), (3.21), (3.22) получаем для $x^{оii}$ составляющей электромагнитной силы:

$$\begin{aligned} F_{Lx} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (q_{el} \varphi_{el} - q_{el} (A_{elx} \dot{x} + A_{elx} \dot{y} + A_{elx} \dot{z}))}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial (q_{el} \varphi_{el} - q_{el} \vec{A}_{el} \vec{V})}{\partial x} = \\ &= q_{el} \left(-\frac{dA_{elx}}{dt} - \frac{\partial \varphi_{el}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}_{el}}{\partial x} \vec{V} \right) = q_{el} \left(-\frac{\partial \varphi_{el}}{\partial x} - \frac{\partial A_{elx}}{\partial t} - \frac{\partial A_{elx}}{\partial x} V_x - \frac{\partial A_{elx}}{\partial y} V_y - \frac{\partial A_{elx}}{\partial z} V_z + \frac{\partial \vec{A}_{el}}{\partial x} \vec{V} \right) \\ &= q_{el} \left[-grad(\varphi_{el}) - \frac{\partial \vec{A}_{el}}{\partial t} \right]_x + q_{el} \left[V_y \left(\frac{\partial A_{ely}}{\partial x} - \frac{\partial A_{elx}}{\partial y} \right) + V_z \left(\frac{\partial A_{ely}}{\partial x} - \frac{\partial A_{elx}}{\partial z} \right) \right] = q_{el} E_{elx} + q_{el} [V_y B_z + V_z B_y] = \\ &= q_{el} E_{elx} + q_{el} [V_y B_z + V_z B_y] = q_{el} E_{elx} + q_{el} [\vec{V}, \vec{B}_{el}]_x = F_{Lx}. \end{aligned}$$

Мы доказали, что $x^{ая}$ составляющая электромагнитной силы может быть вычислена по соотношению (3.13) с обобщенным потенциалом (3.22). Для остальных составляющих выкладки аналогичны.

Теперь построение обобщенного потенциала для системы м.т., движущихся в электромагнитном поле, очевидно: просто надо просуммировать потенциалы (3.22) по всем точкам

$$U = \sum_{i=1}^N q_{eli} \varphi_{el}(\vec{r}_i | t) - q_{eli} \vec{A}_{el}(\vec{r}_i | t) \dot{\vec{r}}_i. \quad (3.23)$$

Функцию Лагранжа для неинерциальной (штрихованной) системы отсчета построим, исходя из ее вида в инерциальной системе отсчета (нештрихованной). Поскольку, как известно (см. курс лекций по механике - I), скорости точек в этих двух системах отсчета связаны соотношением

$$\vec{V}_i = \vec{V}'_i + \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'_i]$$

то для функции Лагранжа (3.11) имеем (слагаемые, зависящая только от времени, отбрасываются, т.к. функция Лагранжа определена с точностью до таких величин)

$$\begin{aligned}
L = T - U &= \frac{1}{2} m_i V_i^2 - U(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} m_i V_i^2 - U(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} m_i (\vec{V}'_i + \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'_i])^2 - U(\vec{r}_i) = \\
&= \frac{1}{2} m_i V_i'^2 + m_i [\vec{W}, \vec{r}'_i]^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] + \{m_i (\vec{V}'_i + [\vec{W}, \vec{r}'_i]) \vec{V}_0\} - U(\vec{r}_i) = \\
&= T' - (U - \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] - m_i [\vec{W}, \vec{r}'_i]^2 + m_i \vec{r}'_i \vec{A}_0) = T' - U'(\vec{V}'_i, \vec{r}'_i).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

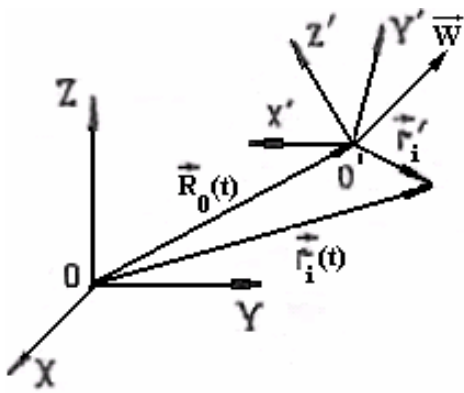
При выводе (3.24) мы отбросили несущественные для лагранжиана функцию времени $M\vec{V}_0^2/2$ и полную производную координат функции координат $d/dt(m_i \vec{r}'_i V_0)$, учитывая, что выделенное фигурными скобками слагаемое представляется в виде

$$m_i (\vec{V}'_i + [\vec{W}, \vec{r}'_i]) \vec{V}_0 = d/dt(m_i \vec{r}'_i V_0) - m_i \vec{r}'_i \vec{A}_0,$$

т.к. (см. курс лекций по Механике – I)

$$d/dt(\vec{r}'_i) = \vec{V}'_i + [\vec{W}, \vec{r}'_i]$$

В качестве обобщенных координат СМТ мы можем выбрать переменные \vec{r}'_i (они связаны



с декартовыми координатами \vec{r}_i преобразованиями вида (1.6) $\vec{r}_i = \vec{r}'_i(t) + \vec{R}_0(t)$, $\vec{R}_0(t)$ – текущий радиус - вектор начала координат штрихованной системы координат, где в них функция Лагранжа, как следует из (3.24), записалась в виде разности кинетической энергии в неинерциальной (штрихованной) системе отсчета и обобщенного потенциала $U'(\vec{V}'_i, \vec{r}'_i, t)$ (то что это обобщенный потенциал следует из его линейности по скоростям). Поэтому полученную функцию L мы также можем считать функцией Лагранжа в неинерциальной

системе координат L' , если там ввести обобщенный потенциал сил инерции по формуле

$$\begin{aligned}
U'(\vec{V}'_i, \vec{r}'_i, t) &= U(\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] - m_i [\vec{W}, \vec{r}'_i]^2 + m_i \vec{r}'_i \vec{A}_0 = \\
U(\vec{r}_i) &- \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] - I_{\alpha\beta} W'_\alpha W'_\beta + M(\vec{R}_c, \vec{A}_0),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

где M – суммарная масса СМТ; $\vec{R}_c = \vec{R}'_c(\vec{r}'_i)$ – радиус-вектор центра масс в штрихованной системе координат; $I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}(\vec{r}'_i)$ – мгновенный тензор момента инерции СМТ, рассматриваемой как твердое тело, в штрихованной системе координат. В результате функция Лагранжа в неинерциальной системе отсчета записывается в виде (конечно, эти равенства написаны с точностью до слагаемых несущественных для лагранжиана):

$$L' = L = T - U = T' - U'(\vec{V}'_i, \vec{r}'_i, t) = T' - (U(\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] - I_{\alpha\beta} W'_\alpha W'_\beta + M(\vec{R}_c, \vec{A}_0)). \tag{3.26}$$

Таким образом, мы показали, что обобщенным потенциалом описываются электромагнитные (а также и гравитационные, для которых достаточно введения лишь скалярного потенциала $\phi_{gr}(\vec{r}, t)$) и неинерциальные силы. Это расширяет область применения уравнений Лагранжа (3.12) и лагранжиана (3.11) на все представляющие интерес для классической механики (построение потенциала ядерных сил сталкивается с принципиальными трудностями, да и законы классической механики в масштабах проявления слабых и сильных взаимодействий не применимы) фундаментальные силы природы и неинерциальные системы отсчета.

IV. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Из второго и третьего законов Ньютона могут быть получены (см. курс Механика-I) законы сохранения энергии, импульса и момента импульса системы свободных м.т. Поскольку уравнения Лагранжа являются обобщением законов Ньютона на СМТ со связями, то из них также следуют законы сохранения так называемых обобщенных энергий и импульсов (в обобщенных координатах в некотором смысле теряется разница между импульсом и моментом импульса, соответственно, закон сохранения момента импульса не проявляется в качестве независимого).

4.1. Закон сохранения обобщенной энергии

Умножим каждое из уравнений Лагранжа (3.12) для обобщенно-потенциальных сил на соответствующую обобщенную скорость и просуммируем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k} \ddot{q}_k \right] = 0. \quad (4.1)$$

Так как

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{или} \quad \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t},$$

то из (4.1) имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

или, вводя обобщенную энергию СМТ, называемую функцией Гамильтона H (гамильтонианом), по формуле

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L, \quad (4.2)$$

получаем соотношение, определяющее изменение гамильтониана СМТ с обобщенно-потенциальными силами

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует **закон сохранения обобщенной энергии: если функция Лагранжа СМТ с обобщенно-потенциальными силами от времени явно не зависит, то гамильтониан механической системы сохраняется**

$$H(\dot{q}_k, q_k) = const. \quad (4.4)$$

Рассмотрим теперь частный, но практически важный случай стационарности потенциальных сил и связей (в этом случае СМТ называется консервативной), когда (кинетическая энергия не зависит явно от времени также в силу стационарности связей)

$$L(\dot{q}_k, q_k) = T(\dot{q}_k, q_k) - U(q_k).$$

Поскольку функция Лагранжа явно не зависит от времени, то гамильтониан консервативной СМТ сохраняется. Найдем его вид. При стационарных связях, как показано в подразделе 3.3, кинетическая энергия оказывается однородной квадратичная функция координат и для нее справедливо соотношение:

$$\frac{\partial \left(T(\dot{q}_n, q_n) \right)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial \left(a_{nl} \dot{q}_n \dot{q}_l \right)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \frac{1}{2} \left(a_{nk} \dot{q}_n \dot{q}_k + a_{kl} \dot{q}_l \dot{q}_k \right) = 2T. \quad (4.5)$$

Используя (4.5), получаем гамильтониан для консервативной СМТ:

$$H(\dot{q}_k, q_k) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \frac{\partial \left(T(\dot{q}_k, q_k) \right)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - T + U = 2T - T + U = T + U. \quad (4.6)$$

Таким образом, для консервативных СМТ сохраняется полная механическая энергия (полной механической энергией E называется сумма потенциальной и кинетической энергий СМТ)

$$E = T(\dot{q}_k, q_k) + U(q_k) = const. \quad (4.7)$$

В общем случае обобщенно-потенциальных сил гамильтониан имеет вид:

$$H(\dot{q}_k, q_k) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T_2 + T_1 - U_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - U_1 - U_0) = T_2 - T_0 + U_0. \quad (4.8)$$

Из (4.3), (4.8) в случае стационарных сил и связей ($\partial L / \partial t = 0, T_0 = 0$) получаем **закон сохранения гамильтониана: в системе СМТ со стационарными обобщенно-потенциальными силами и связями обобщенная энергия сохраняется:**

$$H(\dot{q}_k, q_k) = T_2 + U_0 = const. \quad (4.9)$$

Отметим, что при этих же условиях полная механическая энергия

$$E = T_2(\dot{q}_k, q_k) + U_1(\dot{q}_k, q_k) + U_0(q_k)$$

уже не сохраняется (за счет непостоянства $U_1(\dot{q}_k, q_k)$), поэтому отождествление обобщенной энергии с сохраняющейся в достаточно общем случае величиной гамильтониана является оправданным.

4.2. Закон сохранения обобщенного импульса

Кроме закона сохранения обобщенной энергии из уравнений Лагранжа могут быть получены и другие интегралы движения, в частности, закон сохранения обобщенного импульса. Вводя по определению обобщенный импульс p_k , как частную производную от функции Лагранжа по обобщенной скорости

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (4.10)$$

уравнения (3.12) запишем в виде

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что если нам удастся так выбрать обобщенные, что лагранжиан окажется независим от некоторых из них, то с каждой из этих координат, называемых циклическими, связан интеграл движения (**закон сохранения обобщенного импульса**): в отсутствие диссипативных сил для циклической координаты q_k сохраняется соответствующий ей обобщенный импульс

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = const. \quad (4.12)$$

Отметим, что обобщенные импульсы в случае обобщенно-потенциальных сил рассчитываются по соотношению

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \quad (4.13)$$

и даже для СМТ из одной м.т. в декартовых координатах ($q_\alpha = x_\alpha$) отличаются от обычного импульса $p_\alpha^{dec} = m \dot{x}_\alpha$:

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial (m \sum_{\alpha=1}^3 \dot{x}_\alpha^2)}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_\alpha} = m \dot{x}_\alpha - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_\alpha} = p_\alpha^{dec} - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_\alpha}. \quad (4.14)$$

4.3. Законы сохранения как следствия симметрий пространства-времени

Уравнения Лагранжа оказываются полезными и для исследования систем свободных м.т. В частности, применительно к таким СМТ из уравнений Лагранжа наглядно следует взаимосвязь законов сохранения с пространственно-временными симметриями.

Так следствием однородности времени является закон сохранения полной механической энергии. Пусть мы имеем консервативную (силы потенциальны и стационарны: $U = U_0(q_j)$, обобщенные координаты q_j - необязательно декартовы, их тоже $3N$, но система координат может быть любой) СМТ без связей. Тогда для нее функция Лагранжа не зависит от времени явно и это, очевидно, обусловлено его однородностью. Кроме того, вследствие отсутствия связей $T = T_2(q_j, \dot{q}_j)$ и, следовательно, гамильтониан

$$H(q_k, \dot{q}_k) = T - U = T_2 - T_0 + U_0 = T_2 + U_0$$

совпадает с полной механической энергией $E(q_k, \dot{q}_k) = T + U = T_2 + U_0$. Поскольку в соответствии с (4.3) при выполнении условия $\partial L / \partial t = 0$ сохраняется гамильтониан, то получаем закон сохранения полной механической энергии для консервативной СМТ без связей:

$$E(q_k, \dot{q}_k) = T + U = T_2 + U_0 = const.$$

Закон сохранения импульса замкнутой системы свободных точек следует из однородности пространства. Произведем сдвиг СМТ в пространстве как единого целого, придав бесконечно малое приращение $\delta \vec{r}$ радиус-векторам всех м.т. \vec{r}_i . Тогда функция Лагранжа замкнутой СМТ получит приращение, которое в силу однородности пространства должно быть нулевым (если СМТ – незамкнута, то изменится расстояние до источников внешних сил и уже будет $\delta L \neq 0$):

$$\delta L = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \delta x + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \delta y + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_i} \right) \delta z = 0.$$

Так как независимые компоненты перемещения СМТ ($\delta x, \delta y, \delta z$) могут быть любыми, то из последнего соотношения следуют равенства

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0. \quad (4.15)$$

Записывая уравнения Лагранжа для декартовых координат м.т.:

$$\frac{dp_{ix}}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{dp_{iy}}{dt} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{dp_{iz}}{dt} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0$$

и суммируя их с учетом (4.15), получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N p_{ix} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N p_{iy} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N p_{iz} \right) = 0. \quad (4.16)$$

Если внутренние силы потенциальные, то согласно (4.13) обобщенные импульсы м.т. совпадают с обычными декартовыми:

$$p_\alpha = p_\alpha^{dec} - \frac{\partial U(x_j)}{\partial x_\alpha} = p_\alpha^{dec}$$

из соотношений (4.16) следует **закон сохранения суммарного импульса замкнутой СМТ без связей:**

$$\vec{P}_\Sigma = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = const.$$

Аналогично показывается, что **закон сохранения момента импульса замкнутой системы свободных м.т. следует из предположения об изотропности пространства.** Произведем поворот СМТ в пространстве как единого целого на малый угол $\delta \vec{\varphi}$. Тогда радиус-вектора и скорости всех м.т. получают приращения

$$\delta \vec{r}_i = [\delta \vec{\varphi}, \vec{r}_i], \quad \delta \vec{V}_i = [\delta \vec{\varphi}, \vec{V}_i]$$

и нулевое изменение функция Лагранжа замкнутой СМТ запишется в виде (под производной функции по вектору понимается вектор с компонентами равными производным функции по компонентам этого вектора):

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} \delta \vec{V}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} [\delta \vec{\varphi}, \vec{r}_i] + \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} [\delta \vec{\varphi}, \vec{V}_i] = \left([\vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}] + [\vec{V}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i}], \delta \vec{\varphi} \right) = 0.$$

Поскольку бесконечно-малый угол поворота – произвольный, то из последнего соотношения следует

$$[\vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}] + [\vec{V}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i}] = 0$$

или, так как из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i},$$

то

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_i}] = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно (мы использовали доказанное ранее утверждение, что производная функции Лагранжа консервативной СМТ по скорости есть импульс м.т.) закону сохранения суммарного момента импульса \vec{L}_Σ замкнутой СМТ без связей относительно неподвижного полюса (через этот полюс проходит ось поворота на угол $\delta \vec{\varphi}$):

$$\vec{L}_\Sigma = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = const.$$

V. РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ

В настоящем разделе рассматриваются различные наиболее употребительные представления законов движения СМТ.

5.1. Канонические уравнения Гамильтона

В основе подхода (формализма) Лагранжа к получению уравнений движения СМТ в обобщенных координатах лежит использование функции Лагранжа. Известен и другой метод составления уравнений движения на основе функции Гамильтона. Соответствующий подход называется гамильтоновым формализмом.

Уравнения Лагранжа представляют собой систему s уравнений движений второго порядка каждое, т.е. систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2s$. Под канонической системой уравнений понимается система уравнений, каждое из которых первого порядка, и они разрешены относительно производных по времени от искомым функций. Таким образом, для получения уравнений движения в каноническом виде нам необходимо к s искомым функциям – обобщенным координатам – добавить еще s функций и для этой совокупности переменных составить каноническую систему $2s$ уравнений. Вполне понятно, что выбор искомым функций и приведение к нормальному виду системы уравнений движения могут быть проведены множеством способов. Рядом преимуществ, особенно при рассмотрении общих вопросов механики обладает описание в переменных (q_k, p_k) . При этом состояние системы задается точкой (q_k, p_k) в так называемом фазовом пространстве размерностью $2s$ (при Лагранжевом подходе состояние задавалось точкой (q_k) в s -мерном пространстве конфигураций). Уравнения движения в переменных фазового пространства могут быть получены из уравнений Лагранжа переходом от переменных (q_k, \dot{q}_k) к переменным (q_k, p_k) . Наиболее просто такой переход реализуется путем выписывания дифференциалов некоторых функций (в нашем случае лагранжиана и гамильтониана) в соответствующих переменных.

Полный дифференциал функции Лагранжа от времени, обобщенных координат и скоростей имеет вид

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.1)$$

Преобразуем это соотношение, используя определение обобщенного импульса (4.10) и уравнения Лагранжа (4.11), к переменным (q_k, p_k) :

$$dL = \dot{p}_k dq_k + p_k d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{p}_k dq_k + d(p_k \dot{q}_k) - \dot{q}_k dp_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или

$$d(p_k \dot{q}_k - L) = -\dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

откуда, вводя гамильтониан, как функцию переменных фазового пространства

$$H = p_k \dot{q}_k - L = H(q_k, p_k),$$

получаем

$$dH = -\dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следуют **каноническая система уравнений движения Гамильтона**:

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases} \quad (5.3)$$

и соотношение для частных производных по времени от функций Лагранжа и Гамильтона

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)_{q_k, \dot{q}_k} = - \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{q_k, p_k}. \quad (5.4)$$

Отметим, что в преобразованиях от соотношения (5.1) к (5.2) время играло роль переменной, не имеющей прямого отношения для перехода от (q_k, \dot{q}_k) к (q_k, p_k) , поэтому и для любого другого параметра λ , характеризующего свойства механической системы или действующего на нее внешнего поля имеем соотношение аналогичное (5.4)

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q_k, q_n} \dot{} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{q_k, p_n} \dot{}. \quad (5.5)$$

Из первого уравнения (5.3) и уравнений Лагранжа (4.11) также получаем связь между производными лагранжиана и гамильтониана по обобщенным координатам:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_{p_n} = -\dot{p}_k = -\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_{q_n} \dot{},$$

т.е.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_{p_n} = -\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_{q_n} \dot{}. \quad (5.6)$$

Из уравнений Гамильтона также как и из уравнений Лагранжа следуют законы сохранения обобщенных импульсов и энергии. В соответствии с (5.6) наряду с условием

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_{q_n} \dot{} = 0$$

циклическую координату можно определить и как обобщенную координату, для которой

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_{p_n} = 0. \quad (5.7)$$

Тогда согласно (5.7) и первой части уравнений (5.3) для циклической координаты сохраняется обобщенный импульс. Аналогично при условии отсутствия явной зависимости гамильтониана от времени

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{q_k, p_n} = 0$$

из (4.3) и (5.4) следует закон сохранения обобщенной энергии (гамильтониана)

$$H(\dot{q}_k, q_k) = H(q_k, p_k) = const. \quad (5.8)$$

При выводе канонических уравнений Гамильтона (5.3) мы исходили из уравнений Лагранжа для обобщенно потенциальных сил. Если учитывать диссипативные силы (уравнения Лагранжа (3.14)), то в правые части уравнений Гамильтона для производных по времени от обобщенных импульсов войдут обобщенные силы Q_k^* :

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_k^*, \\ \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \end{cases} \quad (5.9)$$

5.2. Скобки Пуассона

Рассмотрим некоторую функцию переменных фазового пространства и времени $f(q_k, p_k, t)$. Сформулируем условие, при которых эта функция сохраняется с течением времени, т.е. является интегралом движения. Для этого, используя уравнения Гамильтона (5.3), найдем ее полную производную по времени, обращаясь для интегралов движения в ноль:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5.10)$$

В соотношении (5.10) введены операторные скобки Пуассона $\{ \}$, которые для любых функций переменных фазового пространства и времени (а также любых других параметров) $f(q_k, p_k, t)$, $g(q_k, p_k, t)$ означают следующий дифференциальный оператор

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k}. \quad (5.11)$$

Скобки обладают следующими свойствами, которые легко получаются из их определения (5.11):

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\}, \quad \{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}, \quad \{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}, \\ \{f, c\} &= \{c, f\} = 0, \quad \{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из последних двух соотношений следуют формулы для фундаментальных скобок Пуассона, когда в качестве функций служат переменные фазового пространства:

$$\{q_k, q_n\} = 0, \quad \{p_k, p_n\} = 0, \quad \{p_k, q_n\} = \delta_{kn}. \quad (5.13)$$

Наконец для скобок Пуассона, составленных из трех функций, выполняется **тождество Якоби**:

$$\{f\{g, h\}\} + \{g\{h, f\}\} + \{h\{f, g\}\} = 0. \quad (5.14)$$

С помощью скобок Пуассона описываются инвариантные свойства систем, т.е. свойства не зависящие от выбора канонических переменных. В частности, из (5.10) следует, что для того, чтобы $f(q_k, p_k, t)$ была интегралом движения СМТ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\{H, f\} = -\frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5.15)$$

В том случае, когда интеграл движения явно не зависит от времени условия (5.15) просто сводится к равенству нулю скобок Пуассона

$$\{H, f\} = 0. \quad (5.16)$$

Важным свойством операторных скобок Пуассона, позволяющим в некоторых случаях получать новые интегралы движения, является тот факт (**теорема Пуассона**), что, если мы имеем два закона сохранения $f(q_k, p_k, t) = const$, $g(q_k, p_k, t) = const$, то сохраняется и их скобка Пуассона:

$$\{f, g\} = const. \quad (5.17)$$

Сохранение $\{f, g\}$ следует из (5.10) и тождества Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} + \{H\{f, g\}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial}{\partial t} g \right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f + \{H, f\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial}{\partial t} g + \{H, g\} \right\} = \left\{ \frac{d}{dt} f, g \right\} + \left\{ f, \frac{d}{dt} g \right\} = \{0, g\} + \{f, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Конечно, применяя теорему Пуассона, мы не всегда будем получать новые интегралы движения, поскольку в противном случае их бы было бесконечно много, а их всего $2s - 1$ (общее число интегралов движения равно числу констант, получающихся после интегрирования систем уравнений движения, минус единица; так как система уравнений имеет порядок $2s$, то и число констант равно этой величине; уменьшение числа констант на единицу связано с возможностью изменения начала отсчета времени на любую константу). В некоторых случаях получаются тривиальные результаты: константа или функция исходных интегралов $F(f, g)$. Однако, если это не имеет места, то скобки Пуассона дают новый закон сохранения.

В заключение отметим, что гамильтонов формализм играет важную роль в квантовой механике, в частности, фундаментальные скобки Пуассона оказываются квантово-механическим аналогом перестановочных соотношений Гейзенберга.

5.3. Принципы экстремальности действия Гамильтона и Мопертюи

Уравнения движения для СМТ со связями в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа) ранее были получены из принципа виртуальных перемещений Даламбера-Лагранжа. Однако эти уравнения могут быть получены и из общего принципа экстремальности действия Гамильтона (иногда его называют принципом Остроградского-Гамильтона), играющего существенную роль не только в механике, но и во всей физике,

так как применим и для систем с бесконечным числом степеней свободы, в частности, полей фундаментальных сил природы.

Рассмотрим движение системы, положение которой на моменты времени $t = t_1, t_2$ характеризуется определенными точками в конфигурационном пространстве q_k^1, q_k^2 . Поведение системы однозначно задается ее лагранжианом $L(q_k, \dot{q}_k, t)$. Действие S (размерность этой величины – «энергия \times время») между фиксированными точками q_k^1, q_k^2 определим, как функционал (функционалом называется оператор, ставящий в соответствие функции или набору функций число)

$$S = S(q_k) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt. \quad (5.18)$$

В конфигурационном пространстве все возможные (виртуальные) движения СМТ из точки q_k^1 до q_k^2 представляются набором кривых, проходящих через эти точки и окружающих траекторию истинного движения. В качестве критерия для выделения траектории истинного движения СМТ в конфигурационном пространстве может служить **принцип Гамильтона: из всех возможных движений, переводящих систему из положения q_k^1 при $t = t_1$ в положение q_k^2 при $t = t_2$ в действительности реализуется то, для которого действие экстремально**

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0. \quad (5.19)$$

Покажем, что из принципа Гамильтона следуют уравнения Лагранжа, а значит и вся классическая механика. Вычислим вариацию действия, интегрируя по частям

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k + \delta \dot{q}_k, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k + \delta \dot{q}_k, t) - L(q_k, \dot{q}_k, t) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt = \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt \end{aligned}$$

Из полученного выражения для вариации и экстремального принципа (5.19) находим

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt = 0,$$

откуда в силу независимости и произвольности вариаций δq_k следуют уравнения Лагранжа (3.12).

В формулировке экстремального принципа Гамильтона действие S определялось как функционал от виртуальных траекторий в конфигурационном пространстве с фиксированными начальными и конечными точками. Рассмотрим теперь действие как функцию конечных обобщенных координат действительных траекторий СМТ с фиксированной при $t = t_1$ начальной точкой q_k^1 и переменной конечной точкой q_k при $t = t_2$. Так как на траектории действительного движений выполняются уравнения Лагранжа, то теперь вариация действия равняется:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt = p_k \delta q_k.$$

Из полученного соотношения следует, что

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}. \quad (5.20)$$

Аналогично можно представить действие не только функцией координат, но и времени t , рассматривая действительные траектории движения СМТ в конфигурационном пространстве, начинающиеся в заданный момент времени t_1 в фиксированном положении q_k^1 , но заканчивающиеся в различных точках $q_k^2 = q_k$ при изменяющихся моментах времени $t_2 = t$. Тогда полная производная действия выражается соотношением (использовано (5.20)):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial S}{\partial t} + p_k \dot{q}_k. \quad (5.21)$$

Но с другой стороны по самому определению действия

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_1}^t L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = L. \quad (5.22)$$

и из (5.21), (5.22) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dt} - p_k \dot{q}_k = L - p_k \dot{q}_k = -H. \quad (5.23)$$

Таким образом, из (5.20), (5.23) следует, что полный дифференциал действия как функции координат и времени конечной точки траектории записывается в виде:

$$dS = p_k dq_k - H dt. \quad (5.24)$$

Исходя из (5.24) и сам принцип экстремального действия можно записать как требование равенства нулю вариации

$$\delta S = \delta \int dS = \delta \left(\int p_k dq_k - H dt \right) = 0. \quad (5.25)$$

при независимом варьировании обобщенных координат и импульсов. Можно показать, что из этого требования следуют канонические уравнения Гамильтона.

Принцип экстремального действия полностью описывает поведение механической системы. Если ограничиться более узкой задачей поиска лишь траекторий движения СМТ (абстрагироваться от временной части задачи), то принцип можно упростить. Предположим, что функция Лагранжа, а значит и функция Гамильтона явно не зависят от времени и, следовательно, гамильтониан СМТ сохраняется (индекс c означает константу этой физической величины)

$$H(p_k, q_k) = H_c = const.$$

Зафиксируем начальные и конечные точки траекторий, а также время начала движения, варьируя лишь временем прихода СМТ в конечную точку, тогда

$$\delta S = -H \delta t$$

или, если рассматривать только вариации удовлетворяющие закону сохранения обобщенной энергии, то

$$\delta S + H_c \delta t = 0. \quad (5.26)$$

Согласно (5.24) имеем

$$S = \int dS = \int (p_k dq_k - H dt) = \int p_k dq_k - H_c (t - t_1). \quad (5.27)$$

Входящий в (5.27) первый член

$$S_0 = \int p_k dq_k \quad (5.28)$$

называется укороченным действием. Подставив (5.27) в (5.26), получаем принцип экстремальности укороченного действия

$$\delta S_0 = \delta \int p_k dq_k = 0. \quad (5.29)$$

Для того чтобы с помощью этого принципа определять траектории СМТ, необходимо обобщенные импульсы, входящие в подынтегральное выражение (5.29), выразить через обобщенные координаты и их приращения. Найдем из закона сохранения обобщенной энергии

$$H(q_k, \frac{dq_k}{dt}) = H_c$$

дифференциал времени dt и подставим его в определение обобщенного импульса (4.10)

$$p_k = \frac{\partial L(q_k, \frac{dq_k}{dt})}{\partial \dot{q}_k}$$

В итоге получается требуемое выражение для обобщенных импульсов. Получающийся описанным образом вариационный принцип для укороченного действия называется принципом Мопертюи.

Найдем требуемый для принципа Мопертюи явный вид укороченного действия для СМТ с потенциальными силами (стационарность сил и связей была предположена ранее, когда постулировалась явная независимость лагранжиана от времени). В этом случае гамильтониан совпадает с полной механической энергией и из закона сохранения

$$H(q_k, \frac{dq_k}{dt}) = E(q_k, \frac{dq_k}{dt}) = E_c$$

определяем dt :

$$E(q_k, \frac{dq_k}{dt}) = \frac{1}{2} a_{kn}(q_l) \dot{q}_k \dot{q}_n + U(q_l) = E_c,$$

$$dt = \sqrt{\frac{a_{kn}(q_l) dq_k dq_n}{2(E_c - U)}}$$

и подставляем его в подынтегральное выражение в (5.28)

$$p_k dq_k = \frac{\partial L(q_n, \frac{dq_n}{dt})}{\partial \dot{q}_k} dq_k = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} a_{ln} \dot{q}_n \dot{q}_l \right)}{\partial \dot{q}_k} dq_k = \frac{a_{kn}(q_l) dq_k dq_n}{dt} = \sqrt{2(E_0 - U) a_{kn}(q_l) dq_k dq_n}$$

Таким образом, для консервативной СМТ со стационарными связями принцип Мопертюи записывается в виде

$$\delta \int \sqrt{2(E_c - U) a_{kn}(q_l) dq_k dq_n} = 0. \quad (5.30)$$

5.4. Канонические преобразования

Вид уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат (конфигурационного пространства), т.е. эти уравнения инвариантны к преобразованиям

$$q'_k = q'_k(q_n, t). \quad (5.31)$$

Наряду с уравнениями Лагранжа не меняют своего вида при преобразованиях (5.31) и полученные из них уравнения Гамильтона. Одним из преимуществ гамильтонового формализма является тот факт, что последние допускают более широкий класс преобразований, поскольку в фазовом пространстве независимыми переменными являются и обобщенные импульсы:

$$\begin{aligned} q'_k &= q'_k(q_n, p_l, t), \\ p'_k &= p'_k(q_n, p_l, t). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Однако теперь уже не при всех видах преобразований (5.32) уравнения Гамильтона сохраняют свой канонический вид. Получим условия, при которых переход к новым пе-

ременным фазового пространства (5.32) в уравнениях Гамильтона (5.3) приводит опять к каноническому виду:

$$\begin{cases} \dot{p}'_k = -\frac{\partial H'}{\partial q'_k}, \\ \dot{q}'_k = \frac{\partial H'}{\partial p'_k} \end{cases}$$

с новой функцией Гамильтона $H' = H'(q'_k, p'_k, t)$. Такие преобразования называются каноническими.

Условия каноничности преобразований (5.32) можно получить из вариационного принципа Гамильтона. Как в новых, так и в старых переменных, если выполняются уравнения Гамильтона, то справедлив и принцип экстремальности действия (5:

$$\delta \left(\int p_k dq_k - H dt \right) = 0, \quad (5.33)$$

$$\delta \left(\int p'_k dq'_k - H' dt \right) = 0. \quad (5.34)$$

Но два принципа (5.33) и (5.34) эквивалентны только тогда, когда подинтегральные функции отличаются на полный дифференциал произвольной функции Ψ обобщенных координат и времени

$$d\Psi = p_k dq_k - H dt - p'_k dq'_k + H' dt = p_k dq_k - p'_k dq'_k + (H' - H) dt. \quad (5.35)$$

Таким образом, каждое преобразование характеризуется своей, так называемой производящей функцией $\Psi = \Psi(q_k, q'_k, t)$. Из (5.35) получаем, что:

$$p_k = \frac{\partial \Psi}{\partial q_k}, \quad p'_k = -\frac{\partial \Psi}{\partial q'_k}, \quad H' = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (5.36)$$

Отметим, что производящие функции могут быть заданы и в других переменных (например, q_k, p'_k), но разность $H' - H$ всегда определяется частной производной по времени и если производящая функция от него не зависит явно, то функции Гамильтона совпадают.

Допуская столь широкий класс канонических преобразований, мы лишаем группы переменных q_k и p_k их первоначального смысла и физического различия. Так преобразование $q'_k = p_k, p'_k = -q_k$ (производящая функция $\Psi = q_k q'_k$), не меняя канонического вида уравнений, просто сводится к взаимному переименованию координат и импульсов. Для того чтобы подчеркнуть неразличимость групп переменных q_k и p_k фазового пространства их называют канонически сопряженными величинами. Условия канонической сопряженности (условия, которым должны удовлетворять новые переменные для обеспечения каноничности преобразования) могут быть сформулированы с помощью операторных скобок Пуассона:

$$\{q'_k, q'_n\}_{p_p, q_p} = 0, \quad \{p'_k, p'_n\}_{p_p, q_p} = 0, \quad \{p'_k, q'_n\}_{p_p, q_p} = \delta_{kn}. \quad (5.37)$$

Равенства (5.37) следуют из инвариантности скобок Пуассона к каноническим преобразованиям и соотношений (5.13)

$\{q'_k, q'_n\}_{p_i, q_i} = \{q'_k, q'_n\}_{p'_i, q'_i} = 0, \{p'_k, p'_n\}_{p_i, q_i} = \{p'_k, p'_n\}_{p'_i, q'_i} = 0, \{p'_k, q'_n\}_{p_i, q_i} = \{p'_k, q'_n\}_{p'_i, q'_i} = \delta_{kn}$. Инвариантность скобок Пуассона при канонических преобразованиях доказывается прямыми вычислениями с использованием выражений канонических преобразований через производящие функции.

5.5. Уравнение Гамильтона – Якоби

Рассматривая действие как функцию координат и времени, мы получили соотношение (5.23), которое может быть записано в виде (использованы соотношения (5.20)), называемом уравнением Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) = 0. \quad (5.38)$$

Наряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнения Гамильтона уравнение Гамильтона-Якоби также может быть положено в основу описания поведения механической системы. Однако в отличие от предыдущих способов описания движения СМТ (5.38) представляет не систему обыкновенных дифференциальных уравнения порядка $2s$, а уравнение в частных производных первого порядка.

Рассмотрим, как, зная полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби (5.38), найти решение уравнений движения (зависимости обобщенных координат от времени). Полный интеграл уравнения (5.38) содержит столько же констант, сколько в нем независимых переменных, т.е. в нашем случае $s + 1$

$$S = \Psi(t, q_k, C_k) + C_c, \quad (5.39)$$

где $C_k, C_c - s + 1$ произвольных констант.

Произведем каноническое преобразование от переменных q_k, p_k к переменным q'_k, p'_k , причем в качестве производящей функции возьмем функцию $\psi = \Psi(t, q_k, C_k)$, а систему констант C_k примем за новые обобщенные импульсы. Тогда (последнее соотношение получено в силу (5.38)):

$$p_k = \frac{\partial \Psi}{\partial q_k}, \quad q'_k = \frac{\partial \Psi}{\partial C_k}, \quad H' = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0. \quad (5.40)$$

В силу тождественного равенства нулю функции Гамильтона в новых канонических переменных имеем для них следующие канонические уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}'_k = 0, \quad \dot{p}'_k = 0,$$

откуда

$$q'_k = const, \quad p'_k = const.$$

В то же время второе уравнение (5.39)

$$q'_k = \frac{\partial \Psi(t, q_k, C_k)}{\partial C_k}$$

позволяет выразить обобщенные координаты $q_k = q_k(t)$ через время и $2s$ констант q'_k, p'_k .

Таким образом, находя полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби S , дифференцируя его по s констант и приравнявая результаты дифференцирования новым s константам A_k , получаем систему нелинейных уравнений

$$A_k = \frac{\partial S(t, q_k, C_k)}{\partial C_k},$$

позволяющих определить обобщенные координаты, как функции времени и $2s$ констант

$$q_k = q_k(t, A_k, C_k).$$

VI. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Ранее нами изучались (см. курс лекций по механике - I) малые колебания консервативных систем с одной степенью свободы. Теперь мы имеем возможность рассмотреть малые колебания механических систем с любых конечным числом степеней свободы.

6.1. Свободные колебания

Пусть консервативная механическая система со стационарными связями совершает малые свободные колебания около устойчивого положения равновесия. Для малых колебаний отклонения обобщенных координат q_k от их значений в положении равновесия q_{k0} , равные

$$x_k = q_k - q_{k0},$$

– также малы и, раскладывая в ряд Тейлора потенциальную энергию $U(q_k)$ с учетом, что в положении равновесия обобщенные силы равны нулю $Q_k = -\partial U / \partial q_k = 0$, с точностью до членов второго порядка получаем ее в виде однородной положительно определенной (положительная определенность следует, очевидно, из условия минимума $U(q_k)$ в положении устойчивого равновесия) квадратичной формы

$$U(q_k) = \frac{1}{2} k_{ln} x_l x_n, \quad (6.1)$$

где k_{ln} – матрица констант упругих сил. В случае стационарных связей кинетическая энергия также оказывается однородной положительно определенной квадратичной формой обобщенных скоростей:

$$T = T_2 = \frac{1}{2} a_{kn}(q_l) \dot{q}_k \dot{q}_n \approx \frac{1}{2} a_{kn}(q_{l0}) \dot{x}_k \dot{x}_n = \frac{1}{2} m_{kn} \dot{x}_k \dot{x}_n, \quad (6.2)$$

где m_{kn} – матрица коэффициентов инерции.

Таким образом, при стационарных связях лагранжиан консервативной системы, совершающей малые колебания около устойчивого положения равновесия, представляет собой разность двух однородных положительно определенных квадратичных форм обобщенных скоростей \dot{x}_k и отклонений x_k

$$L = T - U = T_2 - U_0 = \frac{1}{2} (m_{kn} \dot{x}_k \dot{x}_n - k_{kn} x_k x_n). \quad (6.3)$$

По построенной функции Лагранжа (6.3) составим теперь систему уравнений Лагранжа (3.12):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0. \quad (6.4)$$

Требующиеся для этого частные производные от лагранжиана имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left(\frac{1}{2} m_{ln} \dot{x}_l \dot{x}_n \right) = \frac{1}{2} \left(m_{ln} \delta_{kp} \dot{x}_n + m_{ln} \delta_{kn} \dot{x}_l \right) = m_{kn} \dot{x}_n, \\ \frac{\partial L}{\partial x_k} &= -\frac{\partial U}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} c_{ln} x_l x_n \right) = -\frac{1}{2} (c_{ln} \delta_{kl} x_n + c_{ln} \delta_{kn} x_l) = -c_{kn} x_n. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из (6.4), (6.5) получаем уравнения малых свободных колебаний консервативной механической системы с s степенями свободы

$$m_{kn} \ddot{x}_n + c_{kn} x_n = 0. \quad (6.6)$$

Это система s обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждое из уравнений имеет второй порядок и, следовательно, порядок всей системы $2s$.

В соответствии с общей методикой решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищем решение (6.6) в виде

$$x_n = C_n e^{i\omega t}, \quad (6.7)$$

где C_n – некоторая система пока неопределенных s постоянных; ω – одна из возможных частот собственных колебаний механической системы. Подставляя (6.7) в (6.6), получаем систему однородных линейных уравнений порядка s

$$(-\omega^2 m_{kn} + c_{kn}) C_n = 0. \quad (6.8)$$

Как известно, для существования ненулевого решения однородной линейной системы уравнений требуется равенство нулю ее определителя

$$|c_{kn} - w^2 m_{kn}| = 0. \quad (6.9)$$

Это, так называемое характеристическое уравнение, представляет собой алгебраическое уравнение степени s относительно квадрата собственной частоты свободных колебаний w^2 . Вещественность и положительность корней уравнения (6.9) очевидна по физическому смыслу, т.к. в противном случае частота оказывается с неравной нулю мнимой частью, приводящей к экспоненциально возрастающим или убывающим со временем решениям, которые, очевидно противоречат выполняющемуся в консервативных системах закону сохранения полной механической энергии.

Тем не менее, докажем это и непосредственно из системы уравнений (6.8). Умножим (6.8) на C_k^* (звездочка означает комплексно-сопряженную величину) и просуммируем по всем уравнениям

$$(-w^2 m_{kn} + c_{kn}) C_n C_k^* = 0,$$

откуда получаем

$$w^2 = \frac{c_{kn} C_n C_k^*}{m_{kn} C_n C_k^*}. \quad (6.10)$$

Числитель и знаменатель этой дроби вещественны в силу вещественности и симметричности коэффициентов c_{kn} и m_{kn} . Например, для знаменателя имеем (последнее равенство следует из того факта, что индексы по которым ведется суммирование могут быть любыми):

$$(c_{kn} C_n C_k^*)^* = c_{kn} C_n^* C_k = c_{nk} C_n^* C_k = c_{nk} C_k C_n^* = c_{kn} C_n C_k^*,$$

т.е. сопряженная величина равна самой величине, а это верно только для действительных чисел. Следовательно, вещественной оказывается и дробь. Положительность этой дроби следует из положительной определенности входящих в нее квадратичных форм:

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{c_{kn} C_n C_k^*}{m_{kn} C_n C_k^*} = \frac{c_{kn} (\operatorname{Re}(C_n) + \operatorname{Im}(C_n)i)(\operatorname{Re}(C_k) - \operatorname{Im}(C_k)i)}{m_{kn} (\operatorname{Re}(C_n) + \operatorname{Im}(C_n)i)(\operatorname{Re}(C_k) - \operatorname{Im}(C_k)i)} = \\ &= \frac{c_{kn} \operatorname{Re}(C_n) \operatorname{Re}(C_k) + c_{kn} \operatorname{Im}(C_n) \operatorname{Im}(C_k)}{m_{kn} \operatorname{Re}(C_n) \operatorname{Re}(C_k) + m_{kn} \operatorname{Im}(C_n) \operatorname{Im}(C_k)} > 0. \end{aligned}$$

После определения частот w_n из характеристического уравнения (6.9) для каждой из них находится набор констант C_k , удовлетворяющих линейной системе уравнений (6.9). Как известно, если корни характеристического уравнения различны, то эти константы пропорциональны соответствующим минорам определителя (6.9) при значениях $w = w_n$. Обозначив эти миноры через Δ_{kn} , получаем набор (для каждой собственной частоты w_n свое решение) частных решений $x_k = C_k e^{i w_n t} = \Delta_{kn} e^{i w_n t}$ и общее решение, представляющее собой линейную комбинацию частных решений:

$$x_k = \sum_{n=1}^s A_n \Delta_{kn} e^{i w_n t} = \sum_{n=1}^s |A_n| \Delta_{kn} e^{i(w_n t + \varphi_{0n})}, \quad (6.11)$$

где $A_n = |A_n| e^{i \varphi_{0n}}$ – произвольные комплексные константы, определяющиеся из начальных условий. Переходя к вещественной части, получаем общий вид решения системы уравнений малых свободных колебаний (6.6)

$$x_k = \sum_{n=1}^s |A_n| \Delta_{kn} \cos(w_n t + \varphi_{0n}) = \Delta_{kn} \xi_n, \quad (6.12)$$

в который входят в соответствии с порядком этой системы $2s$ констант ($|A_n|$ и φ_{0n}).

В соответствии с (6.12) изменение каждой обобщенной координаты x_k представляет собой суперпозицию (наложение) s простых гармонических колебаний

$\xi_n(t) = |A_n| \cos(\omega_n t + \varphi_{0n})$ различных собственных частот с произвольными амплитудами и фазами. Рассматривая (6.12) как связь между обобщенными координатами x_k и ξ_k и разрешая их относительно новых координат ξ_k , получаем, что для них уже решение распадается на s простых гармонических колебаний, описываемых уравнениями

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0. \quad (6.13)$$

Так построенные и обладающие такими свойствами обобщенные координаты называются нормальными или главными. Как видно из (6.13) ускорение каждой нормальной координаты зависит лишь от нее самой. Соответственно, и для определения ее временной зависимости (определения амплитуды и начальной фазы), необходимы лишь начальные координаты и скорости только ее самой же, т.е. все нормальные колебания механической системы полностью независимы друг от друга.

Поскольку система уравнений малых колебаний (6.6) в нормальных координатах распадается на независимые уравнения (6.12), то достаточно очевидно, что функция Лагранжа в этом случае представляет собой сумму функций Лагранжа для колебаний СМТ с одной степенью свободы и частотами ω_n

$$L = \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{2} (\dot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k). \quad (6.14)$$

Сравнение (6.3) и (6.14) показывает, что переходом к нормальным обобщенным координатам удастся обе квадратичные формы (кинетической и потенциальной энергий) одновременно привести к диагональному виду.

Случай кратных частот отличается незначительно. Решение также имеет вид (6.12) (степенных временных множителей не возникает из тех же энергетических соображений, которые приводились ранее для обоснования отсутствия экспоненциально возрастающих или убывающих со временем решений), однако коэффициенты Δ_{kn} для кратных частот ω_n уже не являются соответствующими минорами, т.к. последние оказываются равными нулю. Каждой кратной частоте соответствует число нормальных координат равное кратности, и их выбор становится неоднозначным.

6.2. Свободные колебания с трением

В соответствии с (3.14), (6.4) уравнения Лагранжа для малых колебаний механических систем с диссипативными силами трения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = Q_k^*. \quad (6.15)$$

В случае линейной зависимости этих сил от скоростей имеем

$$Q_k^* = -\alpha_{kn} \dot{x}_n, \quad (6.16)$$

где набор коэффициентов α_{kn} представляет собой симметричную матрицу (доказательство этого факта выходит за рамки механики)

$$\alpha_{kn} = \alpha_{nk}. \quad (6.17)$$

Из (6.16), (6.17) следует, что обобщенные силы трения могут быть записаны в виде частных производных по обобщенным координатам

$$Q_k^* = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \quad (6.18)$$

от квадратичной формы (так называемой диссипативной функции)

$$D = \frac{1}{2} \alpha_{kn} \dot{x}_k \dot{x}_n. \quad (6.19)$$

Введенной функцией диссипации определяется интенсивность рассеивания полной механической энергии:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k - L \right) &= \ddot{x}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} + \dot{x}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \dot{x}_k \frac{\partial L}{\partial x_k} - \dot{x}_k \frac{\partial L}{\partial x_k} = \\ \dot{x}_k \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} \right) &= -\dot{x}_k \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} = -2D. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Поскольку силы диссипации могут приводить лишь к уменьшению полной механической энергии, то из (6.20) следует положительная определенность квадратичной формы (6.19) для диссипативной функции D .

Подставляя (6.19) в (6.15), получаем систему уравнений Лагранжа для малых колебаний механических систем с трением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad (6.21)$$

где в качестве функции Лагранжа по-прежнему служит разностью двух положительно определенных форм (6.3). Подставляя (6.3) в (6.21), получаем систему уравнений малых колебаний с трением

$$m_{kn} \ddot{x}_n + \alpha_{kn} \dot{x}_n + c_{kn} x_n = 0, \quad (6.22)$$

которые отличаются от уравнений (6.6) без трения лишь силами (6.16).

Решение (6.22) ищем в том же виде (6.7), как и для механической системы без трения (для собственного значения ввели новое обозначение r , т.к. теперь это комплексное число не имеющее смысла круговой частоты колебаний)

$$x_n = C_n e^{irt}.$$

В результате получаем характеристическое уравнение

$$|m_{kn} r^2 + \alpha_{kn} r + c_{kn}| = 0. \quad (6.23)$$

Так как в алгебраическом уравнении (6.23) порядка $2s$ все коэффициенты – действительные, то его решения – собственные значения r – могут быть либо вещественными, либо комплексно сопряженными. Вещественные решения и вещественные части комплексно сопряженных решений должны быть обязательно отрицательными, поскольку в противном случае полная механическая энергия возрастала бы со временем, что противоречит (6.20) и физически обоснованному предположению о положительной определенности диссипативной функции D .

6.3. Вынужденные колебания

Введением нормальных обобщенных координат вынужденные колебания для механических систем с s степенями свободы сводятся к рассмотрению s одномерных вынужденных колебаний. Функция Лагранжа в нормальных координатах ξ_k с учетом действующих внешних сил $F_k(t)$ записывается в виде:

$$L = L_{free} + F_k(t) x_k = \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{2} (\dot{\xi}_k^2 + w_k^2 \xi_k^2) + f_k(t) \xi_k,$$

где L_{free} – лагранжиан свободных колебаний, а $f_k(t)$ – обобщенные силы в нормальных координатах

$$f_k(t) = F_n(t) \Delta_{nk}.$$

Соответственно система уравнений движения распадется на s независимых колебательных изменений каждой из нормальных координат ξ_k

$$\ddot{\xi}_k + w_k^2 \xi_k = f_k(t). \quad (6.24)$$

При вынужденных колебаниях с трением переход к нормальным координатам в общем случае оказывается невозможным вследствие неприводимости к диагональному виду одновременно трех квадратичных форм (кинетической и потенциальной энергий, диссипативной функции). Однако в некоторых частных случаях такое приведение оказывается реализуемым. Например, если коэффициенты функции диссипации оказываются пропорциональными инерционным коэффициентам (так называемый случай внешнего демпфирования)

$$\alpha_{kn} = 2\beta m_{nk}$$

или коэффициентам квадратичной формы потенциальной энергии (так называемый случай внутреннего демпфирования)

$$\alpha_{kn} = 2\gamma c_{nk},$$

то переход к нормальным координатам возможен, и система уравнений движения распадается на s полностью независимых колебательных процессов с различным (в случае внутреннего демпфирования) для каждой из нормальных координат коэффициентом трения

$$\ddot{\xi}_k + 2\beta_k \dot{\xi}_k + w_k^2 \xi_k = f_k(t), \quad (6.25)$$

где $\beta_k \equiv \beta$ – для внешнего демпфирования и $\beta_k = \gamma w_k^2$ – для внутреннего демпфирования.

Отметим, что модели внутреннего и внешнего демпфирования существенно проще общего случая, и вполне естественно представляется принятие этих моделей в качестве рабочих на начальном этапе исследований механических систем с неизвестными диссипативными свойствами.

VII. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Проектирование любой механической системы включает в себя, как один из основных элементов, ее расчет, т.е. решение системы уравнений движения и (или) равновесия (далее для движения и равновесия будем употреблять единый термин – поведение системы). В то же время параметры конкретной реализации этой системы неизбежно имеют отклонения от значений, закладываемых в ее численную модель, в пределах некоторых допусков, которые также должны быть определены на стадии разработки конструкции. Кроме того, при эксплуатации механическая система подвергается воздействию нагрузок, содержащих случайную компоненту, также, как правило, не учитываемую при расчетах в силу ее малости по сравнению с основными действующими силами. Однако не смотря на малость, случайное воздействие может оказаться причиной, вызывающей существенные для рассматриваемой задачи отклонения решения от полученного в первоначальной постановке без учета малых возмущающих факторов. В связи с изложенным дополнительно к изучению поведения механической системы должно проводиться исследование его устойчивости, гарантирующее допустимо малые изменения получаемых решений при достаточно малых возмущениях параметров конструкции, действующих сил и начальных условий (в случае исследования устойчивости движения).

7.1. Определение и критерии устойчивости

Система уравнений Лагранжа (3.14), разрешенная относительно вторых производных обобщенных координат, имеет вид:

$$\ddot{q}_k = Y_k(q_l, \dot{q}_n, t). \quad (7.1)$$

Для получения из (7.1) однозначного решения требуются начальные условия, задающие обобщенные координаты и скорости в некоторый момент времени t_0 (далее считаем $t_0 = 0$):

$$q_k|_{t=0} = q_k^0, \quad \dot{q}_k|_{t=0} = \dot{q}_k^0. \quad (7.2)$$

Интегрируя (7.1) с начальными условиями (7.2), получаем решение уравнений движения

$$q_k = q_k(t, q_l^0, \dot{q}_n^0). \quad (7.3)$$

Именно это решение (называемое невозмущенным), выбор которого также является частью постановки задачи (он – неоднозначен, т.к. определяется целью исследований и используемой математической моделью), и исследуется на устойчивость.

Исследование устойчивости поведения механической системы, вообще говоря, требует рассмотрения представительного набора существенно различных возмущающих факторов, приводящих к изменениям начальных условий (7.2) и правых частей системы уравнений (7.1), а в некоторых случаях и к смене ее порядка (если возмущающие факторы изменяют число степеней свободы). Однако в такой постановке задача оказывается необозримой и приходится становиться на наивную, но вынужденную точку зрения, заключающуюся в том, что достаточным является исследование устойчивости к некоторому весьма ограниченному набору возмущающих факторов, которые, по мнению разработчика механической системы, могут наиболее сильно повлиять на ее поведение. Далее для простоты изложения в качестве возмущающего фактора рассматривается только изменение начальных условий (7.2), при котором поведение системы уже будет описываться новыми возмущенными решениями системы (7.1) (все возмущенные величины помечаются сверху волной)

$$\tilde{q}_k = \tilde{q}_k(t, \tilde{q}_l^0, \dot{\tilde{q}}_n^0). \quad (7.4)$$

Разность этих решений называется отклонением

$$\Delta_k(t) = \tilde{q}_k(t, \tilde{q}_l^0, \dot{\tilde{q}}_n^0) - q_k(t, q_l^0, \dot{q}_n^0), \quad \dot{\Delta}_k(t) = \dot{\tilde{q}}_k(t, \tilde{q}_l^0, \dot{\tilde{q}}_n^0) - \dot{q}_k(t, q_l^0, \dot{q}_n^0).$$

В начальный момент времени эти отклонения определяются возмущением начальных условий (отметим, что точка над задаваемыми начальными константами $\dot{q}_k^0, \dot{\tilde{q}}_l^0, \dot{\Delta}_k^0$ не означает дифференцирования по времени, а лишь напоминает, что это начальное значение обобщенной скорости или ее изменения)

$$\Delta_k(0) = \Delta_k^0 = \tilde{q}_k^0 - q_k^0, \quad \dot{\Delta}_k(0) = \dot{\Delta}_k^0 = \dot{\tilde{q}}_k^0 - \dot{q}_k^0. \quad (7.5)$$

В качестве меры отклонения удобно принять расстояние между точками конфигурационного пространства (а также пространства обобщенных скоростей), изображающими положение механической системы в заданные моменты времени

$$\|\Delta_k\| = \sqrt{\sum_{k=1}^s (\tilde{q}_k - q_k)^2}, \quad \|\dot{\Delta}_k\| = \sqrt{\sum_{k=1}^s (\dot{\tilde{q}}_k - \dot{q}_k)^2}. \quad (7.6)$$

Основной вопрос теории устойчивости заключается в возможности задания возмущающих отклонений в таких пределах (размерах допусков), чтобы отклонения в решениях не превышали наперед заданных значений. В соответствии с этим и делается **определение**

устойчивости поведения системы по Ляпунову: если для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta(\varepsilon, \varepsilon) > 0$ и $\dot{\delta}(\varepsilon, \varepsilon) > 0$, что при

$$\|\Delta_k^0\| < \delta, \quad \|\dot{\Delta}_k^0\| < \dot{\delta}$$

для всех $t > 0$ выполняются неравенства:

$$\|\Delta_k\| < \varepsilon, \quad \left\| \dot{\Delta}_k \right\| < \dot{\varepsilon},$$

то поведение системы – устойчиво. Если поведение системы не обладает свойством устойчивости, то оно – неустойчиво. Дадим определение неустойчивости, формулируя свойство поведения системы противоположное данному в определении ее устойчивости (математическая логика учит, что для этого надо слова «любые» и «все» заменить на «существуют» и «найдутся» и наоборот, а также изменить знаки в неравенствах для норм отклонений решения; ну и, конечно, немножко подумав, отредактировать получившееся утверждение). Тогда получим **определение неустойчивости поведения системы по Ляпунову: если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\dot{\varepsilon} > 0$, что для любых $\delta > 0$ и $\dot{\delta} > 0$, не смотря на то, что**

$$\|\Delta_k^0\| < \delta, \quad \left\| \dot{\Delta}_k^0 \right\| < \dot{\delta},$$

найдется такое $t > 0$, что окажется справедливым хотя бы одно из неравенств:

$$\|\Delta_k(t)\| > \varepsilon, \quad \left\| \dot{\Delta}_k(t) \right\| > \dot{\varepsilon},$$

то поведение системы – неустойчиво.

Определение устойчивости говорит лишь о том, что нормы отклонений в поведении системы можно сделать сколь угодно малыми, но из него не следует, что постепенно система «забудет» про ее возмущение и опять устремится к своему невозмущенному поведению при $t \rightarrow \infty$. Поскольку такое стремление не гарантирует устойчивости (при не слишком больших t нормы отклонений могут быть велики), то требование устойчивости также должно быть оставлено для таких устойчиво себя ведущих при больших временах систем. В результате получаем **определение асимптотической устойчивости поведения системы по Ляпунову: устойчивое поведение системы называется асимптотически устойчивым, если дополнительно выполняются предельные соотношения:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta_k(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \dot{\Delta}_k(t) \right\| = 0.$$

Исследование устойчивости удобнее проводить, анализируя поведение входящих в ее определение отклонений $\Delta_k(t)$, $\dot{\Delta}_k(t)$. Так как возмущенное решение также удовлетворяют системе уравнений движения

$$\ddot{\tilde{q}}_k = Y_k(\tilde{q}_l, \tilde{q}_n, t) \quad (7.7)$$

и начальным условиям

$$\tilde{q}_k|_{t=0} = \tilde{q}_k^0, \quad \left. \dot{\tilde{q}}_k \right|_{t=0} = \dot{\tilde{q}}_k^0, \quad (7.8)$$

то, вычитая (7.1) из (7.7) и (7.2) из (7.8), получаем формулировку задачи об устойчивости системы в отклонениях:

$$\begin{aligned} \ddot{\Delta}_k &= Y_k(\dot{q}_l(t) + \dot{\Delta}_l, q_n(t) + \Delta_n, t) - Y_k(\dot{q}_l(t), q_n(t), t), \\ \Delta_k|_{t=0} &= \Delta_k^0, \quad \left. \dot{\Delta}_k \right|_{t=0} = \dot{\Delta}_k^0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (7.9) в общем случае сложна для исследований, и дальнейшим упрощением является ее линеаризация, которая получается при учете лишь линейных членов по отклонениям Δ_n , $\dot{\Delta}_n$ в разложении в ряд Тейлора функций $Y_k(\dot{q}_n + \dot{\Delta}_n, q_n + \Delta_n, t)$:

$$\ddot{\Delta}_k + d_{kn}(\dot{q}_l(t), q_l(t), t)\dot{\Delta}_n + f_{kn}(\dot{q}_l(t), q_l(t), t)\Delta_n = 0,$$

$$\Delta_k|_{t=0} = \Delta_k^0, \quad \dot{\Delta}_k|_{t=0} = \dot{\Delta}_k^0, \quad (7.10)$$

$$d_{kn} = -\frac{\partial Y_k}{\partial \dot{q}_n}, \quad f_{kn} = -\frac{\partial Y_k}{\partial q}$$

Рассмотрим частный случай консервативной системы со стационарными связями и линейными силами диссипации. Тогда линеаризованные около положения равновесия (не обязательно устойчивого) уравнения Лагранжа имеют вид (6.22), откуда следует, что задача (7.10) для устойчивости равновесия сводится уже к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$m_{kn}\ddot{\Delta}_n + \alpha_{kn}\dot{\Delta}_n + c_{kn}\Delta_n = 0,$$

$$\Delta_k|_{t=0} = \Delta_k^0, \quad \dot{\Delta}_k|_{t=0} = \dot{\Delta}_k^0. \quad (7.11)$$

Решение линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами ищется в виде

$$\Delta_n = C_n e^{\lambda t}, \quad (7.12)$$

откуда из требования существования ненулевого решения получается характеристическое уравнение для собственных значений λ (к аналогичному уравнению приходим и в общего случае (7.10), если оказываются постоянными коэффициенты d_{kn}, f_{kn})

$$\| m_{kn}\lambda^2 + \alpha_{kn}\lambda + c_{kn} \| = 0. \quad (7.13)$$

Знание знаков действительных частей собственных значений оказывается достаточным для выводов об устойчивости поведения линейной системы. Из анализа поведения решений (7.12) достаточно очевидно, что:

- если при $\text{Re}(\lambda) < 0$ для всех собственных значений, то невозмущенное поведение системы – асимптотически устойчиво;
- если существует хотя бы одно собственное значения с $\text{Re}(\lambda) > 0$, то невозмущенное поведение системы – неустойчиво;
- если некоторые собственные значения чисто мнимые ($\text{Re}(\lambda) = 0$), а для остальных $\text{Re}(\lambda) < 0$, то невозмущенное поведение системы – устойчиво.

Легко видеть, что перечисленными тремя случаями, исчерпываются все возможные рас-



уравнения (7.12), записанного в виде

$$\sum_{\nu=0}^{2s} a_{\nu} \lambda^{2s-\nu} = 0, \quad (7.14)$$

можно сделать вывод о положительности действительных частей собственных значений. Наиболее известен **критерий Гурвица**: для отрицательности вещественных частей корней алгебраического уравнения (7.14) необходимо и достаточно, чтобы определи-

тель матрицы Гурвица G_{2s} и все ее диагональные миноры G_ν удовлетворяли неравенствам (в случае $a_0 > 0$ были положительными)

$$(\text{sign}(a_0))^\nu G_\nu > 0.$$

На диагонали матрицы Гурвица находятся коэффициенты a_ν , а выше и ниже диагонали в каждом столбце располагаются те же коэффициенты с возрастанием и убыванием их индексов, соответственно (если индекс выходит за пределы своего изменения, то это место матрицы заполняется нулем)

$$G_{2s} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{2s-2} & a_{2s} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_{2s-3} & a_{2s-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_{2s-4} & a_{2s-2} & a_{2s} \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Используются и другие критерии (частотный критерий Михайлова, критерий Вышнеградского для характеристических уравнений третьего порядка).

Таким образом, в линейном случае исследование устойчивости не вызывает принципиальных трудностей. Поэтому одним из методов исследования на устойчивость является сведение нелинейной задачи в приращениях (7.9) к линейной (7.10) (метод исследования устойчивости по первому приближению). Однако тогда возникает законный вопрос, при каких условиях и какие выводы, полученные для линеаризованной задачи, остаются справедливыми и применительно к ее исходной нелинейной формулировке. Применительно к линейным системам с постоянными коэффициентами исчерпывающий ответ на этот вопрос дают следующие три теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Теорема 1. Из асимптотической устойчивости линеаризованной системы уравнений следует асимптотическая устойчивость и ее исходной нелинейной формулировки.

Теорема 2. Из неустойчивости линеаризованной системы уравнений следует неустойчивость и ее исходной нелинейной формулировки.

Теорема 3. При отсутствии асимптотической устойчивости из устойчивости линеаризованной системы уравнений устойчивости нелинейной системы уравнений не следует.

Следовательно, при асимптотической устойчивости и в случае неустойчивости нелинейные добавки, отбрасываемые при линеаризации, на характер устойчивости поведения системы оказать влияния не могут. При устойчивом, но не асимптотически устойчивом поведении линейной системы нелинейные добавки могут существенным образом изменить выводы об устойчивости нелинейного случая.

Согласно теореме 3 метод исследования по первому приближению приводит к результату не во всех случаях. Кроме того, теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению применимы лишь для исследования поведения систем, линеаризация которых приводит к уравнениям с постоянными коэффициентами. Более общим по применимости является метод исследования устойчивости Ляпунова, основанный на использовании некоторого класса знакоопределенных функций $V(x_\nu)$ в фазовом пространстве x_ν . Будем считать, что в этот класс входят функции, которые только в начале координат фазового пространства обращаются в ноль $V(x_\nu)_{x_\nu=0} = 0$, а в некоторой его окрестности $\|x_\nu\| \leq \delta$, $\delta > 0$ обладают следующими свойствами:

—однозначны и непрерывны;

—имеют непрерывными частными производными $\partial V / \partial x_v$;

Из непрерывности и обращения в ноль только в начале координат следует, что функция $V(x_v)$ — знакоопределена, т.е. вне начала координат либо $V(x_v) > 0$, либо $V(x_v) < 0$. В том случае, если функция не меняет знака, но допускается обращение в ноль и в отличных от начала координат точках, она называется знакопостоянной. Используя введенные функции, сформулируем без доказательства теорему, дающую **достаточный критерий устойчивости: для устойчивости поведения системы достаточно существования знакоопределенной функции $V(x_v)$ в фазовом пространстве, полная производная которой по времени в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения знакопостоянна с противоположным знаком к $V(x_v)$ или тождественно равна нулю.**

Таким образом, доказательство устойчивости поведения системы может быть сведено к построению знакоопределенной функции, принадлежащей описанному выше классу и обладающей требуемыми в теореме свойствами. Однако построение такой функции Ляпунова во многих случаях является самостоятельной и не всегда просто решаемой задачей.

7.2. Устойчивость равновесия консервативных систем

Рассмотрим консервативную систему со стационарными связями. Тогда справедлива **теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативных систем: если в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум, то равновесие в этом положении — устойчиво.** Доказательство теоремы Лагранжа основывается на построении функции Ляпунова. В положении равновесия, как следует из (2.14), обобщенные силы Q_k обращаются в ноль

$$Q_k = - \frac{\partial U(q_i)}{\partial q_k} = 0. \quad (7.16)$$

Решая систему уравнений (7.16), находим значения обобщенных координат q_k^0 , при которых механическая система находится в равновесии, но это равновесие может быть и неустойчивым. Введем новые обобщенные координаты $x_k = q_k - q_k^0$. Очевидно, что для них условие (7.16) уже записывается в виде

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_k} \right|_{x_j=0} = 0. \quad (7.17)$$

Примем, что в исследуемом на устойчивость положении равновесия $x_k = q_k - q_k^0 = 0$ потенциальная энергия равна нулю (это всегда возможно сделать выбором ее начала отсчета, т.к. она определена с точностью до константы). Тогда, поскольку по условию теоремы потенциальная энергия имеет минимум, то существует окрестность около положения равновесия, где она положительно-определена. Теперь в качестве функции Ляпунова выберем полную механическую энергию

$$V(x_l, \dot{x}_l) = T(x_l, \dot{x}_l) + U(x_l).$$

Она знакоопределена (везде кроме нуля положительна в рассматриваемой окрестности), а ее полная производная по времени в силу сохранений полной механической энергии в консервативных системах тождественно равна нулю. Следовательно, выполнены все достаточные условия теоремы Ляпунова и этим доказано, что положение равновесия с минимум потенциальной энергии устойчиво.

Однако в реальных механических системах всегда действуют силы диссипации и возникает вопрос, как они могут повлиять на устойчивость равновесия. Оказывается, что они не ухудшают ситуации при наличии устойчивости, но не могут к ней привести при ее отсутствии, а именно, справедливы следующие теоремы (эти теоремы доказаны лишь для

сил трения (6.16), пропорциональных обобщенным скоростям), полученные лордом Кельвиным.

Теорема 1. Учет сил диссипации в консервативных системах оставляет устойчивые положения равновесия таковыми.

Теорема 2. Если вводимые в консервативную систему силы трения, обуславливают диссипацию энергии по всем нормальным координатам, то устойчивые положения равновесия приобретают свойство асимптотической устойчивости.

Теорема 3. Учет сил диссипации в консервативных системах оставляет неустойчивые положения равновесия таковыми.

7.3. Автоколебания

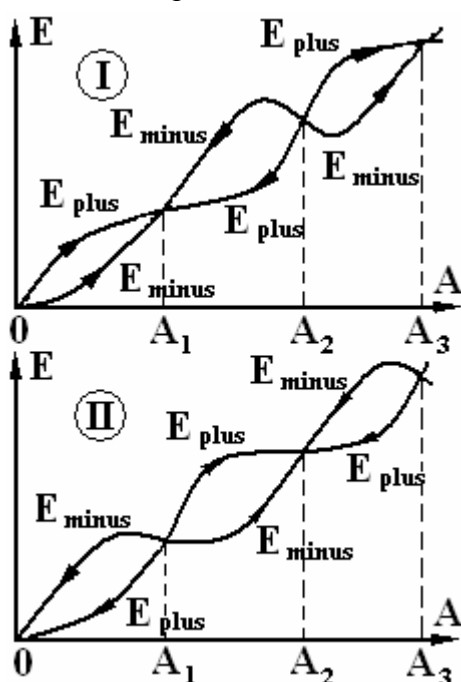
Автоколебания – колебания, возбуждаемые и поддерживаемые непериодическим воздействием. Автоколебательные движения используются во многих устройствах (например, к ним относятся колебания струны скрипки при равномерном движении смычка, колебания маятника часов и т.д.) Однако если механическая система включает источник энергии, то хотя ее эксплуатация и не предполагает авто-



колебательных режимов, они могут возникнуть при некоторых условиях. В этом случае систему относят к классу потенциально автоколебательных, а переход к автоколебаниям может рассматриваться как механизм потери устойчивости рабочего режима устройства. Наиболее известными примерами нежелательных автоколебаний являются: флаттер – возбуждение в струе набегающего потока колебательных движений крыльев, весьма опасных для самолетов, и шимми – возбуждение за счет кинетической энергии автомобиля вливающего движения катящегося колеса.

Помимо наличия постоянной подпитки энергии система лишь в том случае может быть отнесена к потенциально автоколебательной, если в ней имеется обратная связь, способная обеспечить периодический отбор энергии от ее источника. Следовательно, мы можем опасаться автоколебательной неустойчивости, если в механическую систему входят хотя бы три элемента, как это показано на рисунке. К основным особенностям поведения системы, указывающим, что мы имеем дело с автоколебаниями, относят: самовозбуждение колебаний (отсутствует периодическое воздействие извне), а также зависимость частот и амплитуд только от параметров системы (в частности, независимость амплитуд от начальных условий, как это имеет место при малых свободных колебаниях).

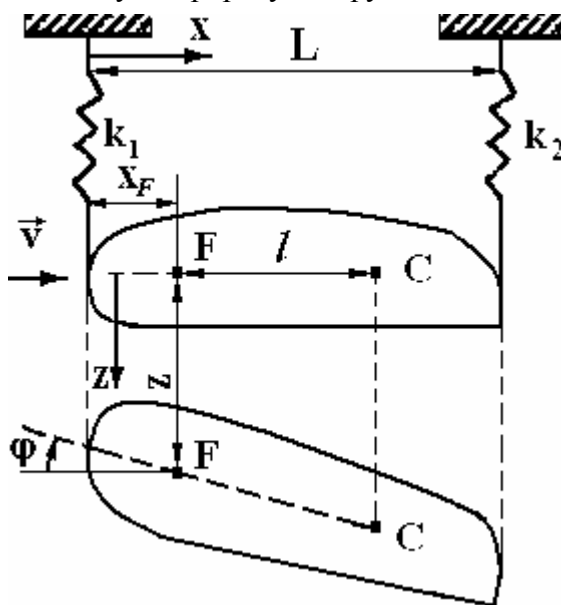
При изучении автоколебаний оказывается полезным предварительный энергетический анализ, основанный на том, что соблюдается баланс между энергией E_{plus} , поступающей от источника, и энергией E_{minus} , диссипируемой в автоколебательном процессе. Обычно строятся зависимости этих энергий от характерной амплитуды A колебаний. Примеры таких зависимостей для двух систем, обладающих различными свойствами, представлены на рисунке. Невозмущенному поведению (движению или равновесию) соответствует амплитуда $A = 0$, автоколебаниям – амплитуды $A = A_1, A_2, A_3$ (при этих значениях амплитуд выполняется баланс энергий $E_{plus} = E_{minus}$). В случае системы I невозмущенное поведение с $A = 0$ и автоколебание с амплитудой $A = A_2$ – неустойчивы (отклонения от этих значений амплитуд ведут к их изменению в сторону отклонения). Небольшие воз-



При изучении автоколебаний оказывается полезным предварительный энергетический анализ, основанный на том, что соблюдается баланс между энергией E_{plus} , поступающей от источника, и энергией E_{minus} , диссипируемой в автоколебательном процессе. Обычно строятся зависимости этих энергий от характерной амплитуды A колебаний. Примеры таких зависимостей для двух систем, обладающих различными свойствами, представлены на рисунке. Невозмущенному поведению (движению или равновесию) соответствует амплитуда $A = 0$, автоколебаниям – амплитуды $A = A_1, A_2, A_3$ (при этих значениях амплитуд выполняется баланс энергий $E_{plus} = E_{minus}$). В случае системы I невозмущенное поведение с $A = 0$ и автоколебание с амплитудой $A = A_2$ – неустойчивы (отклонения от этих значений амплитуд ведут к их изменению в сторону отклонения). Небольшие воз-

возмущения невозмущенного поведения приведут к автоколебаниям с амплитудой $A = A_1$, достаточно сильное воздействие может реализовать переход к устойчивым автоколебаниям с $A = A_3$. Система II ведет себя совершенно иначе. Как видно из рисунка, для нее устойчивыми являются невозмущенное поведение и автоколебание с $A = A_2$. Теперь уже небольшие возмущения невозмущенного поведения не приведут к качественному изменению ситуации, т.к. после воздействия система вернется к исходному поведению с $A = 0$. Только достаточно сильное возмущение может перевести систему к состоянию устойчивых автоколебаний с $A = A_2$ (для этого ей необходимо, по крайней мере, иметь в результате возмущения амплитуду, превышающую A_1).

В качестве примера исследования на устойчивость потенциально автоколебательной системы рассмотрим явление флаттера, упростив расчетную модель насколько это возможно, чтобы еще остался сам автоколебательный механизм потери устойчивости равновесия крыла самолета в набегающем потоке воздуха. Физическая суть флаттера имеет аэро – упруго - динамическую природу. Упругие колебания крыла являются по необходимости изгибно-



крутильными, т.к. из-за несовпадения центров масс и жесткости (центром жесткости каждого сечения крыла называется точка приложения равнодействующей упругих сил) в сечениях крыла чисто изгибные или крутильные колебания не реализуются (детально этот вопрос рассматривается в курсах механики сплошных сред и выходит за рамки теоретической механики дискретных систем м.т.). Мы заменим изгибно-крутильные колебания упругого крыла плоским движением абсолютно жесткого тела на упругих пружинах, совершающего поперечно-поворотные малые смещения, как это представлено на рисунке. Ширину крыла (размер сечения абсолютно твердого тела) примем равной L , а расстояние между центрами жесткости F и инерции C за l . Тогда координата центра

жесткости x_F определяется из условия отсутствия относительно этой точки крутящего момента упругих сил при поперечном смещении

$$k_1 x_F = k_2 (L - x_F). \quad (7.18)$$

Примем за обобщенные координаты показанные на рисунке смещение z центра жесткости F (этому смещению соответствует изгиб крыла) и угол поворота тела φ (он реализуется при закручивании крыла). При невозмущенном движении $z \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ (это соответствует указанному на рисунке направлению потока и отсчету z от положения точки C при нерастянутом положении пружин). Для получения системы дифференциальных уравнений движения малых автомодельных колебаний найдем кинетическую и потенциальную энергии построенной модельной механической системы с двумя степенями свободы. Используя теорему Кенига (см. курс Механика-I), рассчитываем кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{z} + l \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + m l \dot{z} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2, \quad (7.19)$$

где $I = I_C + ml^2$ – момент инерции тела относительно центра жесткости (согласно теореме Штейнера). С учетом (7.18): потенциальная энергия пружин равняется:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}k_1(z - x_F\varphi)^2 + \frac{1}{2}k_2(z + (L - x_F)\varphi)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)z^2 - k_1z x_F\varphi + \\
&+ \frac{1}{2}k_1(x_F\varphi)^2 + k_2z(L - x_F)\varphi + \frac{1}{2}k_2(L - x_F)^2\varphi^2 = \\
&= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)z^2 + \frac{1}{2}(k_1x_F^2 + k_2(L - x_F)^2)\varphi^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)z^2 + \frac{1}{2}k\varphi^2, \\
k &= k_1x_F^2 + k_2(L - x_F)^2 = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}L^2,
\end{aligned} \tag{7.20}$$

где k – жесткость системы на кручение.

Обобщенными силами в нашем случае будут подъемная аэродинамическая сила Q_z и аэродинамический момент Q_φ , которые пропорциональны скоростному напору и эффективному углу атаки $\varphi + \dot{z}/V$ (слагаемое \dot{z}/V добавляется к углу атаки вследствие приращения по оси z относительной скорости крыла и потока; знак минус в выражении для Q_z соответствует противоположности направлений подъемной силы и оси z):

$$\begin{aligned}
Q_z &= -C_z \frac{\rho V^2}{2} S(\varphi + \dot{z}/V) = -A_z\varphi - \frac{A_z}{V}\dot{z}, \\
Q_\varphi &= C_\varphi \frac{\rho V^2}{2} S L(\varphi + \dot{z}/V) = A_\varphi L\varphi + \frac{A_\varphi L}{V}\dot{z}, \\
A_z &= C_z \frac{\rho V^2}{2} S, \quad A_\varphi = C_\varphi \frac{\rho V^2}{2} S,
\end{aligned} \tag{7.21}$$

где ρ – плотность набегающего газа; C_z, C_φ – безразмерные аэродинамические коэффициенты пропорциональности; $A_z = A_z(V)$, $A_\varphi = A_\varphi(V)$ – заданные квадратичные функции скорости.

Подставляя (7.19)-(7.21) в уравнения Лагранжа (3.14), получаем линейную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка каждое:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + ml\ddot{\varphi} + \frac{A_z}{V}\dot{z} + (k_1 + k_2)z + A_z\varphi = 0, \\ ml\ddot{z} + I\ddot{\varphi} - \frac{A_\varphi L}{V}\dot{z} + (k - A_\varphi L)\varphi = 0, \end{cases} \tag{7.22}$$

где $I = I_C + ml^2$ – момент инерции тела относительно центра жесткости (согласно теореме Штейнера).

Для исследования на устойчивость (получения характеристического уравнения) подставляем в (7.22) решение в виде (7.12) и получаем однородную линейную систему:

$$\begin{cases} \left(m\lambda^2 + \frac{A_z}{V}\lambda + (k_1 + k_2) \right) C_1 + (ml\lambda^2 + A_z)C_2 = 0, \\ \left(ml\lambda^2 - \frac{A_\varphi L}{V}\lambda \right) C_1 + (I\lambda^2 + (k - A_\varphi L))C_2 = 0, \end{cases}$$

у которой имеется ненулевое решение лишь при равном нулю детерминанте

$$\begin{vmatrix} \left(m\lambda^2 + \frac{A_z}{V}\lambda + (k_1 + k_2) \right) & (ml\lambda^2 + A_z) \\ \left(ml\lambda^2 - \frac{A_\varphi L}{V}\lambda \right) & (I\lambda^2 + (k - A_\varphi L)) \end{vmatrix} = 0. \tag{7.23}$$

Раскрывая полученный детерминант, находим характеристическое уравнение четвертой степени в виде (7.14) с коэффициентами (обе части характеристического уравнения поде-

лены на $m^2 L^2 ((k_1 + k_2)/m)^2$ и собственные значения сделаны безразмерными по формуле $\lambda = \sqrt{(k_1 + k_2)/m} \tilde{\lambda}$, тогда, очевидно, и коэффициенты будут безразмерными):

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{I - ml^2}{mL^2} = \frac{I_c}{mL^2} = \tilde{I}, \\
a_1 &= \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \frac{1}{mV} \left(\frac{I}{mL^2} A_z(V) + \frac{l}{L} A_\phi(V) \right) = \frac{\tilde{A}_z(V)}{\tilde{V}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2), \\
a_2 &= \frac{m}{k_1 + k_2} \frac{1}{mL} \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} L + (k_1 + k_2) \frac{I_c + ml^2}{mL} - (A_z(V) \frac{l}{L} + A_\phi(V)) \right) = \\
&= \tilde{I} + \frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{l}^2 - (\gamma + \tilde{l}) \tilde{A}_z, \\
a_3 &= \left(\frac{m}{k_1 + k_2} \right)^{3/2} \frac{k A_z(V)}{Vm^2 L^2} = \frac{1}{\tilde{V}} \frac{1}{\tilde{k}} \tilde{A}_z(V), \\
a_4 &= \left(\frac{m}{k_1 + k_2} \right)^2 \frac{(k_1 + k_2)(k - A_\phi(V)L)}{m^2 L^2} = \frac{1}{\tilde{k}} - \gamma A_z.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

где введены безразмерные параметры

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &= V \sqrt{m/(k_1 + k_2)}/L, \quad \tilde{A}_z = A_z/(k_1 + k_2)/L, \\
\gamma &= A_\phi/A_z = C_\phi/C_z, \quad \tilde{l} = l/L, \quad \tilde{I} = I_c/mL^2, \quad \tilde{k} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2}.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Для асимптотической устойчивости, согласно критерию Гурвица, все коэффициенты и определитель (третий диагональный минор матрицы Гурвица)

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4$$

должны быть положительны:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \Delta_3 > 0.$$

Из выражений (7.24) для коэффициентов характеристического уравнения, очевидно, что для всех значений скорости (как следует из (7.21) функции $A_z(V)$, $A_\phi(V)$ – всегда положительны):

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0$$

и условия устойчивости сводятся к трем неравенствам

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \Delta_3 > 0.$$

Рассмотрим условие $\Delta_3 > 0$, которое записывается в виде

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$$

или

$$\frac{\tilde{A}_z^2(V)}{\tilde{V}^2 \tilde{k}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \left(\tilde{I} + \frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{l}^2 - (\gamma + \tilde{l}) \tilde{A}_z \right) - \frac{\tilde{A}_z^2(V) \tilde{I}}{\tilde{V}^2 \tilde{k}^2} - \frac{\tilde{A}_z^2(V)}{\tilde{V}^2 \tilde{k}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)^2 (1 - \gamma \tilde{k} \tilde{A}_z) > 0.$$

Сокращаем обе части неравенства на положительное выражение $\tilde{A}_z^2/\tilde{V}^2/\tilde{k}$ и преобразуем получившееся для \tilde{A}_z неравенство:

$$(\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \left(\tilde{I} + \frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{l}^2 - (\gamma + \tilde{l}) \tilde{A}_z \right) - \frac{\tilde{I}}{\tilde{k}} - (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)^2 (1 - \gamma \tilde{k} \tilde{A}_z) > 0,$$

$$\begin{aligned}
& (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \left(\frac{1}{\tilde{k}} - \gamma \tilde{l} - (\gamma + \tilde{l}) \tilde{A}_z \right) - \frac{\tilde{I}}{\tilde{k}} + \gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)^2 \tilde{A}_z > 0, \\
& (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \left(\frac{1}{\tilde{k}} - \gamma \tilde{l} \right) - \frac{\tilde{I}}{\tilde{k}} + (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) (\gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) - \gamma - \tilde{l}) \tilde{A}_z > 0, \\
& \frac{1}{\tilde{k}} (\gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) - \gamma \tilde{l} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) + (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) (\gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) - \gamma - \tilde{l}) \tilde{A}_z > 0, \\
& (\gamma + \tilde{l} - \gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)) - \frac{\tilde{k}}{\tilde{l}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) (\gamma + \tilde{l} - \gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)) \tilde{A}_z > 0, \\
& (\gamma + \tilde{l} - \gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)) \left(1 - \frac{\tilde{k}}{\tilde{l}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \tilde{A}_z \right) > 0, \\
& (\gamma + \tilde{l} - \gamma \tilde{k} (\tilde{l}^2 + \tilde{I} + \gamma \tilde{l})) \left(\tilde{A}_z - \frac{\tilde{l}}{\tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)} \right) < 0. \tag{7.26}
\end{aligned}$$

При $\tilde{k} \tilde{I} < 1$ и достаточно малом γ первый множитель левой части неравенства (7.26) положителен и, следовательно,

$$\tilde{A}_z < \frac{\tilde{l}}{\tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)}. \tag{7.27}$$

Для условий $a_2 > 0$, $a_4 > 0$ получаем аналогичные неравенства:

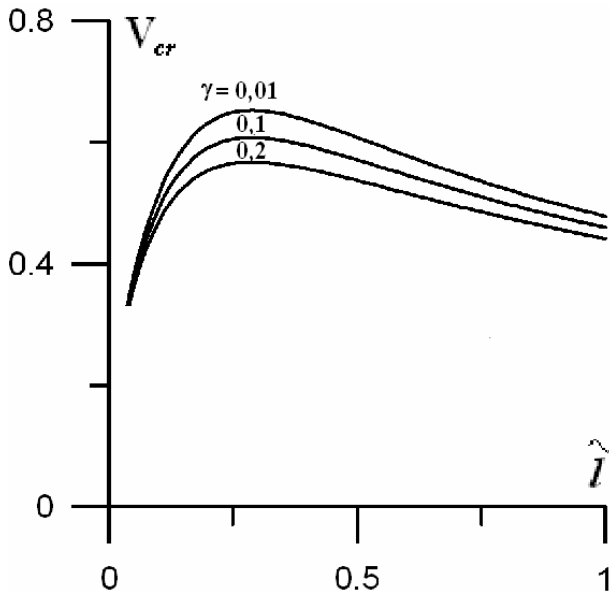
$$\tilde{A}_z < \frac{\tilde{I} + 1/\tilde{k} + \tilde{l}^2}{\gamma + \tilde{l}}, \quad \tilde{A}_z < \frac{1}{\gamma \tilde{k}},$$

которые, как легко видеть, выполняются, если выполняется (7.27). Следовательно, условие $\Delta_3 > 0$ нарушается при меньших скоростях, чем становятся отрицательными коэффициенты a_2, a_4 .

Используя выражение (7.21) для функции $A_z = A_z(V)$, из (7.27) получаем ограничение на скорость, при выполнении которого автоколебания будут затухать, т.е. потеря устойчивости (флаттер) не реализуется

$$V < V_{cr} = \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)L}{C_z \rho S}} \sqrt{\frac{\tilde{l}}{\tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)}}. \tag{7.28}$$

Таким образом, безразмерная критическая скорость \tilde{V}_{cr} определяется четырьмя безразмерными параметрами $\gamma, \tilde{l}, \tilde{I}, \tilde{k}$ по формуле



$$\tilde{V}_{cr} = \frac{V_{cr}}{\sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)L}{C_z \rho S}}} = \sqrt{\frac{\tilde{l}}{\tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)}}. \tag{7.29}$$

Зависимости безразмерной критической скорости от параметра $\gamma = C_\varphi / C_z$ при различных значениях \tilde{l} представлены на рисунке. Эти зависимости построены по формуле (7.29), в которой безразмерные параметры \tilde{k}, \tilde{I} задавались для случая равных жесткостей пружин $k_1 = k_2$ и оценки момента инерции I_C в предположении, что крыло – стержень:

$$\tilde{I} = I_c / mL^2 = \frac{1}{12}, \quad \tilde{k} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2} = 4.$$

Из представленных на рисунке результатов следует, что с ростом расстояния между центрами инерции и жесткости критическая скорость, пройдя через максимум, уменьшается, т.к. автоколебания реализуются лишь при наличии взаимосвязи между поперечными (изгибными в крыле) и поворотными (крутильными в крыле) колебаниями. Также наблюдается уменьшение критической скорости с ростом параметра γ , поскольку, как это видно из системы уравнений движения (7.22), именно крутящий аэродинамический момент (он пропорционален γ) играет дестабилизирующую роль, обусловленную слагаемым $-\frac{A_\varphi L \cdot}{V} z$ во втором уравнении этой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия: учебник для вузов / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2003.
2. Айзерман М.А. Классическая механика. – М.: Наука, 1974.
3. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2001.
4. Г. Голдстейн Классическая механика / Пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Наука, 1975.
5. Диевский В.А. Теоретическая механика. – СПб.: Лань, 2005.
6. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2005.
7. Журавлёв В. Ф. Основы теоретической механики. – изд. 2-е, перераб. – М.: Физматлит, 2001.
8. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний: учебник для вузов / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2003.
9. Зегжда С.А., Салтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. СПб., 2002.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, том I, . – 3-е изд. – М.: Наука, 1973.
11. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961.
12. Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
13. Парс Л. А. Аналитическая динамика. / Пер. с англ. – М.: Наука, 1971.
14. Суслов Г. К. Теоретическая механика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
15. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1998.
16. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика / Пер. с англ. – М.: ОНТИ, 1937.
17. Четаев Н. Г. Теоретическая механика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
18. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
I. Введение	3
1.1. Классификация связей и обозначения.....	3
1.2. Виртуальные перемещения и вариации координат.....	4
1.3. Обобщенные координаты и скорости.....	5
II. Принципы виртуальных перемещений	7
2.1. Принцип Лагранжа.....	7
2.2. Принцип Даламбера – Лагранжа.....	9
III. Уравнения Лагранжа	10
3.1. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Даламбера – Лагранжа.....	10
3.2. Уравнения Лагранжа для обобщенно – потенциальных сил.....	11
3.3. Функция Лагранжа для различных механических систем.....	12
IV. Уравнения Лагранжа и законы сохранения	16
4.1. Закон сохранения обобщенной энергии.....	16
4.2. Закон сохранения обобщенного импульса.....	17
4.3. Законы сохранения как следствия симметрий пространства-времени.....	18
V. Различные представления законов движения	19
5.1. Канонические уравнения Гамильтона.....	19
5.2. Скобки Пуассона.....	21
5.3. Принципы экстремальности действия Гамильтона и Мопертюи.....	22
5.4. Канонические преобразования.....	25
5.5. Уравнение Гамильтона – Якоби.....	26
VI. Малые колебания систем с конечным числом степеней свободы	27
6.1. Свободные колебания.....	27
6.2. Свободные колебания с трением.....	30
6.3. Вынужденные колебания.....	31
VII. Устойчивость равновесия и движения механических систем	32
7.1. Определение и критерии устойчивости.....	32
7.2. Устойчивость равновесия консервативных систем.....	37
7.3. Автоколебания.....	38
Литература	43