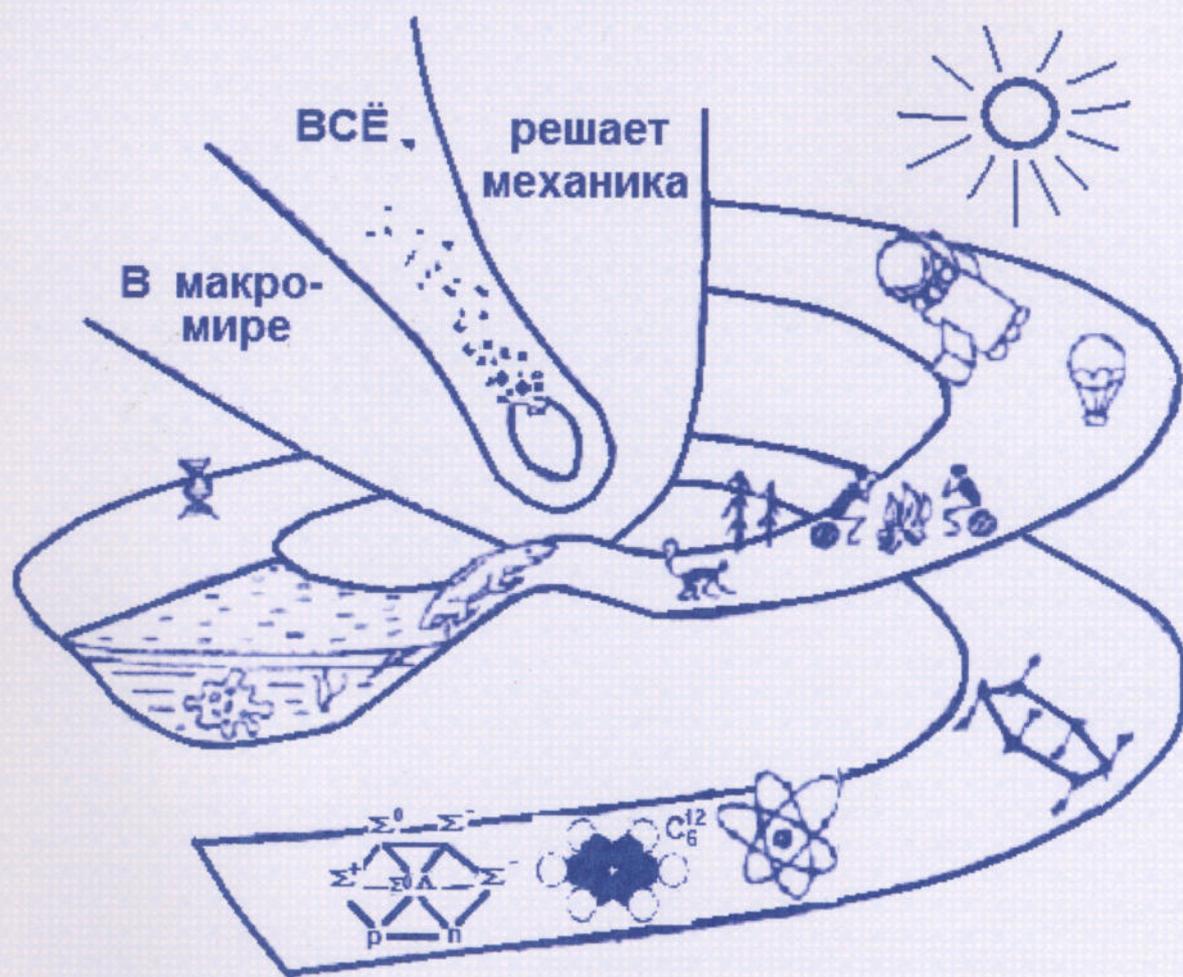


А. В. ОСТРИК

# КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА



Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
**ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР**  
проблем химической физики и медицинской химии РАН

**ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А.А. Леонова**  
Кафедра математики и естественнонаучных дисциплин

**А. В. ОСТРИК**

# **КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

**(учебное пособие)**

**Рецензенты:** член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор И.Б. Петров  
д.ф.-м.н., профессор Д.Л. Ревизников

Черноголовка  
2023

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>ВЕКТОРНАЯ МЕХАНИКА</b>	
<b>I. Введение</b> .....	7
1.1. Предмет физики и её методы исследования.....	7
1.2. Взаимосвязь физики с другими науками.....	8
<b>II. Кинематика</b> .....	11
2.1. Основные положения классической механики.....	11
2.2. Некоторые сведения из векторной алгебры и анализа.....	11
2.3. Кинематика материальной точки и твердого тела.....	13
<b>III. Динамика материальной точки</b> .....	21
3.1. Инерциальные системы отсчета.....	21
3.2. Второй и третий законы Ньютона.....	22
3.3. Реактивное движение. Формула Мещерского.....	23
3.4. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета.....	24
<b>IV. Законы сохранения. Столкновение частиц</b> .....	27
4.1. Закон сохранения импульса системы материальных точек. Задача двух тел.....	27
4.2. Закон сохранения момента импульса.....	29
4.3. Закон сохранения энергии.....	30
4.4. Столкновение частиц.....	34
<b>V. Динамика абсолютно твердого тела</b> .....	39
5.1. Момент инерции. Теорема Штейнера.....	39
5.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.....	40
5.3. Уравнения Эйлера.....	42
5.4. Динамика гироскопов.....	45
<b>VI. Колебания</b> .....	47
6.1. Свободные незатухающие колебания.....	47
6.2. Сложение гармонических колебаний.....	49
6.3. Колебания с трением.....	51
6.4. Вынужденные колебания.....	53
6.5. Автоколебания и параметрические колебания.....	55
<b>VII. Механика жидкостей и газов</b> .....	57
7.1. Модель сплошной среды.....	57
7.2. Уравнения сохранения массы, энергии и импульса.....	57
7.3. Вязкость. Ламинарное и турбулентное течения.....	61
7.4. Течение вязкой жидкости в круглой трубе.....	63
7.5. Лобовое сопротивление и подъемная сила. Сила Стокса.....	64

<b>VIII. Механика деформируемого твердого тела.....</b>	<b>66</b>
8.1. Уравнения теории упругости.....	66
8.2. Упругие волны.....	71
8.3. Фазовая и групповая скорости.....	76
<b>АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА</b>	
<b>I. Введение.....</b>	<b>79</b>
1.1. Классификация связей и обозначения.....	79
1.2. Виртуальные перемещения и вариации координат.....	80
1.3. Обобщенные координаты и скорости.....	81
<b>II. Принципы виртуальных перемещений.....</b>	<b>84</b>
2.1. Принцип Лагранжа.....	84
2.2. Принцип Даламбера – Лагранжа.....	86
<b>III. Уравнения Лагранжа.....</b>	<b>88</b>
3.1. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Даламбера – Лагранжа .....	88
3.2. Уравнения Лагранжа для обобщенно – потенциальных сил.....	89
3.3. Функции Лагранжа для различных механических систем.....	90
<b>IV. Уравнения Лагранжа и законы сохранения.....</b>	<b>96</b>
4.1. Закон сохранения обобщенной энергии.....	96
4.2. Закон сохранения обобщенного импульса.....	97
4.3. Законы сохранения как следствия симметрий пространства-времени.....	98
<b>V. Различные представления законов движения.....</b>	<b>101</b>
5.1. Канонические уравнения Гамильтона.....	101
5.2. Скобки Пуассона.....	103
5.3. Принцип экстремальности действия Гамильтона.....	104
5.4. Вариационный принцип Мопертюи.....	106
5.5. Канонические преобразования.....	108
5.6. Уравнение Гамильтона – Якоби.....	110
<b>VI. Малые колебания систем с конечным числом степеней свободы.....</b>	<b>112</b>
6.1. Свободные колебания.....	112
6.2. Свободные колебания с трением.....	115
6.3. Вынужденные колебания.....	116
<b>VII. Устойчивость равновесия и движения механических систем.....</b>	<b>118</b>
7.1. Определение и критерии устойчивости.....	118
7.2. Устойчивость равновесия консервативных систем.....	123
7.3. Автоколебания .....	124
7.4. Неустойчивость типа флаттера.....	125

*Посвящаю эту книгу моей маме,  
которая может заменить мне всех,  
но никто не заменит её*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью настоящего учебного пособия является начальное ознакомление студентов с общими идеями, принципами и законами, описывающими простейшую форму движения материи – механическое движение. В соответствии с принципом разумной достаточности [27] ставится задача упростить изложение классической механики настолько, насколько это возможно, чтобы все еще достаточно полно изложить суть предмета. В связи с этим в качестве объектов изучения в основном рассматриваются только системы материальных точек с нестационарными, голономными, удерживающими связями.

По классической механике написано много хороших книг, и предлагаемый краткий курс ни в коей мере не может их заменить. Однако при подготовке к экзаменам у студентов нет времени работать с большими объемами литературы в поисках ответов на поставленные программой вопросы. В этих условиях полезно иметь под руками краткое изложение основ механики, представленных с единых методических позиций и в одной системе обозначений.

Пособие состоит из двух частей: векторной и аналитической механики. В первой части рассматриваются система свободных материальных точек и абсолютно твердое тело, для описания механики которых достаточно уже знакомой из школы векторной алгебры. Новым математическим понятием тут является лишь производная вектора по параметру (времени). Для второй части, посвященной механическим системам со связями требуется уже умение дифференцировать функции многих вещественных переменных.

Особенностью курса является широкое использование величин с индексами и правила суммирования по повторяющимся индексам, что существенно сокращает размер выкладок и делает их более обзримыми.

Автор надеется, что учебное пособие окажется полезным для студентов, и с интересом ждет отзывов, пожеланий, замечаний и предложений.

Материала предлагаемого учебного пособия по классической механике, конечно же, недостаточно для глубокого понимания предмета. Более детально рассматриваемые вопросы изложены в следующих книгах.

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т.1, М., 1979.
2. *Сивухин Д.Б.* Общий курс физики, т.1, М., 1975.
3. *Стрелков С.П.* Механика, М., 1985.
4. *Р.Фейнман, Р.Лейтон, М. Сэндс* Фейнмановские лекции по физике, т. 1,2,7, М., "Мир", 1975.
5. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики, М. "Наука", 1975.
6. *Иродов И.Е.* Основные законы механики, М., "Высшая школа", 1975.
7. *Айзерман М.А.* Классическая механика, М., "Наука", 1974.
8. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика, М., "Наука", 1976.

9. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред, М., "Наука", 1982.
10. *Алфутов Н.А., Колесников К.С.* Устойчивость движения и равновесия: : учебник для вузов / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2003.
11. *Айзерман М.А.* Классическая механика. – М.: Наука, 1974.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. – 3-е изд. – М.:Физматлит, 2001.
13. *Г. Голдстейн* Классическая механика / Пер. с англ.– 2-е изд.– М.:Наука, 1975.
14. *Диевский В.А.* Теоретическая механика.– СПб.: Лань, 2005.
15. *Дронг В.И., Дубинин, В.В., Ильин М.М. и др.* Курс теоретической механики: учебник для вузов / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – М.Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2005.
16. *Журавлёв В. Ф.* Основы теоретической механики. – изд. 2-е, перераб. – М.: Физматлит, 2001.
17. *Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С.* Теория колебаний: учебник для вузов / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2003.
18. *Зегжда С.А., Салтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. СПб., 2002.
19. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика, том I, . – 3-е изд. – М.: Наука, 1973.
20. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961.
21. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика: Учебник для университетов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
22. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. / Пер. с англ. – М.: Наука, 1971.
23. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
24. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1998.
25. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика / Пер. с англ. – М.: ОНТИ, 1937.
26. *Четаев Н. Г.* Теоретическая механика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
27. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.

## ВЕКТОРНАЯ МЕХАНИКА

### I. ВВЕДЕНИЕ

#### 1.1 Предмет физики и методы ее исследования

**Физика – это наука о наиболее общих фундаментальных законах природы.** Объектами изучения физики являются материальные структуры окружающего нас мира: элементарные частицы, атомы, молекулы, кристаллы и аморфные тела, силовые поля (электромагнитные, гравитационные, ядерные силы и слабые взаимодействия), а также их строение, взаимодействие и движение.

Число основных законов, описывающих поведение материальных структур, весьма небольшое и заманчиво их сначала привести, а потом показать как они работают в различных условиях, т.е. изложить за пять минут то, что не сделать и за несколько лет. Это, к сожалению, невозможно. Во-первых, не все законы известны. Во-вторых, формулировка наиболее общих законов связана со многими необычными идеями, требующими для описания столь же необычной математики. Поэтому приходится двигаться шаг за шагом, постепенно увеличивая число основных понятий и вводя соответствующий математический аппарат. В основе науки познания лежит следующей принцип: **пробный камень всех наших знаний - это опыт, накапливаемый на практике.** В целом, процесс познания осуществляется по следующей схеме:



Такая схема отражает структуру и последовательность мышления человека, познающего окружающий мир от фактов и эксперимента к центральному обобщению – закону, а от него к конкретным выводам, применяемым на практике.

Заниматься и теорией и экспериментом практически невозможно из-за больших различий в этих этапах процесса познания. Поэтому физики условно делятся на теоретиков и экспериментаторов.

Теоретики воображают, анализируют и формулируют новые законы. Предметом теоретической физики являются модели, заменяющие реальные физические объекты идеальными (например, материальная точка, абсолютно твердое тело, упругое тело, идеальный газ, вязкая жидкость и т. д.; эти модели нам встретятся в дальнейшем). Модели, конечно, не полностью адекватны физическим объектам и отражают лишь его основные черты и связи, важные (проявляющиеся) в изучаемом явлении. Задача теоретиков анализировать результаты экспериментов, на их основе определять границы применимости существующих моделей и строить новые, более точные, модели материальных структур и их взаимодействий. Завершающим этапом построения теории является математическая модель, представляющая собой совокупность уравнений (как правило, дифференциальных или интегральных) с ограничениями (начальными и граничными условиями, дополнительными требованиями гладкости решения, условиями нормировки и т.д.), обеспечивающими существование решения, его единственность и непрерывную зависимость от исходных данных (все это вместе называется корректностью задачи).

Задачи экспериментаторов: создавать установки, ставить на них опыты, формулировать результаты, изменять условия проведения экспериментов и в соответствии с ними

модернизировать установки. Большое внимание экспериментаторам приходится уделять анализу ошибок и работе по их частичному уменьшению. Ошибки делятся на систематические и случайные. **Случайные ошибки** (обусловленные, например, сейсмическими колебаниями оснований установок, тепловыми флуктуациями и т.д.) полностью в принципе не устранимы и могут быть лишь снижены до определенного уровня. Оценки величин этих ошибок делаются на основе статистической теории обработки эксперимента, опирающейся на теорию вероятности. Наиболее опасны **систематические ошибки** (например, неисправность измерительного прибора или неучет влияния каких-либо побочных явлений, существенно изменяющих результаты, или использование при косвенных измерениях неверных данных других экспериментов), которые себя никак не проявляют, но могут привести к неверным результатам. Борьба с ними можно с помощью проведения независимых экспериментов на основе отличающихся средств измерения и (или) других физических явлений. Различие в полученных при этом результатах и будет являться указанием на возможность наличия в одном из экспериментов систематической ошибки. Следует отметить, что в настоящее время экспериментальная физика стала коллективным и даже государственным делом, поскольку для проведения экспериментов требуется создание дорогостоящих, крупногабаритных и весьма сложных установок, объединяющих в себе идеи и плоды исследований из различных пограничных областей науки.

Хотя мир – един, и все физические явления, как правило, взаимосвязаны, для удобства изучения физика условно разбивается на механику, статистическую физику и термодинамику, электромагнетизм, оптику, квантовую механику, атомную физику и т.д. Мы будем изучать наиболее простой и интуитивно легче всего воспринимаемый раздел физики – классическую механику.

## **1.2 Взаимосвязь физики с другими науками** (раздел написан под сильным влиянием замечательных лекций по физике [4])

Физика, являясь наукой о фундаментальных законах природы, тесно связана и оказывает огромное влияние на соседние области естествознания, а также другие направления деятельности и творчества человечества.

Прежде всего - на **математику**. **Математика - язык физики**, средство для количественного описания физических процессов.

Подчеркивая значение математики для физической науки, один известный физик определил ее как попытку заставить природу подчиняться математике. Поэтому математика может нравиться или нет, но без ее знания изучение физики невозможно. В свою очередь, физика тоже помогает математике: поставляет ей новые идеи, а иногда и даже целые направления для исследований. Например, обобщенные функции (в частности,  $\delta$  - функция Дирака) возникли первоначально в физике без должного обоснования, а затем уже усилиями математиков была построена теория обобщенных функций.

Наиболее тесно взаимосвязана физика с **химией**. В результате кропотливого изучения свойств химических элементов в химии была построена периодическая система Д.И.Менделеева. Теоретическое же обоснование этого открытия стало возможным лишь после создания нового раздела физики – квантовой механики. Поэтому **в основах теоретической химии лежит квантовая механика**. Кроме того, у химии и физики есть общий раздел – это статистическая механика, описывающая системы, содержащие большое количество частиц. При любой химической реакции число атомов – велико и они движутся случайным образом. В такой ситуации как раз и применимы статистические методы описания поведения систем, поскольку прямая попытка расчета движения каждого атома в отдельности не под силу даже современным ЭВМ. В физике статисти-

ческая механика необходима, прежде всего, для обоснования положений термодинамики.

К физике и химии близко примыкает **биология – наука о живом**. Именно при экспериментах над замкнутыми системами, содержащими в своем составе живые организмы, был открыт один из основных законов физики – закон сохранения энергии. Органическая химия изучает состав, строение и химические свойства веществ, синтезируемых живой материей. В функционировании организмов можно наблюдать много физических процессов: циркуляцию крови, ее давление, передачу электрических сигналов по нервным тканям, работу хрусталика как фокусирующей линзы и т.д. Однако было бы неправомерным сводить биологию к физике. Один из создателей квантовой механики Э. Шредингер в книге "Что такое жизнь" убедительно показывает, что многие явления жизни не поддаются объяснению на основе известных физических законов. Более того, на современном этапе такое сложное явление как жизнь не удастся объяснить, оставаясь в рамках узко материалистического миропонимания (например, материалистическая теория происхождения видов Дарвина подвергается в настоящее время конструктивной критике, но остается неясным, чем ее можно бы было заменить, поскольку предлагаемые теории "квантовых" скачков в эволюции видов неизбежно приводят к выводу об участии в таких скачках духовного начала). В то же время физика обеспечивает биологию измерительной аппаратурой для проведения исследований. Физические явления используются также в медицине для поддержания жизни и диагностики (например, действие лазерного излучения для исправления дефектов глаза и разрушения камней в почках).

Следующая близкая к физике наука – **астрономия**. Астрономия старше физики. Именно экспериментально наблюдаемая астрономами простота в закономерностях движения звезд и планет послужила толчком к открытию законов механики и началу развития физики как науки. **Выдающимся открытием астрономии было то, что все звезды состоят из тех же атомов, что и Земля**. Следовательно, в астрономии можно использовать физические законы, которые были открыты и экспериментально проверены в земных условиях. Физика помогла астрономии объяснить источники энергии звезд как термоядерные реакции, теоретически предсказать такие нетривиальные объекты как пульсары, черные дыры и многое другое (этими вопросами в настоящее время занимается часть физики – астрофизика).

С физикой тесно связаны также **геология – наука о Земле и метеорология – наука о погоде на Земле**. Метеорология снабжена приборами благодаря развитию экспериментальной физики. Однако исчерпывающая теория для предсказания погоды до сих пор не разработана. На первый взгляд кажется странным почему, зная состояние воздуха сегодня, мы не можем предсказать его завтра. Вся причина в неустойчивости атмосферных течений. На самом деле мы не знаем состояния атмосферы и сегодня, т.к. из-за неустойчивости воздушной массы все время происходит ее завихрение (аналогично тому, как состояние воды до падения с плотины хорошо известно, а после падения завихряется и разбивается на струи совершенно непредсказуемым образом). Такое неустойчивое поведение газа или жидкости называется турбулентным течением, плохо поддающимся детерминированному описанию, и в связи с этим уверенно предсказывать погоду мы до сих пор не умеем.

Переходя к геологии, следует отметить, что главным вопросом этой науки является вопрос о том, как Земля стала такой, какая она есть. В повседневной жизни мы наблюдаем течение разрушительных процессов: реки подмывают берега, поля заносятся пылью, с горных вершин падают камни и т.д. Однако горы сейчас не ниже, чем были в

прошлом. Следовательно, наряду с разрушением горных массивов идет процесс горообразования. Но пока остается не вполне ясным, почему и как происходят восстановительные процессы типа горообразования. Не лучше обстоит дело с исследованием процессов в недрах Земли. Хорошо известно распределение плотности вещества внутри планеты, однако до сих пор не построена удовлетворительная теория состояния вещества при давлениях и температурах, характерных для внутренних оболочек Земли. Как это не парадоксально, состояние вещества в звездах, где температура выше, мы знаем лучше, чем на нашей собственной планете.

**Психология, парапсихология, психоанализ, гипноз** и т.д. – это, с точки зрения физика, скорее не науки, т.к. на современном этапе они не поддаются объяснению на основе известных физических законов. Но и здесь есть ряд очень интересных, чисто физических задач и проблем. Например: пусть животное чему-то научилось, чего прежде не умело делать – значит что-то изменилось в клетках головного мозга или еще где-то; в чем состоит это изменение и где оно произошло – неизвестно. Это очень важная проблема и притом в значительной степени нерешенная. Близкая к ней проблема распознавания образов, тесно связанная с психологией и физикой системы "глаз-мозг". Для этой области характерным является пример выдающегося специалиста космонавтики и искусствоведения академика Б.В. Раушенбаха: удаление предмета не соответствует его видимому размеру, т.к. согласно требованиям подобия предмет с удалением должен уменьшаться, а глаз стремится сохранить размер неизменным, сам или с помощью мозга как-то "пересчитывая" его.

Даже это небольшое число примеров показывает, что успехи в физике плодотворно сказываются на развитии смежных с ней наук, а она, в свою очередь, впитывает все их достижения.

## **ВОПРОСЫ**

1. Что такое физика? Какие объекты она изучает?
2. В какой последовательности осуществляется процесс познания?
3. Чем занимаются теоретики и чем - экспериментаторы?
4. Какие модели физических объектов Вы знаете?
5. Чем отличаются систематические ошибки от случайных?
6. С какими науками физика наиболее тесно связана?
7. Какова роль математики в физике?
8. Как взаимосвязаны физика и химия?
9. Какие открытия в астрономии наиболее сильно повлияли на развитие физики?
10. Что дает физика для развития науки о живом – биологии?
11. Можно ли полностью объяснить явления в живой материи на основе физических законов?
12. Почему физики не могут точно предсказывать погоду?
13. Какова главная проблема в геологии?
14. Из каких разделов состоит физика?

## II. КИНЕМАТИКА

### 2.1. Основные положения классической механики

Механика – раздел физики, изучающий простейшую форму движения материи – механическое движение, т.е. движение материальных объектов в пространстве и времени. Это определение имеет смысл, если установлено, что означают термины: "движение", "материальные объекты", "пространство", "время". Далее мы будем рассматривать случай, когда скорости материальных объектов  $V$  малы по сравнению со скоростью света  $C$  ( $C=300000\text{км/с}$ ):  $V/C \ll 1$ . Механика при таких скоростях называется классической. В классической механике предполагается, что **свойства пространства и времени не зависят от того, какие материальные объекты в них движутся**. Это позволяет изучать способы описания движения независимо от физических свойств движущихся объектов. **Раздел механики, где изучаются способы описания движения независимо от причин (причины изучаются в динамике), вызывающих это движение, называется кинематикой:**

$$\boxed{\text{кинематика}} = \boxed{\text{геометрия}} + \boxed{\text{хронометрия}}$$

Вообще говоря, кинематика – часть математики, но поскольку хронометрия мало что добавляет к геометрии, то кинематика не интересует математиков и рассматривается в курсах физики.

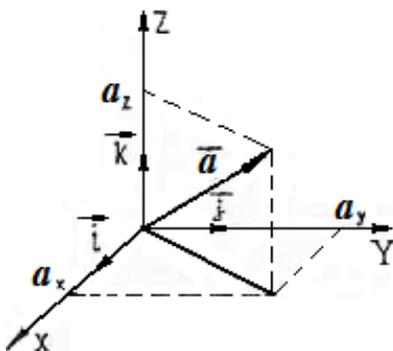
**Движение определяется как изменение положения одних тел относительно других.** Эти другие тела называются телами отсчета. Как правило, с ними связывают систему координат. **Совокупность тел отсчета, связанных с ними систем координат и синхронизированных между собой часов (приборов для измерения промежутков времени между событиями) называется системой отсчета.** В классической механике линейные масштабы и промежутки времени между событиями остаются неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой. Кроме того, предполагается, что **пространство и время – абсолютны**, т.е. не зависят друг от друга и от выбора системы отсчета. **Пространство и время считается евклидовыми, однородными и изотропными** (время – изотропно только в механике). При этом все системы отсчета равноправны и можно говорить лишь о движении одной системы отсчета относительно другой, но нельзя говорить об абсолютном движении системы отсчета.

Теперь о материальных объектах (телах). В качестве моделей материальных объектов в механике наиболее часто рассматриваются материальная точка (м.т.) и абсолютно твердое тело (а.т.т). **Материальная точка – тело, линейными размерами которого в условиях задачи можно пренебречь.** **Абсолютно твердое тело – система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения,** т.е. деформации тела либо несущественны для решаемой задачи, либо пренебрежимо малы.

### 2.2. Некоторые сведения из векторной алгебры и анализа

Математическое описание задач механики невозможно без знания основ векторной алгебры, поскольку основные параметры, описывающие движение (положение м.т., ее скорость, ускорение) являются векторными величинами. Приведем некоторые сведения из векторной алгебры и векторного анализа.

**Вектором называется направленный отрезок, характеризуемый длиной (модулем) и направлением в про-**



**странстве.** Другое определение вектора опирается на используемые системы координат: **вектор есть объект, описываемый в каждой системе координат тройкой чисел, называемых компонентами, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются как проекции направленного отрезка.** Часто используется понятие единичного вектора – вектора, длина которого равна единице. Так, единичный вектор  $\vec{e}$  в направлении некоторого вектора  $\vec{a}$  равен

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

где  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$  – модуль вектора  $\vec{a}$ .

В дальнейшем будем использовать ортонормированные декартовы системы координат  $X, Y, Z$  с ортонормированным базисом, состоящим из трех единичных взаимно перпендикулярных векторов  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Любой вектор может быть единственным образом разложен по базисным векторам  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (см. рис.):

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Операции сложения и умножения на число вводятся для векторов так, чтобы им соответствовали те же операции над компонентами. Например:

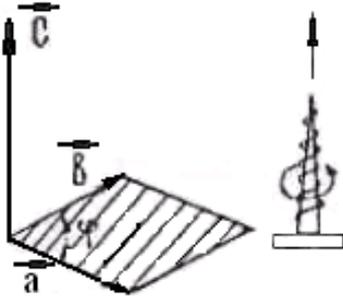
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}.$$

Кроме того, вводятся три операции умножения.

**Скалярное умножение**  $(\vec{a}, \vec{b})$  – это скаляр, определяемый следующим образом:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\varphi) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

**Векторное умножение**  $[\vec{a}, \vec{b}]$  двух векторов определяется вектором  $\vec{c}$ , длина которого равна площади параллелограмма, построенного на сторонах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а направление перпендикулярно к  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причем так, что вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют правую тройку векторов (правило буравчика, см. рисунок). В силу определения



$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\varphi),$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Для векторного умножения справедливы соотношения:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}], \quad [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}).$$

**Смешанное умножение** трех векторов есть скаляр  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  как на ребрах:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Для векторных функций от параметра  $t$  (далее в качестве параметра  $t$  рассматривается время)  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  вводится понятие производной по параметру (производную  $\frac{d}{dt}$  будем, когда это удобно, обозначать точкой сверху дифференцируемой величины):

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}.$$

Производная векторной функции обладает свойствами, аналогичными свойствам производной от скалярной функции, например:

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}, \vec{b}] = \left[ \dot{\vec{a}}, \vec{b} \right] + \left[ \vec{a}, \dot{\vec{b}} \right], \quad \frac{d}{dt}(\vec{a}, \vec{b}) = \left( \dot{\vec{a}}, \vec{b} \right) + \left( \vec{a}, \dot{\vec{b}} \right).$$

### 2.3. Кинематика материальной точки и твердого тела

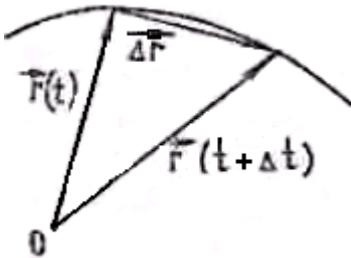
Перейдем теперь к изучению кинематики. Основная задача кинематики состоит в том, чтобы задать или определить положение движущихся м.т. или а.т.т. относительно некоторой системы отсчета в каждый момент времени. При этом причины движения – действующие на тела силы и их связи с кинематическими параметрами – не рассматриваются.

В кинематике возникают следующие три основные задачи.

1. Имеется неподвижная система отсчета и связанный с ней наблюдатель. Необходимо описать движение м.т. относительно наблюдателя.

2. Заданы две системы отсчета и наблюдатель, связанный с первой системой. Описать движение второй системы отсчета относительно наблюдателя. Поскольку со второй системой отсчета можно связать абсолютно твердое тело, то сформулированная ситуация эквивалентна задаче описания движения а.т.т. относительно неподвижного наблюдателя.

3. Имеется две системы отсчета и с каждой из них связан наблюдатель. Известно движение м.т. относительно одной из систем и движение этой системы относительно другой. Определить движение точки относительно этой другой системы отсчета.



Таким образом, возникает задача перехода в описании движения м.т. относительно наблюдателей, связанных с различными системами отсчета.

Начнем с кинематики точки – описания движения м.т. относительно неподвижной системы координат (**первая задача кинематики**). Рассматривают три способа описания движения м.т.: векторный, координатный и естественный.

**Векторный способ** – положение точки задается ее радиусом вектором  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  с началом в некоторой неподвижной точке \$O\$. Тогда мгновенная скорость м.т.  $\vec{V}$  и ее ускорение  $\vec{a}$  определяются через векторную функцию  $\vec{r}(t)$  по следующим формулам:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t),$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t).$$

При этом отметим, что  $|\vec{V}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \neq \frac{dr}{dt}$ , т.к.  $dr = d|\vec{r}| \neq |d\vec{r}|$  (например, при движении по окружности  $dr = 0$ , а  $|d\vec{r}| \neq 0$ ).

*Пример 2.1.* Пусть задан закон движения м.т. в векторном виде:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$ ,  $\vec{r}_0 = const$ ,  $\vec{V}_0 = const$ ,  $\vec{g} = const$ . Тогда по выше приведенным формулам получаем:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_0 + \vec{g}t, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g}.$$

Следовательно, заданный закон описывает равноускоренное движение с ускорением  $\vec{g}$  и начальной скоростью  $\vec{V}_0$ .

Возникает и обратная задача: зная ускорение  $\vec{a}(t)$ , определить радиус-вектор  $\vec{r}(t)$ . В этом случае оказывается необходимым кроме  $\vec{a}(t)$  знать и начальные условия  $\vec{V}_0$  и  $\vec{r}_0$ , т.е. значения  $\vec{V}$  и  $\vec{r}$  при  $t=0$ . Пусть, например, имеем  $\vec{a}(t) = \vec{g} = const$ , тогда

$$\Delta \vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_0 = \int_0^t \vec{a}(t) dt = \int_0^t \vec{g} dt = \vec{g} \int_0^t dt = \vec{g}t,$$

откуда

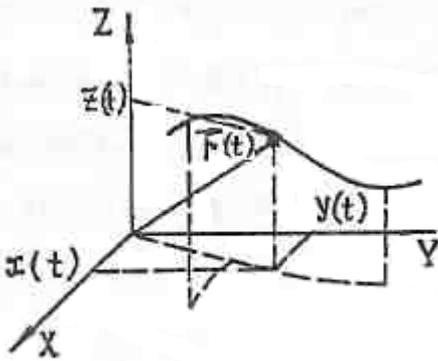
$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t.$$

Аналогично для радиуса - вектора получаем:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{V}(t) dt = \int_0^t (\vec{V}_0 + \vec{g}t) dt = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

откуда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$



При **координатном способе** описания движения положение м.т. задается тремя скалярными функциями, которые представляют собой координаты движущейся точки в системе координат, жестко связанной с телом отсчета. Для декартовой системы координат имеем (см. рис.)  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

Прямоугольные декартовы координаты  $x, y, z$  являются проекциями радиуса - вектора  $\vec{r}$ , проведенного в рассматриваемую точку из начала координат, т.е.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Тогда скорость и ускорение м.т. определяются по следующим формулам:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k},$$

откуда

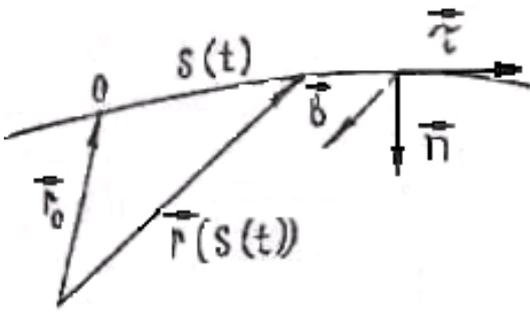
$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt},$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = V_x / V, \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = V_y / V, \quad \cos(\vec{V}, \vec{k}) = V_z / V, \quad V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = a_x / a, \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = a_y / a, \quad \cos(\vec{a}, \vec{k}) = a_z / a, \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При естественном способе описания движения м. т. задают форму траектории, начало отсчета на ней (т.  $O$ ) и дуговую координату (расстояние вдоль траектории от начала отсчета  $O$  до текущего положения точки  $S = S(t)$ ) (см. рис.). Скорость и ускорение



м.т. выражаются через форму траектории  $\vec{r} = \vec{r}(S)$  и производные функции  $S(t)$ . Знание формы траектории позволяет в каждой ее точке определить кривизну  $1/\rho$ , а также построить сопровождающий трехгранник:  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$  ( $\vec{\tau}$ -единичный вектор касательный к траектории,  $\vec{n}$ -единичный вектор главной нормали,  $\vec{b} = [\vec{n}, \vec{\tau}]$ -единичный вектор би-нормали) по заданной векторной функции

$\vec{r} = \vec{r}(S)$ . Направление касательного вектора  $\vec{\tau}$  совпадает с направлением приращения радиус-вектора  $d\vec{r}$ , и поскольку величина  $|d\vec{r}|$  с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна элементу дуги  $dS$ , то

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS}.$$

Второй орт  $\vec{n}$  направлен по приращению  $d\vec{\tau}$ , т.е. по главной нормали к траектории

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} = \left| \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \right| \vec{n}.$$

По определению радиус кривизны траектории  $\rho$  есть отношение приращения длины дуги  $dS$  к  $d\alpha$ -углу между  $\vec{r}$  и  $\vec{r} + d\vec{r}$ :

$$\rho = \frac{dS}{d\alpha}.$$

Т.к. модуль приращения касательного единичного вектора  $d\vec{\tau}$  с точностью до величин высшего порядка малости равен углу  $d\alpha$ , то

$$\rho = \frac{dS}{d\alpha} = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{\tau}}{dS} \right|} = \left| \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \right|^{-1}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{\vec{n}}{\rho}.$$

Рассмотренных характеристик и соотношений (эти соотношения строго доказываются в курсе дифференциальной геометрии) достаточно для определения  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$ :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt} \vec{\tau}, \quad \text{т.е.}$$

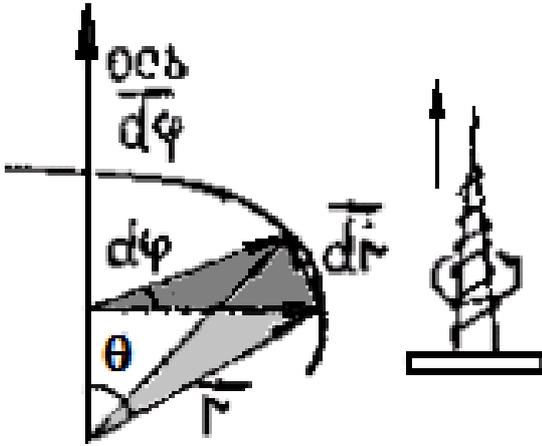
$$\vec{V} = \frac{dS}{dt} \vec{\tau} \quad V = |\vec{V}| = \left| \frac{dS}{dt} \vec{\tau} \right| = \left| \frac{dS}{dt} \right| |\vec{\tau}| = \left| \frac{dS}{dt} \right|,$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dS}{dt} \vec{\tau} \right) = \frac{d^2S}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{dS}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{dS}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 \vec{n}.$$

Итак,

$$\vec{a} = \frac{d^2S}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 \vec{n} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n}, \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left( \frac{dV}{dt} \right)^2 + \frac{V^4}{\rho^2}}.$$

Проекция  $a_\tau$  называется тангенциальной составляющей ускорения, а проекция  $a_n$  – нормальной составляющей. Из полученных соотношений следует, что скорость всегда направлена по касательной к траектории, а проекция ускорения на бинормаль равняется нулю (вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости).



Перейдем к рассмотрению **второй задачи кинематики** – описанию движения одной системы отсчета относительно другой (кинематики абсолютно твердого тела). Рассмотрим сначала частный случай вращения а.т.т. вокруг неподвижной оси. При таком движении все точки а.т.т. описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Тогда (см. рис.)  $|d\vec{r}| = r \sin(\theta) d\varphi$  и, следовательно,

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}] \quad (2.1)$$

где  $d\vec{\varphi}$  – направленный вдоль оси вращения вектор, модуль которого равен  $d\varphi$ , а направление определяется по правилу "буравчика" (см. рис.). Отметим, что для конечного поворота  $|\Delta\vec{r}| = 2r \sin(\theta) \sin(\Delta\varphi/2)$  и соотношение, аналогичное (2.1), не выполняется.

Легко показать, что справедлив закон векторного сложения малых поворотов. Пусть твердым телом совершено два поворота  $d\vec{\varphi}_1$  и  $d\vec{\varphi}_2$  вокруг осей 1 и 2, соответственно. Тогда

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = [d\vec{\varphi}_1, \vec{r}] + [d\vec{\varphi}_2, \vec{r}] = [d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2, \vec{r}] = [d\vec{\varphi}, \vec{r}],$$

т.е. на самом деле два малых поворота эквивалентны одному, являющемуся их векторной суммой

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2. \quad (2.2)$$

Введем теперь вектора угловой скорости и углового ускорения

$$\vec{W} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \vec{\beta} = \frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует справедливость векторного сложения для угловых скоростей (а значит и ускорений).

$$\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2. \quad (2.4)$$

Деля соотношение (2.1) на  $dt$ , получаем связь между линейными и угловыми скоростями для точек а.т.т., вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\vec{V} = [\vec{W}, \vec{r}], \quad V = |\vec{V}| = |\vec{W}| |\vec{r}| \sin(\vartheta) = W \rho, \quad (2.5)$$

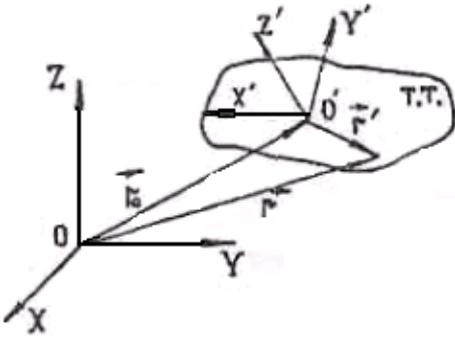
где  $\rho$  - расстояние от точки до оси вращения. Используя соотношение (2.5), определяем ускорение точки а.т.т.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{W}, \vec{r}] = \left[ \frac{d\vec{W}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[ \vec{W}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{W}, \vec{V}] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}]].$$

Итак, ускорение точки а.т.т. состоит из двух частей: тангенциального  $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}]$  и нормального  $\vec{a}_n = [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}]] = W^2 \rho \vec{n}$ . Следовательно,

$$a = |\vec{a}| = \rho \sqrt{\beta^2 + W^4}.$$

Рассмотрим теперь общий случай движения а.т.т. относительно некоторой системы отсчета  $OXYZ$ . Свяжем с твердым телом штрихованную систему отсчета  $O'X'Y'Z'$  (см. рис.). Пусть положение начала координат  $O'$  относительно системы  $OXYZ$  определяется



вектором  $\vec{r}_0$ . Положение любой точки а.т.т. в ней – вектором  $\vec{r}$ , а в системе  $O'X'Y'Z'$  – вектором  $\vec{r}'$ . Учитывая, что угловые скорости можно векторно складывать, а производная единичного вектора перпендикулярна к нему, можно получить общее выражение для угловой скорости

$$\vec{W} = W'_x \vec{i}' + W'_y \vec{j}' + W'_z \vec{k}' = \begin{pmatrix} \dot{j}', \vec{k}' \end{pmatrix} \vec{i}' + \begin{pmatrix} \dot{k}', \vec{i}' \end{pmatrix} \vec{j}' + \begin{pmatrix} \dot{i}', \vec{j}' \end{pmatrix} \vec{k}'. \quad (2.6)$$

Производные по времени для любого орта штрихованной системы координат выражаются через вектор угловой скорости

$$\dot{i}' = [\vec{W}, \vec{i}'], \quad (2.7)$$

т.к.

$$\begin{aligned} [\vec{W}, \vec{i}'] &= \left[ \begin{pmatrix} \dot{j}', \vec{k}' \end{pmatrix} \vec{i}' + \begin{pmatrix} \dot{k}', \vec{i}' \end{pmatrix} \vec{j}' + \begin{pmatrix} \dot{i}', \vec{j}' \end{pmatrix} \vec{k}', \vec{i}' \right] = \\ &= - \begin{pmatrix} \dot{k}', \vec{i}' \end{pmatrix} \vec{k}' + \begin{pmatrix} \dot{i}', \vec{j}' \end{pmatrix} \vec{j}' = \begin{pmatrix} \dot{i}', \vec{k}' \end{pmatrix} \vec{k}' + \begin{pmatrix} \dot{i}', \vec{j}' \end{pmatrix} \vec{j}' = \dot{i}'. \end{aligned}$$

При выводе (2.7) использовалось равенство  $\begin{pmatrix} \dot{k}', \vec{i}' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dot{i}', \vec{k}' \end{pmatrix}$ , которое получается

дифференцированием по времени условия перпендикулярности векторов  $\vec{i}'$  и  $\vec{k}'$ :  $(\vec{i}', \vec{k}') = 0$ .

Равенство (2.7) позволяет получить соотношение между производными по времени любого вектора  $\vec{b}$  в штрихованной и нештрихованной системах координат:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{b}}{dt} &= \frac{d}{dt} (b_x \vec{i}' + b_y \vec{j}' + b_z \vec{k}') = \left( \dot{b}_x \vec{i}' + \dot{b}_y \vec{j}' + \dot{b}_z \vec{k}' \right) + \left( b_x \dot{\vec{i}}' + b_y \dot{\vec{j}}' + b_z \dot{\vec{k}}' \right) = \\ &= \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)' + (b_x [\vec{W}, \vec{i}'] + b_y [\vec{W}, \vec{j}'] + b_z [\vec{W}, \vec{k}']) = \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)' + [\vec{W}, b_x \vec{i}' + b_y \vec{j}' + b_z \vec{k}'] = \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)' + [\vec{W}, \vec{b}]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right)' + [\vec{W}, \vec{b}]. \quad (2.8)$$

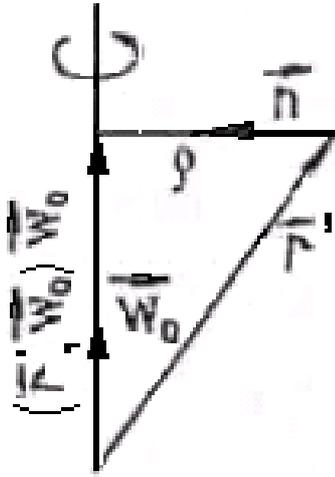
Согласно (2.8), даже в том случае, когда вектор  $\vec{b}$  "вморожен" в твердое тело, связанное со штрихованной системой координат, его производная  $d\vec{b}/dt$  оказывается отличной от нуля из-за наличия вращения а.т.т..

Используя соотношение (2.8), легко определить скорости и ускорения точек, связанных со штрихованной системой координат (точек а.т.т.), относительно нештрихованной. Из рисунка видно, что  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ . Дифференцируя это равенство с учетом  $d\vec{r}'/dt = 0$ , получаем:

$$\begin{aligned} \vec{V} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_0 + \vec{r}') &= \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}' = \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'], \text{ т.е.} \\ \vec{V} &= \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) с учетом (2.8), находим ускорение ( $\vec{\beta} = d\vec{V}/dt$ )

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}']) = \dot{\vec{V}}_0 + [\dot{\vec{W}}, \vec{r}'] + [\vec{W}, \dot{\vec{r}}'] = \vec{a}_0 + [\vec{\beta}, \vec{r}'] + [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']].$$



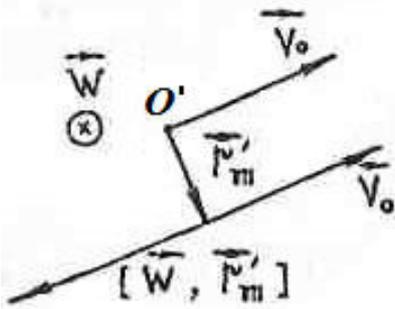
Таким образом, **полное ускорение** точек а.т.т. складывается из трех составляющих: **ускорения полюса  $O'$**  (произвольной точки а.т.т. из которой проводится  $\vec{r}'$ )  $\vec{a}_0 = \frac{d}{dt}\vec{V}_0$ ; **вращательного ускорения**, обусловленного изменением угловой скорости и в общем случае вращения (не вокруг неподвижной оси) направленного не по касательной к траектории  $\vec{a}_\beta = [\vec{\beta}, \vec{r}']$  и **осестремительного ускорения**  $\vec{a}_w = [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']]$ , называемого так из-за того, что оно направлено перпендикулярно к мгновенной оси вращения (см. рис.). Можно показать, раскрывая двойное векторное произведение и вводя единичный вектор  $\vec{W}_0$  в направлении вектора  $\vec{W}$ , что осестремительное ускорение связано с угловой скоростью  $\vec{W}$  и радиусом кривизны  $\rho$  следующим соотношением (см. рис.)

$$\vec{a}_w = [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']] = W^2(\vec{W}_0, (\vec{W}_0, \vec{r}') - \vec{r}') = W^2 \rho \vec{n}.$$

Итак, полное ускорение точек а.т.т.

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\beta + \vec{a}_w.$$

**Пример 2.2.** В качестве примера рассмотрим случай **плоского** или **плоско-параллельного** движения, т.е. движения, при котором каждая точка а.т.т. движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости. Поскольку через данную точку можно провести лишь одну плоскость, параллельную заданной, то точки тела, принадлежащие рассматриваемой плоскости в момент  $t=0$ , останутся в этой плоскости и при  $t > 0$ . Следовательно, положение а.т.т. при плоско-параллельном движении определяется положением любого сечения тела



плоскостью, параллельной неподвижной. Тем самым **плоско - параллельное движение сводится к плоскому**. Плоское движение, в свою очередь, можно свести к чистому вращению, т.е. в каждый момент найти точку (положение мгновенной оси вращения), где  $\vec{V} = 0$  (см. рис.). Будем искать радиус-вектор этой точки в виде  $\vec{r}'_m = \alpha[\vec{V}_0, \vec{W}]$ , определяя  $\alpha$  из условия равенства скорости нулю  $\vec{V} = \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'_m] = 0$ . Тогда  $\vec{V}_0 + \alpha[\vec{W}, [\vec{V}_0, \vec{W}]] = 0$  и раскроем двойное векторное произведение

$$\vec{V}_0 + \alpha(\vec{V}_0 W^2 - \vec{W}(\vec{V}_0, \vec{W})) = 0.$$

Поскольку в силу перпендикулярности векторов  $\vec{V}_0$  и  $\vec{W}$  имеем  $(\vec{V}_0, \vec{W}) = 0$ , то  $\alpha = -1/W^2$ , откуда  $\vec{r}' = -[\vec{V}_0, \vec{W}]/W^2$  и  $|\vec{r}'| = V_0/W$ . Примером плоско-параллельного движения является качение цилиндра по плоскости. В отсутствии проскальзывания мгновенная ось вращения проходит через точку касания цилиндра с плоскостью.

**Третья задача кинематики** – кинематика сложного движения. По известному движению м.т. относительно штрихованной системы отсчета  $O'X'Y'Z'$  и известному движению этой системы относительно нештрихованной  $OXYZ$  определить движение м.т. относительно системы  $OXYZ$  (см. рис.). Используя (2.8), получаем

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_0 + \vec{r}') = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}' = \vec{V}_0 + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)' + [\vec{W}, \vec{r}'] = \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'] + \vec{V}'.$$

Откуда следует **закон сложения скоростей Галилея**:

$$\vec{V} = \vec{V}_{con} + \vec{V}_{rel}, \quad (2.10)$$

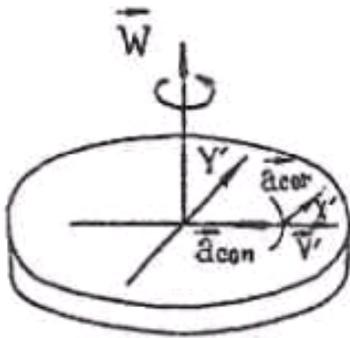
где  $\vec{V}_{con} = \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}']$  – **переносная скорость** – скорость той точки среды, связанной с системой координат  $O'X'Y'Z'$ , в которой в данный момент находится м.т.;  $\vec{V}_{rel} = \vec{V}'$  – **относительная скорость** – скорость м.т. относительно штрихованной системы координат (относительно среды). Аналогично для ускорения  $\vec{a}$  находим:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt}(\vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'] + \vec{V}') = \dot{\vec{V}}_0 + \left[\dot{\vec{W}}, \vec{r}'\right] + [\vec{W}, \dot{\vec{r}}'] + \dot{\vec{V}}' = \\ &= \vec{a}_0 + [\vec{\beta}, \vec{r}'] + [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}'] + \vec{V}'] + \vec{a}' + [\vec{W}, \vec{V}'] = \\ &= \vec{a}_0 + [\vec{\beta}, \vec{r}'] + [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']] + \vec{a}' + 2[\vec{W}, \vec{V}'], \end{aligned}$$

откуда следует закон сложения ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_{con} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}, \quad (2.11)$$

где  $\vec{a}_{con} = \vec{a}_0 + [\vec{\beta}, \vec{r}'] + [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']]$  – **переносное ускорение**;  $\vec{a}_{rel} = \vec{a}'$  – **относительное ускорение**;  $\vec{a}_{cor} = 2[\vec{W}, \vec{V}']$  – **кориолисово ускорение**. Следует отметить, что, в отличие от



закона сложения скоростей Галилея, ускорение сложного движения не равно сумме ускорений переносного и относительного движений, т.к. в тех случаях, когда  $[\vec{W}, \vec{V}'] \neq 0$ , дополнительно возникает кориолисово ускорение. Кориолисово ускорение действует на м.т., движущиеся относительно вращающейся среды  $O'X'Y'Z'$ . Оно возникает по двум физически различным причинам, которые мы рассмотрим на примере движения м.т. по диску, вращающемуся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси (примеры 2.3, 2.4).

*Пример 2.3. При относительном движении вдоль радиуса диска с постоянной скоростью  $\vec{V}'$  (см. рис.) изменяется расстояние до оси вращения, что приводит к росту линейной скорости вращения и является следствием отличного от нуля кориолисова ускорения  $\vec{a}_{cor}$ .*

На самом деле, прямые вычисления показывают совпадение величины ускорения, обусловленного изменением линейной скорости вращения, с кориолисовым ускорением, равным в данном случае  $a_{cor} = 2|\vec{W}||\vec{V}'|$ . Пусть  $x = r \cos(Wt)$  и  $y = r \sin(Wt)$ , тогда (учте-

но, что  $\dot{r} = V'$ ,  $\ddot{r} = 0$ )

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -W^2r \cos(Wt) + 2WV' \sin(Wt),$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -W^2r \sin(Wt) - 2WV' \cos(Wt),$$

т.е. мы получили законы преобразования компонент ускорений при переходе от вращающейся вместе с диском штрихованной системы координат к нештрихованной

$$a_x = a'_x \cos(\varphi) + a'_y \sin(\varphi),$$

$$a_y = a'_x \sin(\varphi) - a'_y \cos(\varphi),$$

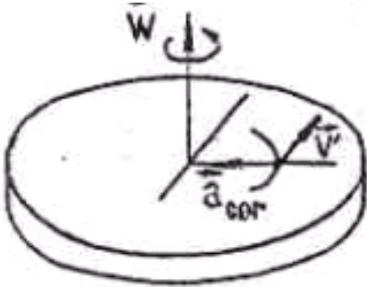
где  $\varphi = \omega t$  – угол поворота штрихованной системы координат относительно нештрихованной;  $a'_x = -\omega^2 r$  – осеостремительное ускорение;  $a'_y = 2\omega V'$  – кориолисово ускорение. Компонента ускорения  $a'_y = 2\omega V'$  перпендикулярна радиусу и обеспечивает

рост линейной скорости при увеличении расстояния м.т. от оси вращения.

Пример 2.4. Относительное движение совершается по одной из окружностей на диске с равномерной относительной скоростью  $V'$ . Т.к.  $a_{rel} = a' = V'^2 / r$ , то

$$a = (V' + \omega r)^2 / r = V'^2 / r + \omega^2 r + 2\omega V' = a_{rel} + a_{con} + a_{cor}.$$

Следовательно, в этом случае кориолисово ускорение обеспечивает часть осеостремительного ускорения в неподвижной системе координат.



## ВОПРОСЫ

1. Что изучает механика?
2. Что изучают кинематика и динамика?
3. Дайте определения механического движения, системы отсчета, системы координат, материальной точки и абсолютно твердого тела.
4. Дайте определения скалярной и векторной величин и приведите примеры известных Вам векторов и скаляров в физике.
5. Что представляет собой декартова система координат и ее базисные вектора?
6. Какие способы описания движения материальной точки Вы знаете?
7. В чем заключается векторный способ описания движения материальной точки?
8. Дайте определения вектора скорости и ускорения материальной точки и запишите для них соответствующие математические выражения.
9. В чем заключается координатный способ описания движения материальной точки? Выпишите формулы для векторов скорости и ускорения при этом способе.
10. В чем заключается естественный способ описания движения материальной точки?
11. Дайте определение траектории движения материальной точки.
12. Дайте определение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
13. Запишите формулы для векторов угловой скорости и углового ускорения.
14. Какое движение называется плоско-параллельным?

### III. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

#### 3.1. Инерциальные системы отсчета

Теперь займемся динамикой – частью механики, изучающей причины движения. В основе динамики лежат законы Ньютона. Открытие законов Ньютона было одним из наиболее ярких событий в истории физики. До Ньютона движение тел, например, небесных светил, представлялось загадкой, но после формулировки Ньютоном законов механики все нашло свое объяснение. Ньютон не только открыл законы, но и фактически построил свою простейшую модель пространства - времени. Эта модель, соответствующая классической механике, исходит из интуитивных представлений, основанных на результатах наблюдений движений материальных объектов с  $V/C \ll 1$ , и поэтому область ее применения весьма широка. Т.к. в модели Ньютона время – абсолютно и однородно, а пространство – изотропно и однородно, то в рамках кинематики все системы отсчета равноправны. Совершенно иначе обстоит дело в динамике, где обнаруживается преимущество одного класса систем отсчета по отношению ко всем остальным. Опыт показывает, что в различных системах отсчета динамические законы движения также различны и иногда весьма сложны. Поэтому, естественно, возникает задача поиска класса систем, в которых динамика простейшей модели материального объекта – м.т. – выглядит наиболее просто. Из опыта повседневной жизни более менее ясно, что ускорение м.т. связано как с действием других тел, так и со свойствами самих систем отсчета. Следовательно, причины движения будут выглядеть наиболее просто в тех системах отсчета, где ускорение возникает лишь в результате действия других тел. В таких системах, если на тело (м.т.) не действуют другие тела, то оно находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, т.е. не имеет ускорения. Однако возникает вопрос: Существуют ли такие системы отсчета? Ответ можно получить лишь только на основе наблюдений над механическими движениями в реальном мире. Оказывается, что предположение о существовании класса таких систем не приводит ни к каким противоречиям с опытом. Это предположение и представляет **первый закон динамики Ньютона: существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых, если на тело не действуют другие тела, то оно находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.** Ясно, что, если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета (ИСО), то их бесконечно много. Любая система отсчета, движущаяся равномерно без вращения относительно инерциальной с некоторой произвольной скоростью  $\vec{V}$ , также будет инерциальной, поскольку в ней, согласно соотношению (2.11), ускорение будет отсутствовать, если отсутствует в исходной:  $\vec{a}_{rel} = \vec{a} - \vec{a}_{con} - \vec{a}_{cor} = 0$  ( $\vec{a} = 0$  – в исходной ИСО;  $\vec{a}_{con} = 0$  – нет вращения и ускорения полюса относительно исходной ИСО;  $\vec{a}_{cor} = 0$  – нет вращения относительно исходной ИСО).

Инерциальные системы обладают рядом замечательных свойств (однородность времени, однородность и изотропность пространства по отношению к законам динамики), в частности, для них выполняется **принцип относительности Галилея: все инерциальные системы по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу, т.е. никакими механическими опытами нельзя установить покоится или движется инерциальная система отсчета, если опыты проводятся внутри неё** (внутри – значит без взаимодействия с внешними по отношению к ИСО телами). Следовательно, вид законов механики не должен меняться при переходе от одной ИСО к другой (иначе по различию законов можно было бы отличить одну систему отсчета от другой, а это как раз и противоречит принципу Галилея). Преобразования, описывающие связи между

координатами и временами двух инерциальных систем отсчета  $OXYZ$  и  $O'X'Y'Z'$  в классической механике, называются **преобразованиями Галилея** и имеют вид ( $\vec{V}_0$  - постоянная скорость движения системы отсчета  $O'X'Y'Z'$  относительно системы  $OXYZ$ ):

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t \\ t' = t \end{cases} \quad (3.1)$$

Отсюда следует закон сложения скоростей Галилея:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_0. \quad (3.2)$$

В частном случае, когда оси систем координат параллельны, а направление вектора относительной скорости  $\vec{V}_0$  совпадает с направлением оси  $X$ , преобразования Галилея имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x - V_{0x} t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} V_x = V'_x + V_{0x} \\ a'_x = a_x \end{cases}. \quad (3.3)$$

В случае сохранения вида уравнений при каких-либо преобразованиях говорят об инвариантности этих уравнений к рассматриваемым преобразованиям. Поэтому принцип Галилея можно сформулировать как требование инвариантности уравнений механики к преобразованиям Галилея.

### 3.2. Второй и третий законы Ньютона

По определению ИСО ускорение материальных точек в ней может быть вызвано лишь действием со стороны других материальных объектов. Из опыта следует, что, если тело  $A$  сообщает ускорение телу  $B$ , то и тело  $B$  сообщает ускорение телу  $A$ , т.е. **действие тел имеет характер взаимодействия**. Для характеристики этого взаимодействия вводят фундаментальную физическую величину – силу. **Сила – есть мера взаимодействия тел**. Поскольку сила является причиной ускорения, а ускорение – вектор, то постулируют, что и сила – вектор  $\vec{F}$ , причем ее направление совпадает с направлением ускорения, т.е.  $\vec{F} \parallel \vec{a}$ .

Опыт показывает, что величина силы, действующей на тело в ИСО, пропорциональна ускорению  $F \sim a$ . Более того, оказывается, что отношение  $|\vec{F}|/|\vec{a}|$  для данного тела не зависит от направления действия и величины силы. Следовательно, скалярная величина  $|\vec{F}|/|\vec{a}|$  характеризует некоторое свойство самого тела. Эту величину называют массой. **Масса - мера инертности тела, т.е. мера способности тела сопротивляться изменению его скорости**. Экспериментально установлены следующие свойства массы: **аддитивность** – масса составного тела равна сумме масс его частей; **независимость от параметров движения** (координат, скорости и ускорения). Таким образом, из всех изложенных фактов следует **второй закон Ньютона: в инерциальных системах отсчета ускорение м.т. прямо пропорционально действующей на нее силе и обратно пропорционально массе  $m$**

$$\vec{a} = \vec{F} / m. \quad (3.4)$$

Закон Ньютона можно записать и в других эквивалентных (3.4) видах

$$m \vec{a} = \vec{F}, \quad m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}$$

или

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}) = \vec{F}, \quad d\vec{p} = \vec{F} dt, \quad \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \quad (3.5)$$

где по определению  $\vec{p} = m\vec{V}$  – импульс м.т.

Самое лучшее (математически строгое) определение силы – это утверждение, что сила есть физическая величина равная произведению массы на ускорение  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Именно на основе такого определения силу часто измеряют при проведении экспериментов. Однако, если принять такое определение, то получается кажущийся парадокс: второй закон Ньютона превращается просто в определение силы и тогда нечего удивляться, что выполняется равенство  $\vec{F} = m\vec{a}$ , т.к. это по определению. В чем же смысл второго закона Ньютона? Он состоит в том, что величина, определенная как произведение массы на ускорение, обладает рядом замечательных свойств: она характеризует взаимодействие тел (отлична от нуля лишь при их наличии), зависит, как правило, только от расстояния между взаимодействующими телами (не зависит от скорости, ускорения и других кинематических характеристик) и, наконец, для нее справедлив **третий закон Ньютона** (конечно, Ньютон понимал, что без формулировки свойств сил его второй закон будет выглядеть логически незавершенным): **силы взаимодействия двух м.т. действуют по одной прямой, противоположно направлены и равны по величине:**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.6)$$

Запись третьего закона Ньютона в эквивалентном (3.6) виде:  $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$  менее предпочтительна, т.к. возникает впечатление об уравновешенности сил взаимодействия, а это не так, поскольку эти силы приложены к различным телам.

В соответствии с принципом Галилея для двух ИСО (штрихованной и нештрихованной) должны одновременно выполняться законы Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$  и  $\vec{F}' = m'\vec{a}'$ . Но  $\vec{a} = \vec{a}'$  и из независимости массы от скорости следует, что  $m = m'$ . Поэтому из принципа Галилея следует **инвариантность сил относительно инерциальных систем отсчета**  $\vec{F} = \vec{F}'$ .

Второй закон Ньютона справедлив для свободного движения м.т. постоянной массы в инерциальной системе отсчета. При наложении на движение м.т. ограничений (связей) в правую часть этого закона необходимо добавить результирующую силу реакции связей  $\vec{R}$ , обеспечивающую выполнение этих ограничений

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}.$$

Далее рассмотрим какие изменения надо внести во второй закон Ньютона для м.т. с переменной массой или при рассмотрении её движения в неинерциальной системе отсчета.

### 3.3. Реактивное движение. Формула Мещерского

Рассмотрим теперь движение тела (м.т.) с переменной массой. Пусть на тело действует сила  $\vec{F}$  и в единицу времени к телу прибавляется масса  $\frac{dm}{dt}$  со скоростью  $\vec{u}$  относительно тела. Тогда, если текущая скорость тела  $\vec{V}$ , то согласно второму закону Ньютона (3.5), в системе отсчета, движущейся равномерно со скоростью  $\vec{V}$  имеем:

$$m d\vec{V} = \vec{u} dm + \vec{F} dt,$$

откуда получаем уравнение Мещерского:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}, \quad (3.7)$$

в которое, в отличие от второго закона Ньютона для тела с постоянной массой, входит **реактивная сила**  $\vec{u} \frac{dm}{dt}$ , возникающая в результате передачи телу дополнительного импульса от добавляемой массы.

*Пример 3.1.* В качестве примера рассчитаем максимальную скорость ракеты без учета сопротивления движению со стороны внешней среды ( $\vec{F} = 0$ ) и в предположении, что скорость истечения газов относительно ракеты есть постоянный вектор  $\vec{u}$ . Уравнение Мещерского в этом случае принимает вид:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt} \quad \text{или} \quad d\vec{V} = \vec{u} \frac{dm}{m}.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом равенства нулю начальной скорости, получаем ( $m_0, m_k$  - начальная и конечная массы ракеты)

$$\vec{V}_{\max} = -\vec{u} \ln \left( \frac{m_0}{m_k} \right).$$

Минус возникает из-за противоположности направления векторов  $\vec{V}_{\max}$ , и  $\vec{u}$ . При  $m_k \rightarrow 0$  отсюда находим, что  $V_{\max}$  стремится к бесконечности, т.е. максимальная скорость с учетом переменности массы в процессе движения оказывается неограниченной. Интересно сопоставить этот результат с результатом, полученным в предположении, что масса  $(m_0 - m_k)$  отделилась сразу. При одновременном отделении  $\vec{V} = -(1 - m_0 / m_r) \vec{u}$  (это соотношение следует из закона сохранения импульса, который будет рассмотрен более детально в следующей главе IV), следовательно, скорость уже ограничена и не может быть больше  $\vec{u}$ .

### 3.4. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета

Соотношения (3.5) справедливы для тел постоянной массы в инерциальных системах отсчета, когда на движение м.т. не наложено никаких ограничений. В тех случаях, если одно из этих условий не выполняется, уравнение движения также может быть представлено в виде уравнения Ньютона, но при этом приходится вводить некоторые дополнительные силы. Например, при рассмотрении тела с переменной массой в п.3.3 была введена реактивная сила, которая характеризовала взаимодействие разделяющихся частей тела. Для м.т. с наложенными ограничениями на движение возникают **силы реакции**, определяющие взаимодействие рассматриваемого тела с телами, ограничивающими это движение. В отличие от реактивных сил и сил реакции, дополнительные силы (**силы инерции**) в неинерциальных системах отсчета не являются мерой взаимодействия тел и их появление обусловлено общими свойствами пространства - времени. Выведем соотношения для расчета сил инерции. Пусть  $OXYZ$  – инерциальная система отсчета, в которой справедлив закон Ньютона  $m \vec{a} = \vec{F}$ , а система отсчета  $O'X'Y'Z'$  движется относительно нее с ускорением  $\vec{a}_0$ , вращается с угловой скоростью  $\vec{W}$  и угловым ускорением  $\vec{\beta}$ . Очевидно, что  $O'X'Y'Z'$  – неинерциальная система отсчета и, как было показано в главе II, связь ускорений  $\vec{a}, \vec{a}_{rel}$  в двух произвольных системах отсчета имеет вид

$$\vec{a} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{con} + \vec{a}_{cor}$$

или ( $\vec{a}_{rel} = \vec{a}'$ )

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + [\vec{\beta}, \vec{r}'] + [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']] + 2[\vec{W}, \vec{v}']. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) во второй закон Ньютона для инерциальной системы отсчета  $OXYZ$ , находим вид уравнения движения м.т. в неинерциальной системе  $O'X'Y'Z'$

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_0 + [\vec{\beta}, \vec{r}'] + [\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']] + 2[\vec{W}, \vec{v}']) = \vec{F},$$

откуда

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m[\vec{\beta}, \vec{r}'] - m[\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']] - 2m[\vec{W}, \vec{v}'].$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению движения:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_0 + \vec{F}_\beta + \vec{F}_w + \vec{F}_{cor}, \quad (3.9)$$

где  $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$  – сила инерции, обусловленная ускорением поступательного движения;  $\vec{F}_\beta = -m[\vec{\beta}, \vec{r}']$  – сила инерции, вызванная изменением угловой скорости вращения;  $\vec{F}_w = -m[\vec{W}, [\vec{W}, \vec{r}']] = -mW^2\rho\vec{n}$  – центробежная сила (вернее, "осебежная", т.к. направлена от мгновенной оси вращения, а не от центра);  $\vec{F}_{cor} = -2m[\vec{W}, \vec{v}']$  – кориолисова сила. Итак, в общем случае в неинерциальных системах отсчета справедлив закон Ньютона (3.9), в котором введены дополнительно четыре силы инерции. Эти силы обладают следующими отличительными свойствами: пропорциональны массе м.т.; зависят от характеристик движения  $(\vec{a}_0, \vec{W}, \vec{\beta})$  системы отсчета  $O'X'Y'Z'$  относительно произвольной инерциальной системы  $OXYZ$  и, наконец, для них не справедлив третий закон Ньютона, т.к. они не порождаются взаимодействием тел.

*Пример 3.2. В северном полушарии правые берега рек – обрывистые, что обусловлено силой Кориолиса, возникающей из-за вращения Земли. Оценим величину этой силы на полюсе (здесь она максимальна, т.к.  $\vec{V} \perp \vec{W}$ ), если река течет со скоростью  $V = 3,6$  км/час = 1 м/с вдоль меридиана, а угловая скорость вращения Земли определяется из условия, что за 24 часа угол поворота составляет  $2\pi$  радиан  $W = 2\pi / 24 / 3600c = 0,7272 \times 10^{-4} c^{-1}$ . Массу воды примем равной одной тонне, тогда:*

$$|\vec{F}_{cor}| = 2m V W = 2 \times 1 \text{ м/с} \times 0,7272 \times 10^{-4} c^{-1} \times 10^3 \text{ кг} \approx 0,145 \text{ н} \approx 14 \text{ г}.$$

*Хотя на каждую тонну воды действует незначительная сила около 14 граммов, однако ее оказывается достаточно, чтобы реки подмывали правые берега в северном полушарии.*

Таким образом, любую задачу механики можно решать в инерциальной или в неинерциальной системах отсчета. Выбор системы диктуется постановкой вопроса и стремлением получить ответ более простым путем. Часто оказывается, что наиболее удобно это делать именно в неинерциальных системах отсчета.

## ВОПРОСЫ

1. Что изучает динамика материальной точки?
2. Какие законы лежат в основе динамики?
3. Опишите ньютоновскую модель пространства - времени.
4. Что такое инерциальные системы отсчета (первый закон Ньютона)?
5. Какими свойствами обладают инерциальные системы отсчета?
6. Сформулируйте принципы относительности Галилея.
7. Что такое масса тела?
8. Ее основные свойства. Что такое сила?
9. Сформулируйте второй закон Ньютона.

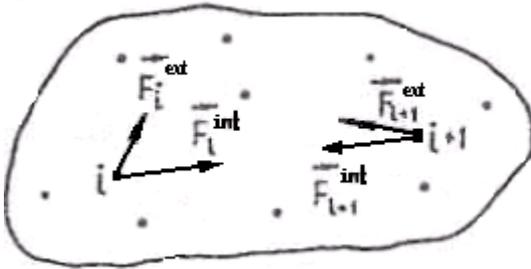
10. Сформулируйте третий закон Ньютона.
11. Выпишите уравнение Мещерского. Совпадает ли оно со вторым законом Ньютона?
12. Введение каких сил инерции позволяет использовать второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета?
13. Сформулируйте второй закон Ньютона в системе отсчета  $O'X'Y'Z'$ , движущейся поступательно с ускорением  $\vec{a}_0$  относительно инерциальной системы  $OXYZ$ .
14. Найдите силы инерции, действующие на м.т. массой  $m$ , которая движется с постоянной скоростью  $\vec{V}'$  в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  относительно инерциальной системы отсчета.
15. Почему в северном полушарии правые берега рек обрывистые, а в южном – левые?

#### IV. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. СТОЛКНОВЕНИЕ ЧАСТИЦ

В предыдущей главе мы сформулировали основные законы динамики материальной точки. Очевидно, что решение уравнения Ньютона при заданных начальных условиях и законах действующих на м.т. сил полностью определяет её положение в пространстве в любой момент времени. Однако в механике существуют и другие понятия, такие как энергия, импульс, момент импульса, и законы сохранения для них, которые позволяют полнее раскрыть закономерности механического движения.

Обратимся теперь к формулировке основных законов сохранения (ЗС) в механике. Почему они так важны? Во-первых, потому что не зависят от траекторий частиц и особенностей действующих сил, что позволяет делать с помощью ЗС общие выводы, не вникая в детальное рассмотрение задачи. Если какой-то процесс противоречит ЗС, то этот процесс не возможен и не надо тратить силы на его изучение. Во-вторых, ЗС можно применять и тогда, когда законы действия сил не известны. В этом случае ЗС – единственный инструмент для исследований. Так обстоит дело в физике элементарных частиц. В-третьих, даже когда силы известны, ЗС позволяют, как правило, получить решение более изящным путем, чем непосредственное применение второго закона Ньютона. Поэтому, решая задачу, сначала пытаются применить ЗС и, если этого оказывается недостаточно, то используют второй закон Ньютона.

##### 4.1. Закон сохранения импульса системы материальных точек. Задача двух тел



Рассмотрим систему из  $N$  материальных точек ( $i=1, \dots, N$ ). Обозначим через  $F_i^{int}$  внутренние силы (силы, действующие между м.т. выделенной системы), а через  $F_i^{ext}$  – силы, действующие на  $i$ -ю точку со стороны других внешних объектов. Для каждой из них запишем закон Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_i) = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext} \quad (4.1)$$

Суммируя (4.1) по всем частицам системы, получаем

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\vec{p}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}. \quad (4.2)$$

Откуда, обозначая суммарный импульс системы через  $\vec{P}_\Sigma = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$  и используя линейность операции дифференцирования, имеем

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\vec{p}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{d}{dt}(\vec{P}_\Sigma) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}.$$

Из третьего закона Ньютона следует равенство нулю суммы внутренних сил  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} = 0$ , действующих на м.т., т.к. они для каждой пары точек равны по величине и противоположно направлены. Тогда, вводя обозначение для суммарной внешней силы  $\vec{F}_\Sigma^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$ , из (4.2) находим соотношение, описывающее закон изменения суммарного импульса системы материальных точек (СМТ)

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_\Sigma) = \vec{F}_\Sigma^{ext} \quad (4.3)$$

**Теорема об изменении импульса системы м.т.: в инерциальной системе отсчета скорость изменения суммарного импульса материальных точек равна суммарной внешней силе.**

Система м.т. называется замкнутой, если на нее не действуют внешние силы  $\vec{F}_{\Sigma}^{ext} = 0$ . Поскольку при этом условии из (4.3) следует  $\frac{d}{dt}(\vec{P}_{\Sigma}) = \vec{F}_{\Sigma}^{ext} = 0$ , то получаем **закон сохранения импульса (ЗСИ) системы м.т.: в замкнутой системе материальных точек суммарный импульс сохраняется.** Кроме того, ЗСИ выполняется в некоторых случаях, когда СМТ не замкнута:

- внешние силы действуют, но их сумма равна нулю  $\vec{F}_{\Sigma}^{ext} = 0$ ;
- сумма внешних сил равна нулю в некотором направлении  $X - F_{\Sigma X}^{ext} = 0$ , тогда сохраняется проекция суммарного импульса только на это направление  $P_{\Sigma X} = const$ ;
- взаимодействие осуществляется в течении малых промежутков времени (например, при взрыве) и вследствие этого внутренние силы много больше внешних (в этом случае ЗСИ справедлив лишь приближенно; можно показать, что условием его выполнения является условие малости импульса внешних сил за время взаимодействия  $\tau$  по сравнению с изменением импульса каждой м.т.  $\Delta \vec{P} : |\vec{F}_{\Sigma}^{ext}| \tau \ll |\Delta \vec{P}|$ ).

Теорема об изменении суммарного импульса позволяет сформулировать закон движения некоторой выделенной точки системы, называемой **центром масс**. **Под центром масс (ц.м.) СМТ понимают точку, радиус-вектор которой в любой момент времени определяется по формуле** (M – суммарная масса СМТ)

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (4.4)$$

Из (4.4) получаем соотношения для скорости  $\vec{V}_c$  и ускорения  $\vec{A}_c$  центра масс

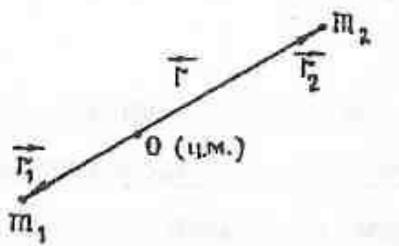
$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{R}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i}{M} \quad (4.5)$$

$$\vec{A}_c = \frac{d^2 \vec{R}_c}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i}{M} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{P}_{\Sigma}}{M} \right) = \frac{\vec{F}_{\Sigma}^{ext}}{M}$$

откуда

$$M \vec{A}_c = \vec{F}_{\Sigma}^{ext} \quad (4.6)$$

Соотношение (4.6) представляет собой математическую формулировку **теоремы о движении ц.м.: центр масс СМТ движется подобно материальной точке с массой, равной массе системы, под действием силы, равной суммарной внешней силе, действующей на систему.**



Из этой теоремы получаем следствие: **центр масс замкнутой СМТ находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.**

Следствие из теоремы о движении ц.м. используется при решении задачи двух тел. Следует отметить, что

решение уравнений динамики для систем, состоящих из большого числа частиц (материальных точек), встречает непреодолимые математические трудности. Точное решение не удастся найти уже в случае трех м.т. Однако задача двух тел (двух м.т.) имеет простое и исчерпывающее решение, которое широко используется в небесной механике и статистической физике.

Рассмотрим замкнутую систему двух м.т., взаимодействующих между собой и имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$ . Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс. Поскольку ц.м. движется равномерно и прямолинейно (или покоится), то рассматриваемая система отсчета будет инерциальной. Пусть  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , -радиусы-векторы м.т. с началом в центре масс, а  $\vec{r}$  – вектор, проведенный от м.т. с массой  $m_1$  к м.т. с массой  $m_2$  (см. рис.). Из определения радиуса-вектора центра масс имеем:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0. \quad (4.7)$$

Учитывая, что  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}$ , из (4.7) получаем

$$\vec{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \quad (4.8)$$

Запишем второй закон Ньютона для обеих точек в системе их центра масс (он выполняется, т.к. эта система отсчета – инерциальная):

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_1 = \vec{F}_{21}(\vec{r}),$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_2 = \vec{F}_{12}(\vec{r})$$

и подставим в эти уравнения найденные выше выражения (4.8) для  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ . Тогда получим

$$-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}_{21}(\vec{r}), \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}_{12}(\vec{r}). \quad (4.9)$$

Согласно третьему закону Ньютона  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}(\vec{r})$ , и уравнения (4.9), полученные для каждой из м.т., тождественны друг другу. Таким образом, в системе ц.м. задача о движении системы из двух м.т. сводится к задаче о движении одной м.т. под действием центральной силы  $\vec{F}(\vec{r})$  с приведенной массой  $\mu$  :

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}(\vec{r}), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.10)$$

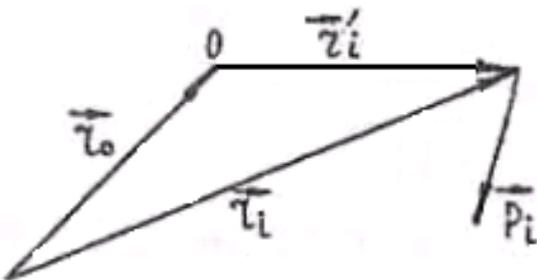
Однако следует помнить, что м.т. с массой  $\mu$  и радиус-вектором  $\vec{r}$  является вспомогательной и, проинтегрировав уравнение (4.10), необходимо с помощью (4.8) определить основные характеристики движения двух материальных точек  $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ .

#### 4.2. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим теперь закон сохранения момента импульса (ЗСМИ), который во многом аналогичен ЗСИ. **Моментом импульса материальной точки называется векторное произведение ее радиус-вектора  $\vec{r}$  на импульс  $\vec{p}$**

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}].$$

Момент импульса СМТ будем определять в инерциальной системе отсчета относительно некоторого подвижного полюса  $O$ , положение



которого описывается радиус-вектором  $\vec{r}_0$  (см. рис.). Тогда радиус-вектор  $i$ -ой точки относительно этого полюса есть  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0$ , а ее момент импульса вычисляется по формуле

$$\vec{L}_i = [\vec{r}'_i, \vec{p}_i]. \quad (4.11)$$

Дифференцируя (4.11) по времени и суммируя по всем частицам СМТ, получаем ( $\vec{V}_0$  – скорость полюса;  $\vec{V}_c$  – скорость ц.м. СМТ;  $\vec{L}_\Sigma = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$  – суммарный момент импульса СМТ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i &= \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N [\dot{\vec{r}}'_i, \vec{p}_i] + \sum_{i=1}^N [\vec{r}'_i, \dot{\vec{p}}_i] = \sum_{i=1}^N [\dot{\vec{r}}'_i, \vec{p}_i] + \sum_{i=1}^N [\vec{r}'_i, \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}] = \\ &= \sum_{i=1}^N [\vec{V}_i - \vec{V}_0, \vec{p}_i] + \sum_{i=1}^N [\vec{r}'_i, \vec{F}_i^{\text{ext}}] = \vec{M}_\Sigma^{\text{ext}} - [\vec{V}_0, \sum_{i=1}^N \vec{p}_i] = \vec{M}_\Sigma^{\text{ext}} + M [\vec{V}_c, \vec{V}_0], \end{aligned}$$

откуда следует теорема об изменении момента импульса СМТ относительно подвижного полюса

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_\Sigma = \vec{M}_\Sigma^{\text{ext}} + M [\vec{V}_c, \vec{V}_0] \quad (4.12)$$

При выводе (4.12) использовалось равенство нулю суммарных моментов для внутренних сил, следующее из третьего закона Ньютона, и второй закон Ньютона в форме  $\frac{d}{dt} \vec{p}_i = [\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}]$ . Если полюс  $O$  – неподвижен или совпадает с точкой ц. м. (либо выполняется какое-то другое условие, при котором  $[\vec{V}_c, \vec{V}_0] = 0$ ), то соотношение (4.12) сводится к равенству производной по времени вектора суммарного момента импульса СМТ векторной сумме моментов всех приложенных к ней внешних сил

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \vec{M}_\Sigma^{\text{ext}}. \quad (4.13)$$

В замкнутой СМТ, когда нет внешних сил и, следовательно,  $\vec{M}_\Sigma^{\text{ext}} = 0$ , из (4.13) получаем закон сохранения момента импульса: **в замкнутой СМТ суммарный момент импульса относительно неподвижного полюса или относительно ц.м. (либо относительно любого другого полюса, для которого  $[\vec{V}_c, \vec{V}_0] = 0$ ) сохраняется:**

$$\vec{L}_\Sigma = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \text{const}. \quad (4.14)$$

Кроме замкнутых систем ЗСМИ имеет место и в тех случаях, когда  $\vec{M}_\Sigma^{\text{ext}} = 0$  хотя бы относительно одного полюса, тогда и  $\vec{L}_\Sigma = \text{const}$  относительно этого же полюса. Так, например, обстоит дело при движении СМТ в центральном поле, где  $\vec{L}_\Sigma = \text{const}$  относительно центра действующих на материальные точки сил. По поводу области применимости ЗСМИ можно повторить то, что говорилось относительно ЗСИ.

### 4.3 Закон сохранения энергии

Введем понятие работы силы  $\vec{F}$ . **Элементарной работой  $\delta A$  на перемещении  $d\vec{r}$  называется скалярное произведение силы на перемещение** ( $\varphi$  – угол между направлениями векторов силы и перемещения)

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = F dr \cos(\varphi).$$

На конечном перемещении работа  $A$  вычисляется с помощью криволинейного интеграла вдоль траектории м.т. ( $S$  – число малых участков, на которые разбивается эта траектория)

$$A = \sum_{i=1}^S \delta A_i = \sum_{i=1}^S F_i \, dr_i \cos(\varphi_i) = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) \quad (4.15)$$

*Пример 4.1. Рассмотрим примеры расчета работы различных сил.*

*а) работа упругой силы ( $\vec{F} = -k\vec{r}$ ) ( $k$ -коэффициент пропорциональности)*

$$A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = -\int_1^2 (k\vec{r}, d\vec{r}) = -k \int_1^2 \frac{d(\vec{r}, \vec{r})}{2} = -\frac{kr^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}.$$

*б) работа кулоновской (или гравитационной) силы. Для кулоновских и гравитационных сил справедливо одно и то же уравнение  $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$ . Отличаются только значения коэффициентов  $\alpha$ : для сил гравитации  $\alpha = \gamma Mm$  ( $m, M$  – массы притягивающихся тел); для кулоновских сил  $\alpha = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}$  ( $q, Q$  – величины взаимодействующих зарядов).*

*Тогда*

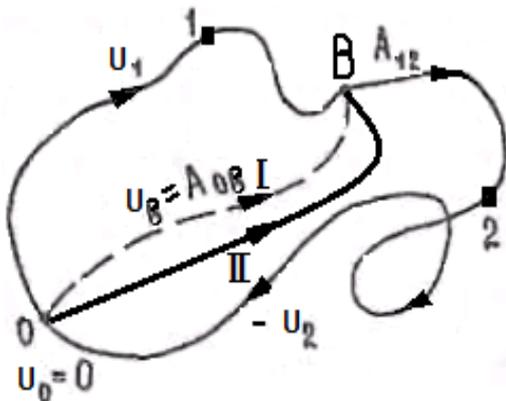
$$A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = -\int_1^2 \frac{(\alpha \vec{r}, d\vec{r})}{r^3} = -\alpha \int_1^2 \frac{d(\vec{r}, \vec{r})}{2r^3} = -\alpha \int_1^2 \frac{d(\vec{r}, \vec{r})}{2r^3} - \frac{kr^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$$

*в) работа силы тяжести у земной поверхности  $\vec{F} = m \vec{g}$ ,  $\vec{g} = \text{const}$ .*

$$A = m \int_1^2 (\vec{g}, d\vec{r}) = -mg \int_1^2 dz = mg(z_1 - z_2).$$

Рассмотренные в примере 4.1. силы интересны в том отношении, что их работа не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным состоянием системы (положением тел). Такие силы называются потенциальными. **Стационарное силовое поле, в котором работа силы, создаваемой этим полем, не зависит от формы траектории, а определяется начальным и конечным состоянием системы, называется потенциальным, а сама система, в которой действуют только потенциальные силы – консервативной.**

Если работа не зависит от формы траектории, то можно построить функцию  $U$ , называемую **потенциальной энергией**, так, что ее изменение будет определять работу. Построение проводится следующим образом (см. рис.).



Выбирается какая-либо точка пространства  $O$  и в ней полагается  $U_0 = 0$ . В любой другой точке  $B$  потенциальная энергия  $U_B$  принимается равной работе, которую надо совершить против сил поля при перемещении от т.  $O$  в т.  $B$ , т.е.  $U_B = A_{OB}$ . При этом функция  $U$  строится описанным образом однозначно именно потому, что сила потенциальна,

иначе бы работы по пути I и II (см. рис.) оказались неравными, а значение  $U_B$  –

неопределенным. Знание  $U$  позволяет без интегрирования вдоль траектории определить работу при перемещении от точки 1 к точке 2. В самом деле, поскольку работа определяется только положением, то по замкнутой траектории работа равна нулю, и для контура О-1-В-2-О получаем

$$U_1 + A'_{12} - U_2 = 0, \text{ откуда } A'_{12} = -(U_1 - U_2) = \Delta U.$$

Поскольку  $A'_{12}$  – это работа против сил поля, то работа самого поля  $A_{12}$ , очевидно, отличается только знаком  $A_{12} = -A'_{12}$ , и, следовательно,

$$A_{12} = -\Delta U \quad \text{или} \quad \delta A = -dU. \quad (4.16)$$

Итак, потенциальная энергия это функция, убыль которой есть работа поля.

*Пример 4.2.* Из ранее рассмотренных примеров вычисления работы в соответствии с соотношением (4.16) имеем следующие формулы для вычисления потенциальной энергии.

а) упругая потенциальная энергия (в частности, энергия пружины растянутой на  $r$ )

$$U = \frac{k r^2}{2};$$

б) кулоновская и гравитационная энергии  $U = -\frac{\alpha}{r}$ , откуда

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q q}{r} \quad \text{и} \quad U = -\gamma \frac{M m}{r}$$

в) потенциальная энергия тела в поле тяжести Земли

$$U = m g z.$$

Между потенциальной энергией и вектором силы есть дифференциальное соотношение. Для его вывода заметим, что при малом перемещении  $d\vec{r}$  соотношение (4.16) дает  $dU = -(\vec{F}, d\vec{r})$ , т.е.

$$dU = -F_x dx - F_y dy - F_z dz.$$

Но с другой стороны, дифференциал функции  $U$  равняется

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

Поскольку переменные  $x, y, z$  – независимые, то из этих двух представлений дифференциала  $dU$  следует

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{или} \\ \vec{F} = -\text{grad}(U), \quad (4.17)$$

где введен вектор градиента функции по формуле  $\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$ .

Будем называть **кинетической энергией м.т. величину  $T$ , т.ч.**

$$T_i = \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{m(\vec{V}_i, \vec{V}_i)}{2}.$$

Для малого изменения суммарной кинетической энергии СМТ получаем

$$dT_\Sigma = d \sum_{i=1}^s T_i = d \sum_{i=1}^s \frac{m_i(\vec{V}_i, \vec{V}_i)}{2} = \sum_{i=1}^s m_i(\vec{V}_i, d\vec{V}_i) = \sum_{i=1}^s m_i \left( \vec{V}_i dt, m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^s (d\vec{r}_i, \vec{F}_i) = \delta A_\Sigma.$$

Следовательно, справедлива теорема об изменении кинетической энергии: дифференциал суммарной кинетической энергии СМТ равен суммарной элементарной работе всех (внутренних и внешних) сил, приложенных к ее материальным точкам

$$dT_{\Sigma} = \delta A_{\Sigma}. \quad (4.18)$$

Здесь важно, что в  $\delta A_{\Sigma}$  входит работа **всех сил**, как внутренних, так и внешних, поскольку, хотя по третьему закону Ньютона внутренние силы и равны попарно, но работа от них в сумме в ноль в общем случае не обращается, т.к. соответствующие перемещения могут быть не равны между собой (одним из примеров исключения из общего правила служит совокупность точек, составляющих а.т.т., в котором работа внутренних сил отсутствует).

Пусть СМТ – консервативна, т.е. поля сил стационарны и потенциальны. Тогда из (4.16), (4.18) получаем

$$dT_{\Sigma} = \delta A_{\Sigma} = -dU,$$

откуда

$$d(T_{\Sigma} + U) = 0$$

и, следовательно, выполняется **закон сохранения энергии (ЗСЭ): при движении консервативной СМТ полная механическая энергия (полной называется сумма кинетической и потенциальной энергий) сохраняется**

$$T_{\Sigma} + U = const. \quad (4.19)$$

*Пример 4.3. Рассмотрим ЗСЭ для конкретных систем*

а) Грузик на плоскости, скрепленный с пружиной. Кинетическая энергия грузика

$$T = \frac{mV^2}{2} \quad \text{потенциальная энергия пружины}$$

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

( $x$  - координата грузика отсчитываемая от его положения, при котором пружина не растянута, см. рис.). Полная энергия согласно ЗСЭ должна сохраняться:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const \quad \text{или} \quad \frac{kx^2}{2} = const.$$

б) Грузик, подвешенный на пружин(см. рис.). Кинетическая энергия грузика

$$T = \frac{mV^2}{2}, \quad \text{потенциальная энергия системы складывается из энергии пружины и потенциальной энергии грузика}$$

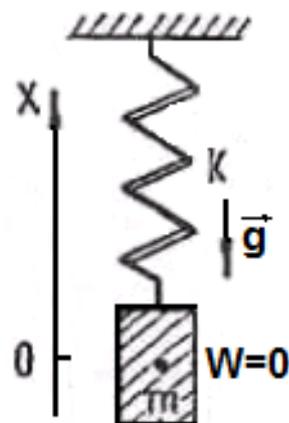
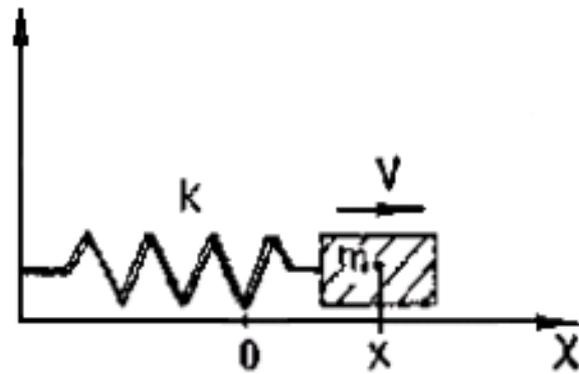
$$W = \frac{kx^2}{2} + mgx,$$

где координата  $x$  и потенциальная энергия грузика отсчитываются от положения, в котором пружина не растянута (см. рис.).

Полная энергия согласно ЗСЭ должна сохраняться

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + mgx = const \quad \text{или} \quad \frac{m(\dot{x})^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + mgx = const.$$

в) Две массы  $m$  и  $M$ , взаимодействующие по закону всемирного тяготения и находящиеся на расстоянии  $r$  друг от друга. Потенциальная энергия притягивающихся масс определяется выраже-



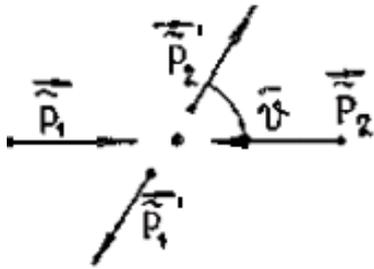
нием (см. пример 4.2б)  $U = -\gamma \frac{M m}{r}$  и ЗСЭ имеет в этом случае вид

$$\frac{mV_1^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2} - \gamma \frac{M m}{r} = const.$$

где  $V_1, V_2$  - соответствующие скорости движения масс.

#### 4.4. Столкновение частиц

Рассмотрим применение основных законов сохранения механики для различных типов столкновений частиц. Столкновение частиц наиболее удобно рассматривать в системе их центра масс (СЦМ). Поэтому сначала получим для случая СЦМ некоторые формулы. Знак волны  $\sim$  над величиной в дальнейшем означает, что величина рассматривается в системе центра масс. Пусть две частицы с массами  $m_1, m_2$  имеют в некоторой лабораторной системе координат скорости  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ . Тогда согласно (4.5) скорость их ц.м.  $\vec{V}_c = (m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2)/(m_1 + m_2)$ . Рассчитаем импульсы частиц  $\vec{\tilde{p}}_1$ , и  $\vec{\tilde{p}}_2$ , в СЦМ



$$\begin{aligned} \vec{\tilde{p}}_1 &= m_1\vec{\tilde{V}}_1 = m_1(\vec{V}_1 - \vec{V}_c) = m_1\vec{V}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = \mu(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \end{aligned}$$

Итак,

$$\vec{\tilde{p}}_1 = \mu(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \quad (4.20)$$

Аналогично получаем для второй частицы

$$\vec{\tilde{p}}_2 = \mu(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (4.21)$$

где  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  – приведенная масса системы.

Таким образом, из(4.20), (4.21) следует, что в СЦМ импульсы частиц равны по величине ( $\vec{V}_{12}$  – скорость частицы 1 относительно частицы 2):

$$\vec{\tilde{p}} = \vec{\tilde{p}}_1 = -\vec{\tilde{p}}_2 = \mu(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = \mu\vec{V}_{12}, \quad \vec{V}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

и всегда противоположно направлены.

Найдем суммарную кинетическую энергию частиц в СЦМ ( $\vec{\tilde{p}}_1 = \vec{\tilde{p}}_2 = \vec{\tilde{p}}$ ):

$$\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \tilde{p}^2 = \frac{\tilde{p}^2}{2\mu}.$$

Следовательно,

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{p}^2}{2\mu} = \frac{\mu V_{12}^2}{2}. \quad (4.22)$$

Воспользуемся полученными формулами в конкретных случаях столкновения. Различают три типа столкновений: абсолютно неупругие, абсолютно упругие и промежуточный случай – неупругие.

**Абсолютно неупругие столкновения** – это такие столкновения, когда после удара частицы как бы слипаются и движутся как единое целое. Из ЗСИ и закона сохранения массы имеем (штрих здесь означает, что величина взята после столкновения)

$$(m_1 + m_2)\vec{V}' = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2,$$

откуда

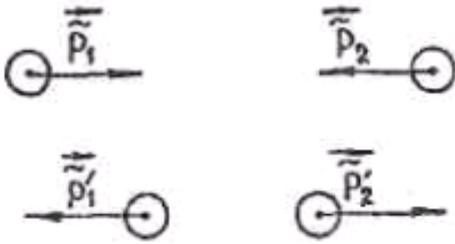
$$\vec{V}' = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{(m_1 + m_2)} = \vec{V}_c. \quad (4.23)$$

В СЦМ абсолютно неупругое столкновение выглядит наиболее просто. До столкновения частицы движутся навстречу друг другу, а после столкновения образовавшаяся частица останавливается. Следовательно, кинетическая энергия  $\tilde{T}$  целиком переходит в другие виды энергии  $Q$  (энергию деформации, внутреннюю энергию, энергию излучения и т.д.), величина которой определяется только модулем относительной скорости  $V_{12}$

$$Q = \tilde{T} = \frac{\mu V_{12}^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2 = \\ = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos(\theta)),$$

где  $\theta$  - угол между скоростями частиц до их столкновения.

**Абсолютно упругие столкновения** – это такие столкновения, когда частицы разлетаются после соударения и при этом сохраняется их суммарная кинетическая энергия. Это означает, что отсутствуют потери энергии на излучение, изменение внутренней энергии, деформирование и т.д.



Рассмотрим сначала **лобовое абсолютно упругое столкновение**. Обозначим модули импульсов частиц в СЦМ до и после соударения через  $\tilde{p}$  и  $\tilde{p}'$ . Тогда в

СЦМ условие сохранения кинетической энергии запишется в виде ( $\tilde{p} = \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$ ,  $\tilde{p}' = \tilde{p}'_1 = \tilde{p}'_2$ ,  $i=1, 2$ -сталкивающихся частиц)

$$\frac{\tilde{p}^2}{2\mu} = \frac{\tilde{p}'^2}{2\mu}, \text{ откуда } |\tilde{p}| = |\tilde{p}'| \text{ и } \tilde{V}_i = -\tilde{V}'_i,$$

т.е. в СЦМ при лобовом столкновении величины скоростей каждой частиц сохраняются, а направления движения изменяются на противоположные (см. рис.). Теперь найдем скорости частиц после соударения в исходной (лабораторной) системе отсчета, используя, что, согласно следствию из теоремы о движении центра масс, скорость ц.м. до соударения равна скорости после, а  $\vec{V}'_i = \tilde{V}'_i + \vec{V}_c$ :

$$\vec{V}'_i = \tilde{V}'_i + \vec{V}_c = -\tilde{V}_i + \vec{V}_c = -(\vec{V}_i - \vec{V}_c) + \vec{V}_c = -\vec{V}_i + 2\vec{V}_c,$$

откуда

$$\vec{V}_i + \vec{V}'_i = 2\vec{V}_c. \quad (4.24)$$

**Косое (нелобовое) абсолютно упругое столкновение.** В этом случае из условия сохранения кинетической энергии, также как при лобовом столкновении получаем равенство импульсов  $\tilde{p} = \tilde{p}'$ , но теперь направление разлета частиц может отличаться от первоначального, как показано на рисунке. Рассмотрим частный случай, когда частица с массой  $m_2$  до удара покоилась, т.е.  $\vec{V}_2 = 0$ . Тогда можно записать

$$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{V}'_1 = m_1 (\vec{V}_c + \tilde{V}'_1) = m_1 \vec{V}_c + \tilde{p}'_1 \quad (4.25)$$

и аналогично

$$\vec{p}'_2 = m_2 \vec{V}'_2 + \tilde{p}'_2. \quad (4.26)$$

Складывая (4.26) с (4.27) с учетом того, что  $\tilde{p}'_1 + \tilde{p}'_2 = 0$ , получаем ЗСИ:

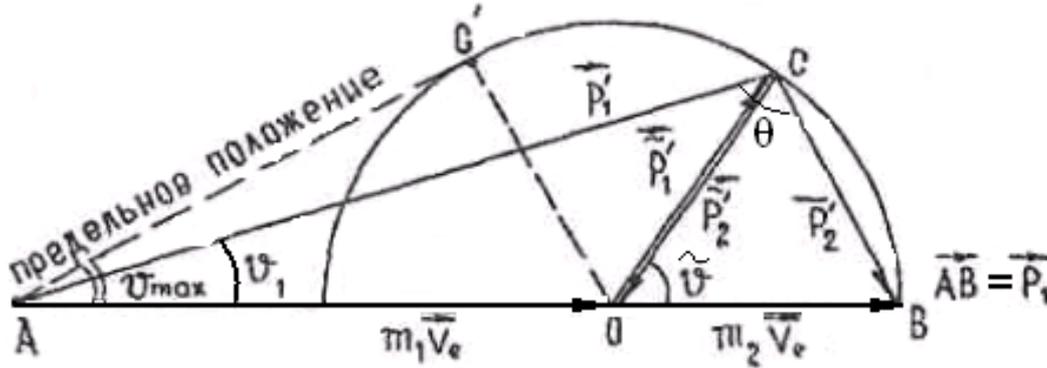
$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}_c = (m_1 + m_2)\frac{m_1\vec{V}_1}{(m_1 + m_2)} = m_1\vec{V}_1 = \vec{p}_1.$$

Расчет параметров частиц после столкновения в лабораторной системе отсчета оказывается очень просто проводить с помощью векторной диаграммы, показанной на рисунке.

Она строится с использованием соотношений (4.25) и (4.26) в следующей последовательности:

а) откладывается  $AB = p_1$ ;

б) проводится окружность радиусом  $\tilde{p} = \mu V_1$ , проходящая через точку  $B$  и имеющая центр на  $AB$ .



Эта окружность и есть геометрическое место точек возможного (не противоречащего законам сохранения) положения точки  $C$ . Показанное на рисунке построение справедливо для любого угла  $\tilde{\theta}$  и, следовательно, точка  $C$  может находиться только на окружности радиуса  $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$  с центром в точке  $O$ , т.ч.  $AO/OB = m_1/m_2$ . Точка  $B$  тоже находится на этой окружности:

$$OB = m_2\vec{V}_c = \frac{m_1\vec{V}_1}{(m_1 + m_2)} = \mu\vec{V}_1 = \tilde{p}.$$

При этом могут реализоваться три различных случая (на рисунке показан третий случай;  $\mathcal{G}_1$  – угол отклонения первой частицы в лабораторной системе отсчета,  $\theta$  – угол разлета частиц):

- а)  $m_1 < m_2$ : точка  $A$  внутри окружности,  $0 < \mathcal{G}_1 < \pi$ ,  $\theta < \pi/2$ ;
- б)  $m_1 = m_2$ : точка  $A$  на окружности,  $0 < \mathcal{G}_1 < \pi/2$ ,  $\theta = \pi/2$ ;
- в)  $m_1 > m_2$ : точка  $A$  вне окружности,  $0 < \mathcal{G}_1 < \mathcal{G}_{\max}$ ,  $\theta > \pi/2$ .

Отметим, что в третьем случае, когда масса налетающей частицы превышает массу покоящейся, существует максимальный угол ее отклонения, который, как следует из рисунка, определяется только отношением масс

$$\sin(\mathcal{G}_{\max}) = \frac{m_2 V_c}{m_1 V_c} = m_2 / m_1. \quad (4.27)$$

Пользуясь построенной векторной диаграммой, легко выразить угол отклонения первой частицы  $\mathcal{G}_1$  в лабораторной системе координат через ее угол отклонения в СЦМ

$$\operatorname{tg}(\mathcal{G}_1) = \frac{\sin(\tilde{\mathcal{G}})}{\cos(\tilde{\mathcal{G}}) + m_1 / m_2}. \quad (4.28)$$

Этим исчерпывается информация, которую можно получить из законов сохранения. В их рамках все определяется с точностью до угла поворота первой частицы в С.Ц.М.  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

**Неупругие столкновения** – это такие столкновения, при которых частицы (тела) после удара могут разлетаться, но, в отличие от абсолютно упругих столкновений, их суммарная кинетическая энергия не сохраняется. Изменение кинетической энергии  $Q$  происходит из-за ее преобразования в другие виды энергии или, наоборот, из-за ее образования за счет других видов энергии. Если при этом кинетическая энергия увеличивается  $Q > 0$ , то столкновение называется **экзотермическим**, если уменьшается  $Q < 0$ , то – **эндотермическим**. Изменение импульса при столкновении, как и ранее, наиболее просто находится в СЦМ. Так как согласно определению неупругого столкновения  $\tilde{T}' - \tilde{T} = Q$ , то

$$\frac{\tilde{p}'^2}{2\mu} = \tilde{T}' = \tilde{T} + Q, \quad \text{откуда} \quad \tilde{p}' = \sqrt{2\mu(\tilde{T} + Q)} \quad (4.29)$$

Диаграмма импульсов строится так же, как и при абсолютно упругом столкновении, но теперь уже точка  $B$  не лежит на окружности, т.к. величина импульсов меняется.

Если  $Q < 0$ , то неупругое столкновение начинает реализоваться лишь тогда, когда кинетическая энергия налетающей (рассматривается случай, когда вторая частица покоится) частицы превысит некоторый порог. Выразим эту пороговую энергию через  $Q$ . Как всегда, проще решать задачу в СЦМ. В ней суммарный импульс равен нулю и после удара возможен случай остановки частиц. Очевидно, что именно в этом случае необходимая на реализацию неупругого столкновения энергия будет минимальна  $\tilde{T}_{\min} = |Q|$ . Но если в С.Ц.М. частицы остановились, то в исходной системе отсчета они движутся как единое целое со скоростью  $\vec{V}_c$  и импульсом  $\vec{p}_1$  равным первоначальному

$$T_{\min} = |Q| + \frac{p_1^2}{2(m_1 + m_2)} = |Q| + \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} T_{\min}. \quad (4.30)$$

При выводе (4.30) мы использовали, что  $T_{\min} = \frac{p_1^2}{2m_1}$ . Решая уравнение (4.30) относительно  $T_{\min}$ , окончательно получаем значение пороговой энергии для эндотермических столкновений

$$T_{\min} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} |Q|. \quad (4.31)$$

## ВОПРОСЫ

1. Почему так велика роль законов сохранения в физике?
2. Сформулируйте закон сохранения импульса СМТ.
3. Что такое замкнутая система? В каких случаях сохраняется суммарный импульс незамкнутой СМТ?
4. Сформулируйте теорему о движении центра масс СМТ. Когда ц.м. системы материальных точек находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения?
5. Что такое момент импульса м.т. и СМТ? Сформулируйте теорему об изменении момента импульса СМТ.
6. В каких случаях справедлив закон сохранения момента импульса?
7. Что такое работа силы? Приведите примеры расчета работы силы.
8. Какие силовые поля называются потенциальными?
9. Какая СМТ точек называется консервативной?
10. Как связаны работа и изменение потенциальной энергии в потенциальном поле?
11. Как связаны сила с потенциальной энергией?
12. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии.

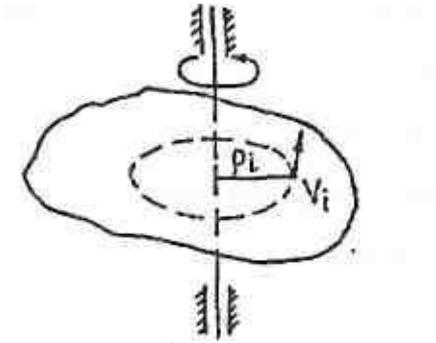
13. Когда справедлив закон сохранения полной механической энергии? Сформулируйте его.
14. Какие типы столкновений частиц Вы знаете? Какая физическая величина сохраняется при любом типе столкновений?
15. Что такое абсолютно неупругие столкновения? Как ведет себя при неупругих столкновениях кинетическая энергия?
16. Что такое абсолютно упругие столкновения? Изменяется ли при них кинетическая энергия? Нарисуйте диаграмму, соответствующую абсолютно упругим столкновениям.
17. Что такое неупругие столкновения? Чему равна пороговая энергия для эндотермических столкновений?
18. Каким будет неупругое эндотермическое столкновение при энергии налетающей частицы меньшей пороговой?

## V. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ранее мы рассматривали СМТ, расстояния между точками которых могли изменяться в процессе движения произвольным образом. Другим важным примером СМТ является абсолютно твердое тело, когда на точки наложены весьма жесткие связи, а именно: расстояние между точками не меняется. Динамику а.т.т. рассмотрим сначала для простейшего варианта движения – вращения тела вокруг неподвижной оси, а затем разберем общий случай.

### 5.1 Момент инерции. Теорема Штейнера

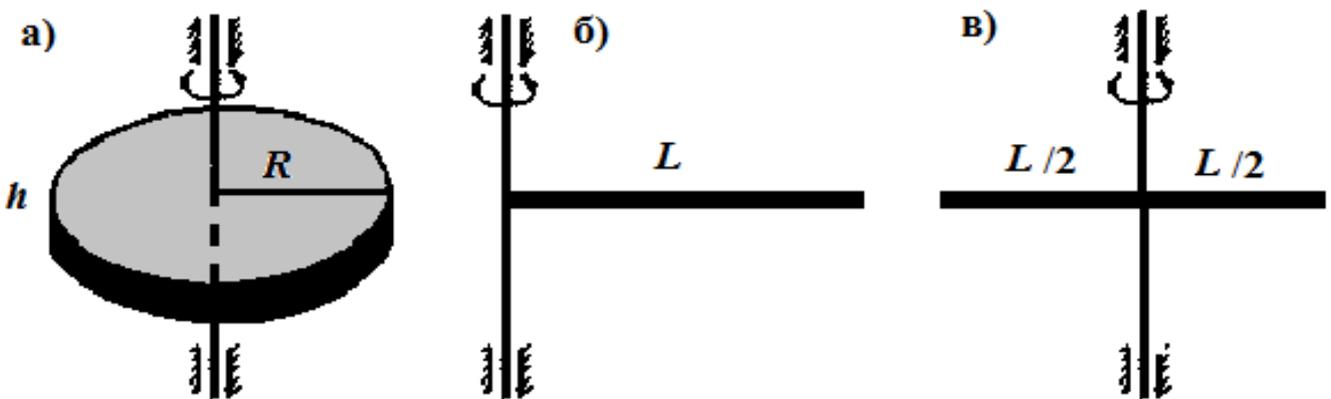
Для вращательного движения существенное значение имеет распределение массы по объему твердого тела. Инертные свойства твердого тела во вращательном движении определяются величиной, которая называется моментом инерции. Момент инерции тела  $I$  относительно некоторой оси  $S$  определяется как сумма произведений масс  $m_i$  его отдельных малых частей на квадрат расстояния этих частей до оси (см. рис.):



$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2. \quad (5.1)$$

Величина  $I$  характеризует распределение массы в теле и не зависит от параметров движения. С её помощью легко вычисляется кинетическая энергия вращения твердого тела  $T_w$ . Согласно (2.5), линейные и угловые скорости  $i$ -ой точки а.т.т., вращающегося вокруг неподвижной оси, связаны соотношением  $V_i = W \rho_i$ . Тогда кинетическая энергия вращения т.т. будет равна:

$$T_w = \sum_{i=1}^N m_i \frac{V_i^2}{2} = \frac{W^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 = \frac{I W^2}{2}. \quad (5.2)$$



*Пример 5.1. Подсчитаем моменты инерции некоторых простейших тел, имеющих массу  $m$ .*

*а) плоский диск с плотностью  $\rho$ , толщиной  $h$  и радиусом  $R$ . Момент инерции относительно перпендикулярной к плоскости диска оси вращения, проходящей через центр (см. рис. а)), согласно (5.1) равен:*

$$I = \int_0^R 2\pi r dr h \rho r^2 = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} h \rho = \frac{mR^2}{2}.$$

б) стержень длины  $L$  с перпендикулярной к нему осью вращения, проходящей через конец (см. рис. б)),  $\lambda$  - линейная плотность стержня). Из (5.1) получаем

$$dm = \lambda dx, \quad I = \int_0^L \lambda x^2 dx = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{mL^2}{3}. \quad (5.3)$$

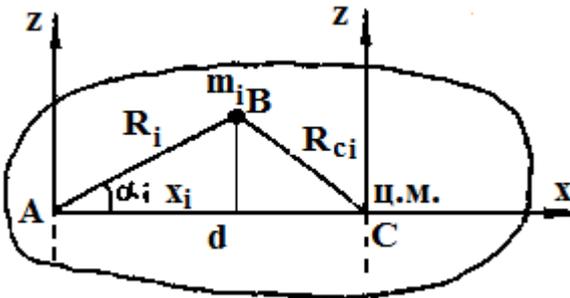
в) стержень длины  $L$  с перпендикулярной к нему осью вращения, проходящей через его ц.м. (см. рис. в)). Используя (5.1), находим

$$I_c = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 dx = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}. \quad (5.4)$$

Из (5.3) и (5.4) следует, что  $I = I_c + m(L/2)^2$ . Оказывается это утверждение справедливо для любых а.т.т. и носит название теоремы Штейнера.

**Теорема Штейнера: Момент инерции а.т.т. относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями:**

$$I = I_c + Md^2 \quad (5.5)$$



Для доказательства (5.5) совместим ось  $Z$  с произвольной осью вращения, проходящей через точку  $A$ , а ось  $AX$  направим так, чтобы она пересекала параллельную ось, проходящую через центр масс  $C$  (см. рис.). Обозначим через  $R_i$  и  $R_{ci}$  расстояния от выделенного элемента  $B$  массой  $m_i$  до каждой из осей. По определению имеем:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2, \quad I_c = \sum_{i=1}^N m_i R_{ci}^2.$$

Из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов следует

$$R_{ci}^2 = R_i^2 + d^2 - 2dR_i \cos \alpha = R_i^2 + d^2 - 2d x_i.$$

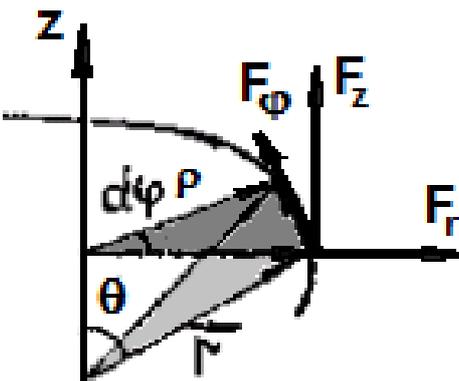
Тогда, суммируя по точкам а.т.т., получаем

$$I_c = \sum_{i=1}^N m_i R_{ci}^2 = \sum_{i=1}^N m_i (R_i^2 + d^2 - 2d x_i) = I + Md^2 - 2d \sum_{i=1}^N x_i m_i = I + Md^2 - 2d M x_c,$$

а поскольку  $x_c = d$ , то окончательно получаем, что  $I = I_c + Md^2$  и теорема доказана.

## 5.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Выведем основное уравнение движения а.т.т. из теоремы об изменении кинетической энергии, которую применим для частного случая вращения тела вокруг неподвижной оси. Подсчитаем работу  $\delta A$ , совершаемую над телом при повороте его на угол  $d\varphi$ . В отличие от общего случая СМТ, для твердого тела работа внутренних сил равна нулю (т.к. нет относительных перемещений точек) и при применении теоремы об изменении кинетической энергии необходимо принимать во внимание только работу внешних сил  $\vec{F}^{ext}$ . Тогда (см. рис.: компоненты силы  $F_z^{ext}, F_r^{ext}$  не вносят вклада в работу, т.к. в направлениях



вращения тела вокруг неподвижной оси. Подсчитаем работу  $\delta A$ , совершаемую над телом при повороте его на угол  $d\varphi$ . В отличие от общего случая СМТ, для твердого тела работа внутренних сил равна нулю (т.к. нет относительных перемещений точек) и при применении теоремы об изменении кинетической энергии необходимо принимать во внимание только работу внешних сил  $\vec{F}^{ext}$ . Тогда (см. рис.: компоненты силы  $F_z^{ext}, F_r^{ext}$  не вносят вклада в работу, т.к. в направлениях

по  $z$  и  $r$  при вращении тела отсутствует перемещения)

$$\delta A = F_{\varphi}^{ext} dr_{\varphi} = F_{\varphi}^{ext} \rho d\varphi = M_z^{ext} d\varphi .$$

и, следовательно, работа определяется моментом внешних сил  $M_z^{ext}$

$$\delta A = M_z^{ext} d\varphi . \quad (5.6)$$

Согласно теореме об изменении кинетической энергии системы, из соотношений (5.2), (5.6) имеем

$$dT = \delta A \quad \text{или} \quad d\left(\frac{IW^2}{2}\right) = M_z^{ext} d\varphi ,$$

откуда, деля на  $dt$ , получаем основное уравнение динамики вращения а.т.т. вокруг неподвижной оси

$$I \frac{dW}{dt} = M_z^{ext} . \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) также следует из теоремы об изменении суммарного момента импульса СМТ относительно неподвижного полюса (4.13) для z-компоненты

$$\frac{dL_{\Sigma z}}{dt} = M_{\Sigma z}^{ext} .$$

Находим  $L_{\Sigma z}$ , используя связь между линейной и угловой скоростями  $V_i = W \rho_i$ ,

$$L_{\Sigma z} = \sum_{i=1}^N p_i \rho_i = \sum_{i=1}^N m_i V_i \rho_i = \sum_{i=1}^N m_i W \rho_i \rho_i = W \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 = IW \quad (5.8)$$

и, подставляя его в это соотношение, опять получаем уравнение динамики вращения а.т.т. (5.7).

Для вращающегося вокруг неподвижной оси тела, на которое не действуют внешние моменты сил, закон сохранения момента импульса, в соответствии с (5.8), записывается в виде

$$IW = const . \quad (5.9)$$

*Пример 5.2. ЗСМИ "помогает" фигуристке увеличить угловую скорость вращения. Уже вращаясь, она прижимает руки к телу и тем самым уменьшает свой момент инерции от  $I_1$  до  $I_2$ , увеличивая при этом угловую скорость. Изменение угловой скорости можно определить из (5.9), приравняв моменты инерции до и после прижатия рук:*

$$I_1 W_1 = I_2 W_2, \quad \text{откуда} \quad W_2 = \frac{I_1}{I_2} W_1 .$$

*Т.к.  $I_1 > I_2$ , то согласно полученной формуле  $W_2 > W_1$ . Фигуристку заставляет раскручиваться сила Кориолиса, действующая на руки (см. второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета, п.3.4). При этом, она сама совершает работу против центробежной силы, которая, в свою очередь, идет на увеличение кинетической энергии фигуристке.*

Отметить, что между вращением а.т.т. вокруг неподвижной оси и движением м.т. по прямой существуют аналогии в переменных и основных соотношениях, которые представлены в таблице.

ТАБЛИЦА Аналогии между движениями м.т. и а.т.т.

движение м.т. по прямой		вращение а.т.т. вокруг неподвижной оси	
координата м.т.	$x$	УГОЛ поворота	$\varphi$
линейная скорость	$V = \frac{dx}{dt}$	угловая скорость	$W = \frac{d\varphi}{dt}$
линейное ускорение	$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	угловое ускорение	$\beta = \frac{dW}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
масса м.т.	$m$	момент инерции а.т.т.	$I$
ПЗН.	$m a_x = F_x$	уравнение движения	$I\beta = M$
импульс м.т.	$P_x = mV_x$	момент импульса а.т.т.	$L = IW$
З.С.И. ( $F_x = 0$ )	$m V_x = const$	З.С.И.И. ( $M = 0$ )	$IW = const$

Используя аналогии из представленной таблицы, можно писать соотношения для вращения а.т.т. вокруг неподвижной оси по известным уравнениям для движения м.т. по прямой. При этом достаточно только заменить  $x$  на  $\varphi$ ,  $m$  на  $I$  и т.д.

### 5.3. Уравнения Эйлера

Рассмотрим наиболее общий случай движения а.т.т. – случай, когда тело вращается и не имеет ни одной неподвижной точки. Оказывается, что определить кинетическую энергию такого движения можно довольно просто по теореме Кёнига. **Теорема Кёнига: кинетическая энергия любой СМТ (в том числе и а.т.т.) равна кинетической энергии воображаемой м.т. с массой рассматриваемой СМТ и скоростью, равной скорости центра масс, плюс кинетическая энергия СМТ относительно системы отсчета, связанной с центром масс и движущейся поступательно.**

Докажем эту теорему. Пусть  $T'$  - кинетическая энергия СМТ относительно поступательно движущейся со скоростью  $V_c$  системы отсчета, связанной с центром масс. Тогда скорость  $i^{oi}$  м.т. относительно лабораторной системы отсчета  $V_i$  связана со скоростью этой же точки в СЦМ соотношением  $\vec{V}_i = \vec{V}'_i + \vec{V}_c$  и для кинетической энергии  $T$  в лабораторной системе отсчета получаем

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i(\vec{V}_i, \vec{V}_i)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i(\vec{V}'_i + \vec{V}_c, \vec{V}'_i + \vec{V}_c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i'^2 + \sum_{i=1}^N m_i(\vec{V}_c, \vec{V}'_i) = \frac{M V_c^2}{2} + T'$$

откуда и следует теорема Кёнига:

$$T = \frac{m V_c^2}{2} + T'. \quad (5.10)$$

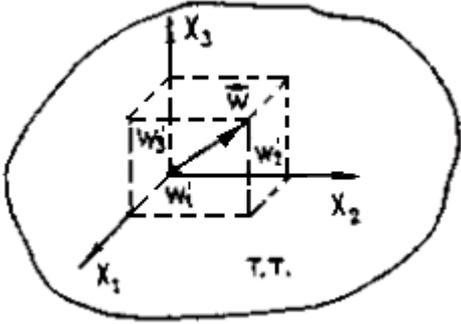
При выводе (5.10) использовалось, что  $(\vec{V}'_c = 0)$ , т.к. это скорость ц.м. в СЦМ)

$$\sum_{i=1}^N m_i(\vec{V}_c, \vec{V}'_i) = \left( \vec{V}_c, \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i \right) = \left( \vec{V}_c, M \vec{V}'_c \right) = 0.$$

В соответствии с теоремой Кёнига для определения кинетической энергии а.т.т. необходимо найти ее величину относительно центра масс  $T'$ . В СЦМ у а.т.т. одной из его неподвижных точек является, очевидно, центр масс и, следовательно, мгновенная ось вращения тоже проходит через него. Так же, как в случае вращения вокруг неподвижной оси, получаем  $T' = \frac{IW}{2}$  (см. (5.2),  $I$  - момент инерции относительно мгновенной оси вращения), и (5.10) принимает вид

$$T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{IW^2}{2}. \quad (5.11)$$

Полученное соотношение (5.11) не очень удобно для решения задач, т.к. момент



инерции  $I$  будет, в общем случае, зависеть от времени из-за смены ориентации мгновенной оси вращения относительно тела. Поэтому найдем такое выражение для  $T'$ , в котором характеристики инерции вращения не зависят от времени. Будем считать, что у тела имеется неподвижная точка  $O$  (в частности, в СЦМ это ц.м.) и введем систему координат  $O X_1 X_2 X_3$ , связанную с а.т.т. Тогда, согласно (2.9),  $\vec{V} = [\vec{W}, \vec{r}']$  и для кинетической энергии  $T'$  получаем ( $i, k = 1, 2, 3$  - индексы осей системы координат  $O X_1 X_2 X_3$ , (см. рис.); знак  $\sum$  означает суммирование по всем частицам а.т.т., индекс суммирования для избежания громоздкости в формулах опущен):

где  $W'_i$  - проекции вектора угловой скорости на оси вращающейся вместе с телом системы координат  $O X_1 X_2 X_3$ ;  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера ( $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$  и  $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$ ). Или, вводя тензор момента инерции, который задается в каждой из систем координат таблицей (матрицей) из девяти чисел, определяемых по формуле

$$T' = \sum \frac{m(\vec{V}, \vec{V})}{2} = \sum \frac{m([\vec{W}, \vec{r}'], [\vec{W}, \vec{r}'])}{2} = \frac{1}{2} \sum m(\vec{W}, [\vec{r}', [\vec{W}, \vec{r}']]) = \frac{1}{2} \sum m((\vec{W}r'^2 - \vec{r}'(\vec{W}, \vec{r}')), \vec{W}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum m(W'_i r'^2 - x_i x_k W'_k) W'_i = \frac{W'_i W'_k}{2} \sum m(\delta_{ik} r'^2 - x_i x_k),$$

получаем

$$I_{ik} = \sum m(\delta_{ik} r'^2 - x_i x_k) \quad (5.12)$$

$$T' = \frac{1}{2} I_{ik} W'_i W'_k \quad (5.13)$$

При выводе (5.12), (5.13) использовались формула для двойного векторного произведения (см. п. 2.2) и правило суммирования по повторяющимся индексам (например,  $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ). Из теоремы Кёнига (5.10) и соотношения (5.13) следует окончательная формула для кинетической энергии а.т.т.

$$T = \frac{\sum m V_c^2}{2} + \frac{I_{ik} W'_i W'_k}{2} \quad (5.14)$$

Для выяснения физического смысла тензора момента инерции распишем в соответствии с (5.12) его компоненты:

$$I_{11} = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) = \sum m(x_2^2 + x_3^2) = \sum m \rho_1^2 = I_1,$$

$$I_{22} = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2^2) = \sum m(x_1^2 + x_3^2) = \sum m \rho_2^2 = I_2,$$

$$I_{33} = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^2) = \sum m(x_1^2 + x_2^2) = \sum m \rho_3^2 = I_3,$$

$$I_{12} = I_{21} = -\sum m x_1 x_2, \quad I_{13} = I_{31} = -\sum m x_1 x_3, \quad I_{23} = I_{32} = -\sum m x_2 x_3$$

где  $\rho_i$  - расстояние от рассматриваемой точки до оси  $Ox_i$ .

Таким образом, компоненты тензора  $I_{ik}$  с одинаковыми индексами представляют собой моменты инерции относительно координатных осей, соответствующих этому индексу (см. соотношение (5.1)). Парно равные компоненты ( $I_{ik} = I_{ki}$ ) с различными индексами называются **центробежными моментами инерции**. Для осей, являющихся осями симметрии, центробежные моменты обращаются в ноль. Более того, оказывается, что для каждой точки тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, назы-

ваемые **главными** и такие, что относительно этих осей центробежные моменты равны нулю. Поэтому в главных осях тензор момента инерции имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

и выражение (5.14) для кинетической энергии упрощается

$$T = \frac{\sum m V_c^2}{2} + \frac{1}{2}(A W_1^2 + B W_2^2 + C W_3^2). \quad (5.15)$$

Величины  $I_{ij}$  и  $A, B, C$  при вращении а.т.т. остаются постоянными (не зависят от времени), т.к. оси системы координат  $O X_1 X_2 X_3$  связаны с телом, и их положение относительно тела не меняется. В то же время проекции вектора угловой скорости на эти оси оказываются, очевидно, переменными, даже когда а.т.т. вращается с постоянной угловой скоростью.

Теперь подсчитаем момент импульса а.т.т. относительно центра масс ( $\vec{R}'_c = 0$ ):

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum [\vec{r}', \vec{p}] = \sum m [\vec{r}', \vec{V}] = \sum m [\vec{r}', \vec{V}_c + [\vec{W}, \vec{r}']] = [\sum m \vec{r}', \vec{V}_c] + \sum m [\vec{r}', [\vec{W}, \vec{r}']] = \\ &= [M \vec{R}'_c, \vec{V}_c] + \sum m (\vec{W} r' - \vec{r}'^2 (\vec{W}, \vec{r}')) = \sum m (\vec{W} r' - \vec{r}'^2 (\vec{W}, \vec{r}')). \end{aligned}$$

Очевидно, что такой же результат получится для момент импульса а.т.т. относительно неподвижной точки.

Спроектируем полученное выражение для  $\vec{L}$  на оси связанной с а.т.т. системы координат:

$$L'_i = \sum m (W'_i r'^2 - x_i x_j W'_j) = W'_j \sum m (\delta_{ij} r'^2 - x_i x_j) = I_{ij} W'_j.$$

Следовательно,

$$L'_i = I_{ij} W'_j. \quad (5.16)$$

Если оси – главные, то соотношения (5.16) записываются в виде:

$$L'_1 = A W'_1, \quad L'_2 = B W'_2, \quad L'_3 = C W'_3. \quad (5.17)$$

Из полученных результатов следуют основные уравнения динамики а.т.т., называемые **уравнениями Эйлера**. На основании теоремы об изменении суммарного момента импульса (4.13) (это соотношение верно, когда момент импульса считается относительно ц.м. или неподвижного полюса), записанной с помощью формулы (2.8) в виде

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)' + [\vec{W}, \vec{L}] = \vec{M}_{\Sigma}^{ext}$$

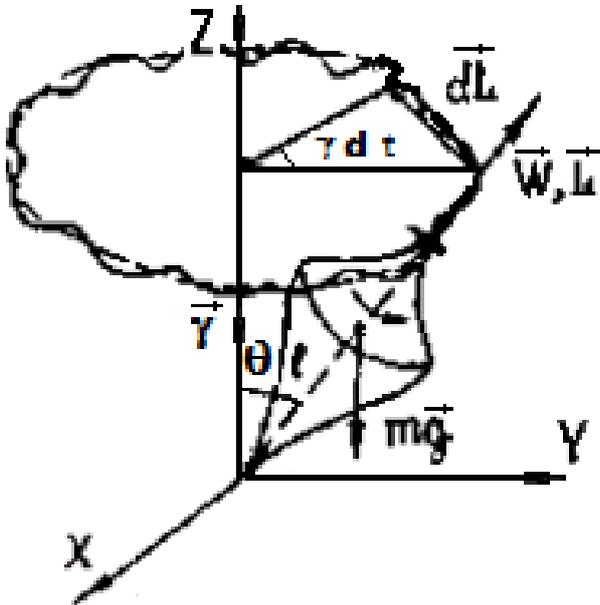
и с учетом (5.17) получаем динамические уравнения Эйлера для описания вращения тела вокруг центра масс:

$$\begin{cases} A \frac{dW'_1}{dt} + (C - B) W'_2 W'_3 = M'_1{}^{ext}, \\ B \frac{dW'_2}{dt} + (A - C) W'_1 W'_3 = M'_2{}^{ext}, \\ C \frac{dW'_3}{dt} + (B - A) W'_1 W'_2 = M'_3{}^{ext}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Из анализа приведенного вывода уравнений Эйлера следует, что, кроме вращения вокруг ц.м., движущегося с произвольной скоростью, они справедливы и в случае вращения а.т.т. вокруг произвольной неподвижной точки.

#### 5.4. Динамика гироскопов

Остановимся теперь на динамике вращения гироскопов. **Гироскопом называется**



**массивное симметричное тело, ( $B = C, A = I$ ), вращающееся вокруг оси симметрии с большой угловой скоростью.** Специфические свойства движения гироскопов нашли себе разнообразные практические применения (например, в автоматических системах управления летательных аппаратов). Наиболее распространенным примером гироскопа является волчок (см. рис.) Опыт показывает, что под действием силы тяжести волчок не падает, а совершает прецессию с угловой скоростью  $\vec{\gamma}$ . Прецессией называется такое движение волчка, когда его ось равномерно вращается вокруг вертикали, описывая круговой конус. Одновременно с прецессией сам волчок равномерно вращается вокруг собственной оси.

Найдем связь между скоростью прецессии и собственной угловой скоростью вращения волчка  $\vec{W}$ . По теореме о скорости изменения момента импульса (4.13) относительно неподвижного полюса O имеем

$$\left. \frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} \right|_O = \frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = M^{ext}$$

выражения для  $|d\vec{L}_\Sigma|$  и  $M^{ext}$  ( $\gamma \ll W$ )

$$|d\vec{L}_\Sigma| \approx |d\vec{L}_w| = L_w \sin(\theta) \gamma dt = IW \gamma \sin(\theta) dt, \quad M^{ext} = mgl \sin(\theta),$$

получаем приближенную формулу угловой скорости прецессии гироскопа ( $l$  – расстояние от точки опоры O до ц.м. волчка)

$$\gamma = \frac{mgl}{IW}. \quad (5.19)$$

Интересно, что угловая скорость прецессии не зависит от угла наклона оси волчка к горизонту. Формула (5.19) соответствует опыту, т.к. из нее следует, что  $\gamma \sim \frac{1}{W}$  и с увеличением  $W$  скорость  $\gamma$  падает. На самом деле движение волчка сложнее, поскольку на прецессию накладывается нутация: небольшие колебания угла наклона  $\theta$ .

#### ВОПРОСЫ

1. Почему задача динамики твердого тела, вообще говоря, легче задачи динамики СМТ?
2. Что такое момент инерции? Зависит ли он от характеристик движения?
3. Какова связь, между кинетической энергией вращения тела вокруг неподвижной оси и его угловой скоростью?
4. Подсчитайте моменты инерции плоского диска и стержня.

5. Сформулируйте теорему Штейнера.
6. Выпишите основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.
7. Сформулируйте закон сохранения момента инерции для вращающегося тела. Когда он справедлив?
8. В чем заключается аналогия между вращением твердого тела вокруг неподвижной оси и движением материальной точки по прямой?
9. Сформулируйте теорему Кёнига.
10. Что такое тензор момента инерции? Какой он имеет вид в главных осях?
11. Выпишите динамические уравнения Эйлера для вращения твердого тела. При каких условиях они справедливы?
12. Что такое гироскоп? Чем обусловлена его прецессия?
13. Как связана угловая скорость прецессии с собственной угловой скоростью волчка?
14. Какая сила создает момент силы, увеличивающий угловую скорость фигуристки, прижимающей руки к телу, в системе отсчета, вращающейся с ее начальной угловой скоростью?

## VI. КОЛЕБАНИЯ

Основные законы механики мы с вами уже изучили. Теперь посмотрим как они работают в очень интересном случае движения механических систем – в колебательных процессах.

### 6.1. Свободные незатухающие колебания

Одним из наиболее распространенных типов движения механических систем являются малые свободные колебания вблизи устойчивого положения равновесия. Оказывается, что, несмотря на все разнообразие колебательных движений, малые незатухающие колебания одномерных систем (систем, конфигурация которых задается одной переменной) описываются уравнением одного и того же вида. Выведем его для двух конкретных систем. Рассмотрим грузик на гладкой плоскости, скрепленный с пружиной. Дифференцируя по времени закон сохранения полной энергии для этой системы (см. главу IV)

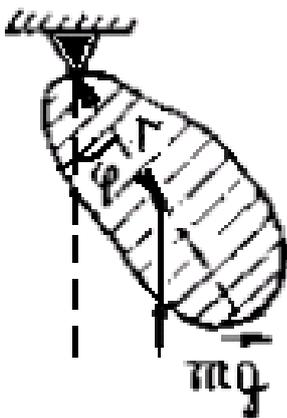
$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const,$$

получаем  $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ , откуда, вводя  $w = \sqrt{k/m}$ , приходим к так называемому каноническому виду уравнения малых свободных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0. \quad (6.1)$$

Систему, описываемую уравнением (6.1), принято называть **гармоническим осциллятором** (гармоническим, т.к. решение уравнения представляется в виде суперпозиции гармонических функций – синусов и косинусов.)

Рассмотрим теперь физический маятник – а.т.т., колеблющееся вокруг неподвижной оси, параллельной земной поверхности (см. рис.). Записывая динамическое уравнение (5.7) для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси,



$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgr \sin(\varphi),$$

получаем при малых  $\varphi$ , когда  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ , уравнение, совпадающее по своему виду с (6.1) (отличие лишь в обозначении и физическом смысле переменной, определяющей конфигурацию одномерной системы: в (6.1) это  $x$ , а в (6.2) –  $\varphi$ )

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + w^2\varphi = 0, \quad (6.2)$$

где  $w = \sqrt{\frac{mgr}{I}} = \sqrt{\frac{g}{\bar{l}}}$ ;  $\bar{l} = \frac{I}{mr}$  – приведенная длина физического маятника.

Итак, для изучения малых свободных колебаний одномерных систем достаточно рассмотреть решения уравнения типа (6.1). Как легко проверить непосредственной подстановкой, общее решение этого дифференциального уравнения записывается в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.3)$$

где постоянные  $A$  и  $\varphi_0$  определяются из начальных условий. Постоянная  $A$  называется амплитудой,  $\varphi_0$  – начальной фазой колебаний, а  $\omega$  – круговой (или циклической) частотой.

той колебаний. Из (6.3) следует, что вблизи положения равновесия малые колебания являются гармоническими, т.е. описываются гармоническими функциями вида:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Поскольку период функции  $\cos(\varphi)$  равен  $2\pi$ , то период колебаний, совершаемых по гармоническому закону  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , определяется из соотношения

$$T = 2\pi / \omega, \tag{6.4}$$

откуда для грузика на пружинке и физического маятника имеем, соответственно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{6.5}$$

Для любых других одномерных систем период малых гармонических колебаний находится аналогично: сначала приводят динамическое уравнение к каноническому виду (6.1), а затем определяют из него  $\omega$  и используют соотношение (6.4). Применяется и другой метод нахождения периода  $T$ , основанный на равенстве при колебательных процессах максимальных значений кинетических и потенциальных энергий  $T_{\max} = U_{\max}$ . Это равенство следует из закона сохранения полной энергии  $T + U = \text{const}$ , выполнения неравенств  $T \geq 0$ ,  $U \geq 0$  и существования таких состояний системы, когда  $T$  или  $U$  равны нулю (для обеспечения выполнения неравенства  $U \geq 0$  необходимо за начало отсчета потенциальной энергии принять потенциальную энергию системы в положении устойчивого равновесия).

*Пример 6.1. В качестве примера определим энергетическим методом период колебаний грузика на пружинке:*

$$T_{\max} = \max_t \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right) = \max_t \left( \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \frac{m\omega^2 A^2}{2},$$

$$U_{\max} = \max_t \left( \frac{kx^2}{2} \right) = \max_t \left( \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \frac{kA^2}{2}.$$

Поскольку  $T_{\max} = U_{\max}$ , то получаем  $\frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$ , откуда  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и, согласно (6.4),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

что, конечно, совпадает с (6.5). Из найденных выражений для  $T_{\max}$  и  $U_{\max}$  следует также, формула для полной энергии малых колебаний

$$E = T + U = T_{\max} + U_{\max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Следовательно, полная энергия колебаний пропорциональна квадратам амплитуды и частоты. Согласно закону сохранения энергии ( $E = \text{const}$ ), получаем  $\frac{kA^2}{2} = \text{const}$  или  $A = \text{const}$ , т.е. при свободных колебаниях системы амплитуда не изменяется. Последнее справедливо, если в системе не действуют непотенциальные силы типа трения.

Изучение гармонического осциллятора часто удобно проводить в фазовой плоскости, одной из координат которой является смещение  $x$ , а другой - импульс гармонического осциллятора  $p$ . Каждому значению смещения  $x$  соответствует некоторое значение импульса  $p$ . Продифференцируем общее решение (6.3) для смещения по времени и умножим на массу осциллятора  $m$ , тогда

$$p = m \frac{dx}{dt} = -mA\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (6.6)$$

Представим уравнения (6.3) и (6.6) в виде:

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{p}{mA\omega} = -\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Возведя их в квадрат и сложив, получаем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{m^2 A^2 \omega^2} = 1 \quad (6.7)$$

с полуосями  $a = A$  и  $b = mA\omega$ .

Таким образом, точка, изображающая систему в фазовом пространстве, в процессе колебаний гармонического осциллятора описывает эллипс, который и является ее фазовой траекторией. Так как площадь эллипса равна  $\pi ab$ , то площадь, ограниченная этой траекторией  $S$ , вычисляется по формуле:

$$S = \pi A(mA\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

В примере 6.1 показано, что  $mA^2\omega^2/2$  есть полная энергия осциллятора  $E$ . Вводя собственную частоту свободных колебаний осциллятора  $\nu = \omega/2\pi$ , можно записать площадь эллипса в виде  $S = E/\nu$ .

Поскольку площадь, ограниченная любой замкнутой кривой, вычисляется с помощью интеграла вдоль этой кривой, то и в случае эллипса имеем  $S = \oint p dx$ , откуда

$$\oint p dx = \frac{E}{\nu}. \quad (6.8)$$

Можно показать, что величина  $\oint p dx$  является адиабатическим инвариантом, т.е.

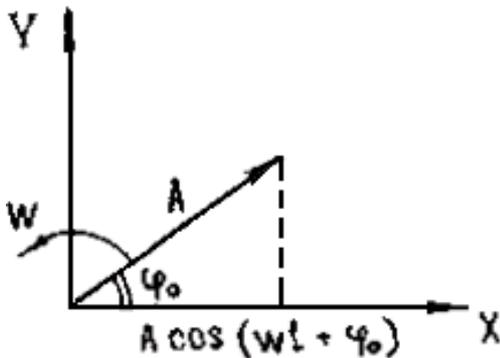
она не меняется при достаточно медленных изменениях (малых возмущениях) колебательной системы и, следовательно, энергия в этом случае должна быть пропорциональна частоте. Этот вывод и соотношение (6.8) играют важную роль в квантовой механике.

### 6.2. Сложение гармонических колебаний

Во многих случаях возникает задача сложения гармонических колебаний. При этом оказывается полезным их графическое представление в виде векторов. Из начала координат – точки  $O$  – отложим вектор с длиной, равной амплитуде колебания  $A$ , и углом с осью  $x$  –  $\varphi_0$  (см. рис.). Если представить себе, что этот вектор вращается с угловой скоростью  $\omega$ , то проекция вектора на ось  $x$  будет изменяться в пределах от  $-A$  до  $A$  по закону

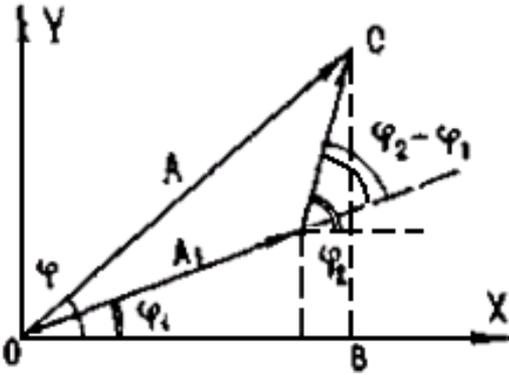
$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Следовательно, проекция конца вектора совершает колебания по гармоническому закону с амплитудой, равной длине вектора, круговой частотой, равной угловой скорости вращения, и начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью  $x$  в начальный момент времени. Очевидно, любое гармоническое колебание может быть представлено в виде такого вектора. Рассмотрим теперь, какой операции над векторами соответствует сложение колебаний одного направления и равной частоты. Пусть надо



сложить колебание  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  с колебанием  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . Тогда в результате сложения получится снова гармоническое колебание  $x$  с той же частотой  $\omega$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi).$$



Т.к. при сложении векторов их проекции также складываются, то вектор, соответствующий результирующему колебанию, есть просто сумма векторов складываемых колебаний (см. рис.). По теореме косинусов из показанного на рисунке треугольника получаем выражение для суммарной амплитуды

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6.9)$$

Соотношение для нахождения фазы  $\varphi$  находится из различного представления длины катета  $BC$

$$\operatorname{tg}(\varphi)(A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)) = A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2),$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)}. \quad (6.10)$$

Проанализируем полученные уравнения. Если разность фаз колебаний составляет  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то амплитуда результирующего колебания максимальна и равна  $A_1 + A_2$ . При разности фаз  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (2k+1)\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) колебания находятся в противофазе, и амплитуда результирующего колебания минимальна  $A = |A_1 - A_2|$ .

Результат сложения колебаний с разной частотой оказывается уже негармоническим колебанием, и векторное представление в этом случае не работает. Пусть складываемые колебания в начальный момент не имеют сдвига по фазе:

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t) \quad \text{и} \quad x_2 = A \cos(\omega_2 t),$$

тогда

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right).$$

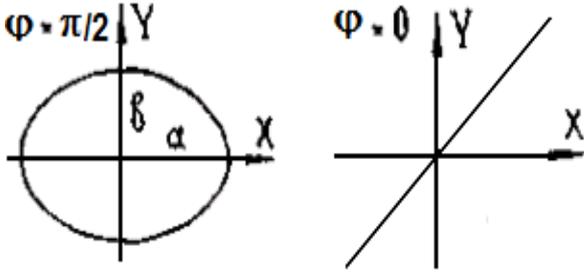
Интерес представляет случай близких частот, при котором результирующее колебание должно быть в каком-то смысле близко к гармоническому (при  $\omega_1 = \omega_2$ , оно гармоническое).

На самом деле, когда  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$ , то множитель  $2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$  медленно ме-

няющаяся амплитуда, и результирующее колебание представляет собой **модулированное гармоническое колебание** с частотой  $\omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$ . Такой тип колебаний называется **биениями**. Зависимость результирующего колебания при биениях показана на рисунке.

Если колебания – взаимно-перпендикулярны, то результат сложения можно непосредственно наблюдать на электронном осциллографе, подав на его отклоняющие пластины (тоже взаимно-перпендикулярные) напряжения, пропорциональные величинам складываемых колебаний. При этом в общем случае на экране получают довольно сложные и деформирующиеся фигуры. Наиболее простой вид эти фигуры имеют при условии равенства частот складываемых колебаний  $x$  и  $y$ :

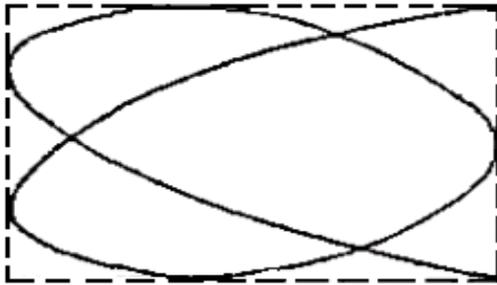
$$x = a \cos(\omega t), \quad y = b \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.11)$$



Конец вектора результирующего колебания будет описывать кривую, уравнение которой получается после исключения параметра  $\omega t$  из соотношений (6.11). Это уравнение можно записать в виде

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{2xy}{ab} \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi). \quad (6.12)$$

Из него следует, что при различных  $\varphi$  получается либо эллипс (например, при  $\varphi = \pi/2$ ), либо прямая (например, при  $\varphi = 0$ ), которые в зависимости от значения  $\varphi$  имеют различную ориентацию (см. рис.).



Если частоты складываемых колебаний слегка различны, то разность фаз  $\delta$  будет медленно изменяться, а эллипс соответственно деформироваться и поворачиваться. Когда различие частот не мало, то образуются так называемые **фигуры Лиссажу**, существенно отличающиеся по своему виду от эллипсов, т.к. за время одного периода происходит значительное изменение  $\delta$ . На рисунке показана фигура Лиссажу, образуемая при соотношении частот 3:4.

На рисунке показана фигура Лиссажу, образуемая при соотношении частот 3:4.

### 6.3 Колебания с трением

Ранее нами были рассмотрены свободные незатухающие колебания систем. Однако на практике свободные колебания системы всегда затухающие. Затухание колебаний обусловлено наличием сил трения или сил сопротивления окружающей среды движению тела. Работа таких сил, называемых **диссипативными**, переводит механическую энергию в другие виды энергии, чаще всего в тепло; полная механическая энергия при этом не сохраняется и амплитуда колебаний уменьшается. Для учета влияния этих сил на процесс колебаний нужно к упругой возвращающей к положению устойчивого равновесия силе добавить силу трения (диссипации).

Простейший вид трения, называемого **вязким**, соответствует случаю, когда сила пропорциональна скорости  $F_{fr} = -\alpha \dot{x}$ . С учетом силы трения уравнение колебаний груза на пружинке (второй закон Ньютона) записывается в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \dot{x}$$

или в канонической форме ( $\beta = \frac{\alpha}{2m}$  и  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ )

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Решением уравнения (6.13) при не очень большом затухании ( $\beta < \omega$ ) является функция

$$x = A \exp(-\beta t) \cos(\tilde{\omega} t + \varphi) \quad (6.13)$$

с круговой частотой колебаний

$$\tilde{\omega} = \omega \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}} \quad (6.14)$$

и экспоненциально затухающей амплитудой.

Введем ряд физических величин, которые характеризуют процесс затухания и диссипативные свойства колебательных систем. Найдем время, в течении которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз:

$$\frac{A}{Ae^{-\beta t}} = e, \quad \text{откуда} \quad \beta t = 1, \quad (6.15)$$

т.е. коэффициент затухания  $\beta = \alpha / 2m$  обратен по величине промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Важным свойством рассматриваемого типа колебаний является сохранение отношения амплитуд через период  $\tilde{T} = T / \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}}$  ( $T = 2\pi / \omega$  – период колебаний без трения; наличие трения увеличивает период до  $\tilde{T}$ ). Найдем это отношение, называемое **декрементом затухания**:

$$A_{n-1} / A_n = A(t) / A(t + \tilde{T}) = A \exp(-\beta t) / A \exp(-\beta(t + \tilde{T})) = \exp(\beta \tilde{T}).$$

Логарифм этого отношения  $\delta$  есть **логарифмический декремент затухания**

$$\delta = \ln(A_{n-1} / A_n) = \beta \tilde{T} = \alpha \tilde{T} / 2m = \left( \tau / \tilde{T} \right)^{-1} = 1 / N = const.$$

Следовательно, он является обратным по величине числу колебаний  $N$ , совершаемых за время, при котором амплитуда уменьшится в  $e$  раз. Видно также, что затухание тем быстрее, чем больше коэффициент трения  $\alpha$ , меньше масса  $m$  и длительнее период  $T$ . Логарифмический декремент затухания характеризует способность системы рассеивать энергию. Амплитуда колебаний убывает по закону  $\exp(-\beta t)$ . Энергия, запасенная в системе, пропорциональна амплитуде в квадрате (см. пример 6.1), следовательно, она убывает по закону  $\exp(-2\beta t)$ . Тогда относительное уменьшение энергии за период равно

$$\Delta E / E = \frac{E(t) - E(t + \tilde{T})}{E(t)} = \frac{1 - \exp(-2\beta \tilde{T})}{1} = 1 - \exp(-2\delta). \quad (6.16)$$

При незначительном затухании ( $\delta \ll 1$ ):  $\exp(-2\delta) = 1 - 2\delta$  и из (6.16) следует

$$\Delta E / E = 1 - (1 - 2\delta) = 2\delta. \quad (6.17)$$

Введем понятие **добротности системы** как величины обратную относительной убыли энергии при изменению фазы на один радиан

$$1 / Q = (\Delta E / E) / 2\pi. \quad (6.18)$$

Используя соотношение (6.17), приходим к следующему выражению для  $Q$ , справедливому при незначительном затухании:

$$Q = 2\pi E / \Delta E = \pi / \delta. \quad (6.19)$$

Таким образом, при малых  $\delta$  добротность колебательной системы обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания. Существуют колебательные системы с весьма малым декрементом затухания. Например, для колебательного радио-контура  $\delta = 0,02 \dots 0,05$ ; для камертона  $\delta = 10^{-3}$ ; для кварцевой пластинки  $\delta = 10^{-4} \dots 10^{-5}$ .

*Пример 6.2. Оценим число колебаний системы с трением до ее остановки. Т.к. колебания затухают по показательному закону, то, в идеальном случае (теоретически) они прекращаются при  $t = \infty$ . Но на практике можно принять, что колебания заканчиваются, когда их амплитуда падает до некоторой достаточно малой доли от началь-*

ного значения. Обычно условно считают эту долю равной 0,01. Тогда время затухания  $t$  определяется соотношением

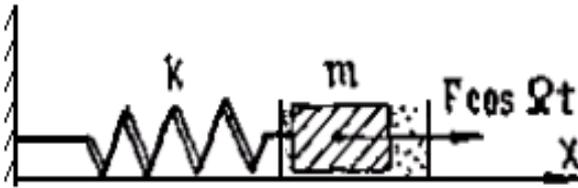
$$e^{-\beta t} = 0,01, \quad \text{откуда} \quad t \cong 4.6 \times \frac{1}{\beta} = 4.6 \times \frac{\tilde{T}}{\delta}.$$

Если, например, если логарифмический декремент затухания  $\delta = 0.1$ , то число колебаний  $N$ , при которых движение практически прекращается, составляет

$$N = \frac{t}{\tilde{T}} = \left( 4.6 \times \frac{\tilde{T}}{\delta} \right) / \tilde{T} = \frac{4.6}{\delta} = 46.$$

#### 6.4. Вынужденные колебания

При свободных колебаниях частота определяется только свойствами системы и не



зависит от параметров начального воздействия, вызвавшего колебательный процесс. В тех случаях, когда колебательной системе частота "навязывается" внешним периодическим воздействием, колебания называются вынужденными. Выведем каноническое уравнение

вынужденных колебаний для массы на пружинке, когда на нее помимо упругой силы со стороны пружины и силы вязкого трения действует внешняя вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону  $F \cos(\Omega t)$  (см. рис.). В этом случае закон Ньютона записывается в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + F \cos(\Omega t).$$

Вводя  $f = F/m$ ,  $\omega^2 = k/m$ ,  $\beta = \alpha/2m$ , приходим к каноническому виду уравнения вынужденных колебаний с трением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \cos(\Omega t). \quad (6.20)$$

Полное решение уравнения (6.20) состоит из двух членов: общего решения однородного уравнения (6.13), которое затухает со временем, и частного решения, описывающего поведение осциллятора в установившемся колебательном режиме, когда влияние начальных условий уже не существенно и все определяется только параметрами внешнего воздействия. Будем искать это частное решение уравнения (6.20) в виде

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi). \quad (6.21)$$

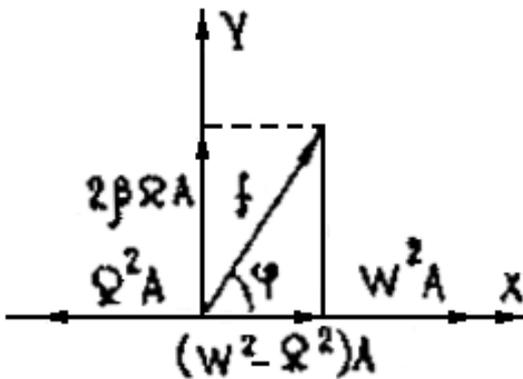
Продифференцировав (6.21) по времени, получаем, что члены уравнения (6.20) имеют вид:

$$2\beta \dot{x} = -2\beta \Omega A \sin(\Omega t - \varphi) = 2\beta \Omega A \cos(\Omega t - \varphi + \pi/2),$$

$$\ddot{x} = -\Omega^2 A \cos(\Omega t - \varphi) = \Omega^2 A \cos(\Omega t - \varphi + \pi),$$

$$\omega^2 x = \omega^2 A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Следовательно, гармоническое колебание  $f \cos(\Omega t)$  является суммой трех гармонических колебаний, фазы которых отличаются на  $\pi/2$  или  $\pi$ . Сложим эти колебания, используя векторную диаграмму (см. рис.).



Представим последнее колебание  $\omega^2 x$  вектором длины  $\omega^2 A$  вдоль оси  $x$ , тогда первое колебание изобразится вектором длиной  $2\beta\Omega A$  со сдвигом по фазе на  $\pi/2$  относительно него, а второе - вектором длиной  $\Omega^2 A$  и со сдвигом по фазе на  $\pi$ . Как видно из рисунка, амплитуда вынужденных колебаний определится условием

$$(\omega^2 - A^2)^2 A^2 + 4\beta^2 \Omega^2 A^2 = f^2,$$

откуда

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{f/(2\beta)}{\Omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta^2} \left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}. \quad (6.22)$$

Отставание по фазе вынужденного колебания от вынуждающей силы равно

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (6.23)$$

Из (6.22) следует, что амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и зависит от ее частоты. При определенной для данной системы частоте вынуждающих колебаний  $\Omega$  амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется **резонансом**, а соответствующая частота – **резонансной частотой**  $\Omega_p$ . Она определяется из условия максимума функции (6.22) и равна

$$\Omega_p = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}. \quad (6.24)$$

Отметим, что резонансная частота не совпадает с собственной частотой колебаний системы (6.14). Кроме того, как следует из (6.22), резонансная частота для скорости отличается от резонансной частоты для перемещения и оказывается равной собственной частоте колебаний без трения  $\omega$ .

Подставив значение частоты (6.24) в (6.22), получаем выражение для резонансной амплитуды

$$A_p = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}. \quad (6.25)$$

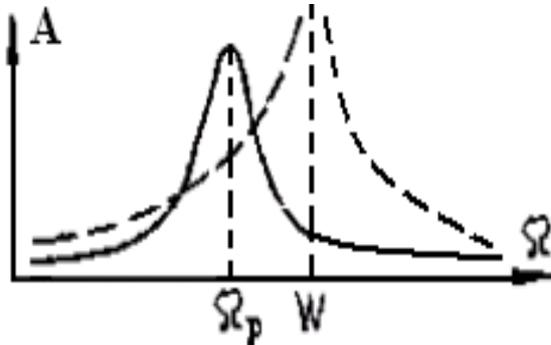
В отсутствие затухания резонансная частота  $\Omega_p = \omega$ , а резонансная амплитуда стремится к бесконечности. При незначительном затухании резонансная частота, амплитуда и ее резонансное значение определяются величиной добротности  $Q$ :

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} = \omega\sqrt{1 - 2\beta^2/\omega^2} = \omega\sqrt{1 - 2\beta^2/\omega^2} = \omega\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^2} \approx \omega\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \\ A &= \frac{f/(2\beta)}{\Omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta^2} \left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} = \frac{f/(2\beta)}{\Omega \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \approx \frac{f/(2\beta)}{\Omega \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}. \\ A_p &= \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} = \frac{f}{2\beta\omega \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}}. \end{aligned}$$

В окрестности резонанса, когда  $\Delta\Omega/\omega = |\Omega - \Omega_p|/\omega \ll 1$  и затухание мало, для резонансной кривой из (6.22), (6.25) получаем:

$$A/A_p = \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{\Omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\beta^2} \left(\frac{\omega - \Omega}{\omega}\right)^2}} \approx \frac{\omega}{(\omega + \Delta\Omega) \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega + \Delta\Omega} - \frac{\omega + \Delta\Omega}{\omega}\right)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\Omega}{\omega}\right)^2}}. \quad (6.26)$$

Форму резонансной кривой характеризуют ее шириной  $2\Delta\Omega$ , измеренной на уровне  $A = A_p / \sqrt{2}$ . Подставляя в (6.26) это значение



амплитуды, получаем выражение ширины резонансной кривой через добротность  $Q$  и собственную частоту  $\omega$

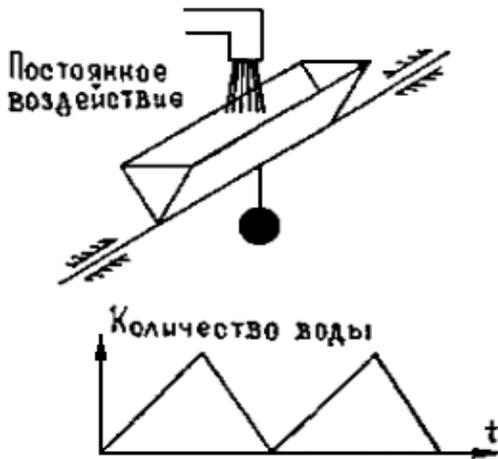
$$2\Delta\Omega = \omega / Q. \quad (6.27)$$

По полученным результатам легко построить зависимость амплитуды колебаний от частоты (амплитудно-частотную характеристику) (6.22), показанную на рисунке (пунктирная линия соответствует случаю отсутствия трения). Видно, что учет затухания приводит к качественному изменению вида амплитудно-частотной характеристики (резонансной кривой): пропадает разрыв. Причем, как следует из (6.27), чем меньше трение (больше добротность  $Q$ ), тем уже пик резонансной кривой.

По полученным результатам легко построить зависимость амплитуды колебаний от частоты (амплитудно-частотную характеристику) (6.22), показанную на рисунке (пунктирная линия соответствует случаю отсутствия трения). Видно, что учет затухания приводит к качественному изменению вида амплитудно-частотной характеристики (резонансной кривой): пропадает разрыв. Причем, как следует из (6.27), чем меньше трение (больше добротность  $Q$ ), тем уже пик резонансной кривой.

### 6.5. Автоколебания и параметрические колебания

Рассмотрим некоторые другие виды колебаний, которые часто встречаются на практике, но не так просто математически описываются, как рассмотренные выше.



**Автоколебания** – колебания, возбуждаемые и поддерживаемые непериодическим воздействием. Наиболее ярким примером автоколебаний является флаттер – колебательные движения крыльев, весьма опасные для самолетов. В жизни мы можем наблюдать различные примеры автоколебаний. Так, на рисунке показан пример системы, в которой постоянный поток воды вызывает колебания количества воды в переворачивающейся ванне. Из графика зависимости количества воды в ванне от времени ясно, что эти колебания – негармонические.

Это общее свойство всех автоколебаний, т.к. автоколебания возникают лишь в нелинейных системах, а уравнение гармонических колебаний – линейно.

**Параметрические колебания** – колебания, которые поддерживаются за счет действия внешних сил при изменении внутренних параметров системы. Типичным примером системы, совершающей параметрические колебания, являются качели. Человек, стоящий на качелях, приседает в точке их максимального отклонения, где центробежная сила равна нулю, а встает в нижней точке (положении равновесия), соответствующей наибольшей скорости и центробежной силе. Колебания поддерживаются за счет работы человека в поле силы тяжести. Изменяемый параметр – расстояние от центра тяжести человека до оси вращения качелей.

### ВОПРОСЫ

1. Что такое свободные незатухающие колебания? Напишите канонический вид уравнения малых гармонических колебаний.
2. Какие параметры характеризуют гармонические колебания?

3. Приведите примеры механических систем, представляющих собой гармонический осциллятор.
4. Нарисуйте фазовую траекторию гармонического осциллятора. С какими величинами связана площадь полученного эллипса?
5. Как найти период малых свободных колебаний для любых одномерных систем?
6. Выпишите канонический вид уравнения свободных затухающих колебаний с вязким трением.
7. Что характеризуют коэффициент затухания, логарифмический декремент, добротность? Каков их физический смысл?
8. Что такое вынужденные колебания? Напишите канонический вид уравнения вынужденных колебаний с трением.
9. Что такое резонанс? Чем отличается вид резонансных кривых при наличии и отсутствии трения в колебательной системе?
10. Что такое автоколебания? Приведите примеры автоколебаний.
11. Какие колебания называются параметрическими? Приведите примеры.
12. Изобразите гармоническое колебание в виде вектора. Объясните как с помощью векторного представления складываются два колебания равной частоты.
13. Что такое биения? Приведите примеры явлений, при которых наблюдаются биения.

## VII. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

### 7.1. Модель сплошной среды

До сих пор мы рассматривали две модели материальных объектов: материальная точка и абсолютно твердое тело. В абсолютно твердом теле расстояния между точками не изменяются. Однако многие реальные тела под действием приложенных сил меняют свою форму и объем. Исследовать эти изменения можно только в рамках более общей модели – **модели сплошной среды**, позволяющей описывать течения жидкостей и газов, а также деформацию тел, находящихся в твердой фазе.

Суть модели сплошной среды заключается в том, что материальный объект представляется состоящим из континуума частиц, заполняющих его объем непрерывно, т.е. всякий элементарный (малый) объем жидкости или газа содержит еще очень большое число частиц. Поэтому под **малым объемом** следует понимать **объем малый по сравнению с объемом рассматриваемой среды, но в то же время большой по сравнению с величиной межмолекулярного расстояния в кубе**. Например, если говорят о движении точки жидкости, то речь идет не о смещении отдельной молекулы, а об изменении положения целого элемента объема, содержащего достаточно много молекул, но принимаемого в механике сплошных сред за точку.

Модель сплошной среды, в которой дискретная совокупность молекул, составляющих материальный объект, распределяется непрерывным образом, весьма удобна, т.к. позволяет применить к ней математический анализ непрерывных (во многих случаях дифференцируемых) функций. К каждому отдельному элементу мы применяем законы классической, а не квантовой механики именно потому, что они состоят из множества атомов, т.е. являются макроскопическими объектами. Состояние движущейся жидкости (газа) математически описывается заданием распределений ее скорости  $\vec{V}$ , давления  $P$  и плотности  $\rho$  как функций пространственных координат и времени:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t), \quad P = P(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t).$$

Такой подход к описанию, когда мы располагаемся в точке пространства  $(x, y, z)$  и следим в ней за изменением параметров среды, называется **эйлеровым способом задания движения**. Однако можно сделать и иначе: выбрать частицу жидкости с начальными координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  и, двигаясь вместе с нею, следить как меняются ее скорость, давление и плотность:

$$V = \vec{V}(x_0, y_0, z_0, t), \quad \rho = \rho(x_0, y_0, z_0, t), \quad P = P(x_0, y_0, z_0, t).$$

Такой подход называется **лагранжевым способом задания движения**. Каждый из подходов позволяет полностью описать движение среды и его выбор определяется лишь постановкой задачи и соображениями удобства. Далее будем использовать эйлеров способ задания движения.

Механика сплошных сред разделяется на механику жидкости и газа и механику деформируемого твердого тела. Такое разделение обусловлено тем, что жидкости и газы при не очень быстрых движениях сопротивляются изменению только объема, а твердые тела – объема и формы.

### 7.2. Уравнения сохранения массы, энергии и импульса

Рассмотрим **стационарное движение** жидкости (газа), когда в любой точке  $(x, y, z)$  параметры состояния не изменяются со временем:

$$\vec{V}(x, y, z, t) = const, \quad \rho(x, y, z, t) = const, \quad P(x, y, z, t) = const.$$

Траектории частиц при таком движении совпадают с **линиями тока** (линиями, касательные к которым в каждой точке имеют направление скорости). **Часть жидкости,**

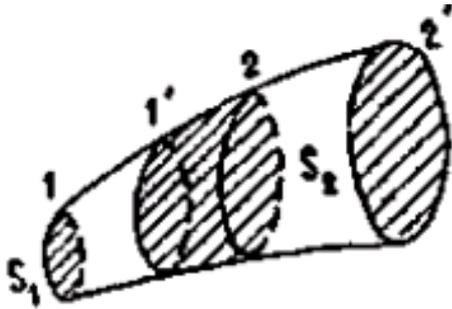
протекающей внутри поверхности, образованной линиями тока, будем называть **струйкой**, если ее поперечное сечение столь мало, что параметры потока можно считать постоянными по всему сечению.

Запишем для струйки законы сохранения (точнее, изменения) массы, энергии и импульса. Пусть начальное положение рассматриваемого элемента определяется сечениями 1 и 2, а конечное – 1' и 2' (см. рис.). В области 1' - 2' масса не изменяется. Поскольку через боковую поверхность струйки поток массы отсутствует, то приток массы в область 1' - 2' за время  $dt$  равен оттоку

$$dG = S_1 \rho_1 V_1 dt = S_2 \rho_2 V_2 dt.$$

Откуда для струйки получаем **уравнение неразрывности, соответствующее закону сохранения массы**

$$\rho V S = const. \quad (7.1)$$



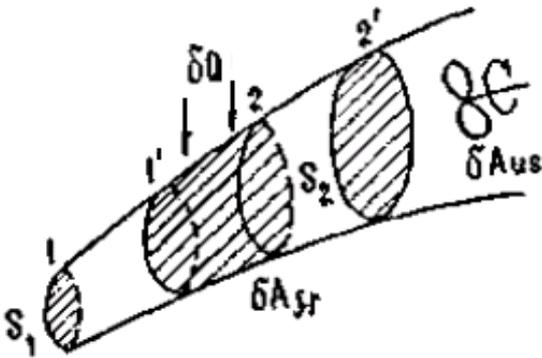
Будем называть **плотностью тока** вектор  $\vec{j}$ , направление которого совпадает с направлением вектора скорости  $\vec{V}$ , модуль равен расходу массы за единицу времени через единичную площадку, ему перпендикулярную:

$$j = \frac{1}{S} \frac{dG}{dt} = \rho V. \quad (7.2)$$

Используя определение плотности тока (7.2), уравнение неразрывности можно записать в виде

$$jS = const, \quad (7.3)$$

т.е. плотность тока увеличивается в местах сгущения линий тока, где поперечное сечение струйки  $S$  – меньше.



Получим теперь соотношения, которые следуют из закона об изменении энергии. Тепло  $\delta Q$ , сообщаемое жидкости, и работа  $\delta A$ , совершаемая над ней давлением при переходе из состояния 1-2 в состояние 1'-2', идут на изменения ее внутренней, потенциальной и кинетической энергий ( $dU_{int}$ ,  $dU$ ,  $dT$ , соответственно), а также на совершение струйкой полезной работы  $\delta A_{use}$  и работы против сил трения  $\delta A_{fr}$  (см. рис.).

Приращение любого вида энергии есть разность ее значений в положениях 1-2 и 1'-2'. Но часть 1'-2' - общая для обоих положений и разность определяется различием соответствующих значений в частях 2-2' и 1-1':

$$dT = \rho_2 V_2 S_2 dt \frac{V_2^2}{2} - \rho_1 V_1 S_1 dt \frac{V_1^2}{2} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} dG,$$

$$dU = g(z_2 - z_1) dG, \quad dU_{int} = (U_2 - U_1) dG$$

$$\delta A = \rho_1 V_1 S_1 d\tau - \rho_2 V_2 S_2 d\tau = \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) dG.$$

Из выше приведенных соотношений и закона об изменении энергии в форме  $\delta Q + \delta A = \delta A_{use} + \delta A_{fric} + dW + dU + dT$  получаем

$$\delta Q + \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) dG = \delta A_{us} + \delta A_{fric} + g(z_2 - z_1) dG + (U_2 - U_1) dG + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} dG.$$

Т.к. тепло  $\delta Q$  складывается из внешнего тепла  $\delta Q_{ent}$  и тепла, выделяющегося при работе против сил трения  $\delta Q_{fric}$  ( $\delta Q_{fric} = \delta A_{fric}$ ), то окончательно имеем

$$\frac{\delta Q_{ent}}{dG} + \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) = \frac{\delta A_{us}}{dG} + g(z_2 - z_1) + (U_2 - U_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}. \quad (7.4)$$

Используя определение энтальпии единицы массы  $I = U + \frac{P}{\rho}$  из (7.4) получаем

**уравнение теплосодержания струйки**

$$\frac{\delta Q_{ent}}{dG} = \frac{\delta A_{use}}{dG} + g(z_2 - z_1) + (I_2 - I_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}, \quad (7.5)$$

где  $\frac{\delta Q_{ent}}{dG}$ ,  $\frac{\delta A_{us}}{dG}$  - внешнее тепло и совершаемая струйкой полезная работа на единицу массы для участка 1-2. Во многих случаях изменение потенциальной энергии единицы массы  $g(z_2 - z_1)$  - мало, а струйка - теплоизолирована и не совершает работы. Тогда (7.5) упрощается

$$I + \frac{V^2}{2} = const. \quad (7.6)$$

Следует подчеркнуть, что полученные уравнения для энергии струйки справедливы как для идеальной жидкости (газа), в которой отсутствуют силы трения, так и для вязкой жидкости, где силы трения могут играть существенную роль.

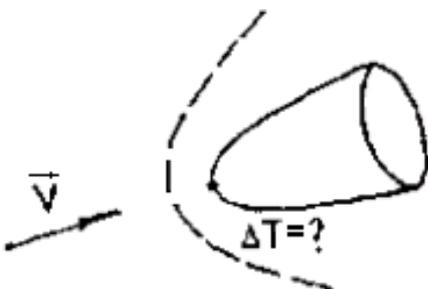
Для идеального газа, имеющего постоянные значения удельных теплоемкостей  $C_v$ ,  $C_p$  (при постоянном объеме и давлении, соответственно) и молярную массу  $\mu$  энтальпия линейно зависит от температуры (использовали закон Клапейрона - Менделеева  $P/\rho = R/\mu T$ )

$$I = U + P/\rho = C_v T + R/\mu T = (C_v + R/\mu)T = C_p T.$$

и уравнение теплосодержания тогда имеет вид

$$C_p T + \frac{V^2}{2} = const. \quad (7.7)$$

Из (7.7) следует, что если скорость газа вдоль струйки не меняется, то не изменяется и его температура даже при наличии трения (для обеспечения постоянной скорости при наличии трения давление должно падать, а газ, расширяясь без подвода тепла, должен был бы охлаждаться, но благодаря работе против сил трения к нему подводится тепло  $\delta Q_{fric}$ , которое в точности компенсирует охлаждение при расширении). В струйке (трубке) постоянного сечения из-за трения температура газа убывает. Действительно,  $P_2 < P_1$ , следовательно  $\rho_2 < \rho_1$ , а поскольку  $\rho V = const$ , то  $V_2 < V_1$  и учитывая, что  $C_p T + \frac{V^2}{2} = const$ , получаем  $T_2 < T_1$ .



*Пример 7.1. Найдём максимальную температуру, до которой может разогреться идеальный газ при его полном торможении (например, у носка симметричного тела, движущегося в атмосфере, см. рис.).*

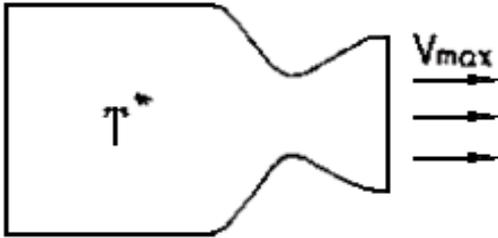
*Если идеальный газ, имеющий скорость  $V$ , остановить, то его температура  $T$  возрастет до так называемой температуры торможения  $T^*$  которую можно найти из уравнения теплосодержания (7.7)*

$$C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T^* \quad \text{откуда} \quad T^* = T + \frac{V^2}{2C_p} = T + \frac{V^2}{2100}.$$

Последнее равенство написано для воздуха с учетом его значения теплоемкости  $C_p = 1050$  Дж/кг/К (при температуре  $T=325^\circ\text{C}$ ). При скорости потока  $V = 1000$  м/с получаем увеличение температуры

$$\Delta T = T^* - T = \frac{10^6}{2100} \text{град} \cong 500 \text{град}.$$

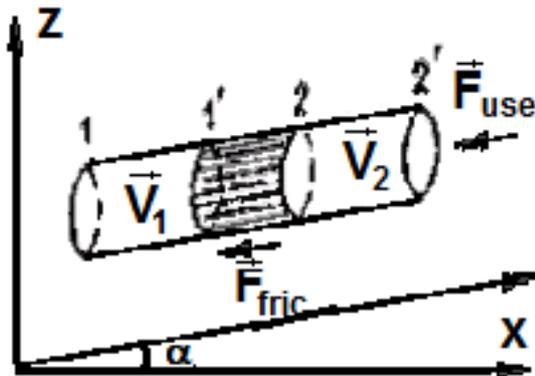
Пример 7.2. Определим максимальную скорость истечения газа из сосуда, в котором его скорость была равна нулю, а температура  $T^*$ .



Используя  $C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T^*$  и учитывая, что скорость будет максимальна в том идеальном случае, когда газ охладится до абсолютного нуля  $T = 0$ , получаем (для воздуха)

$$V_{\max} = \sqrt{2C_p T^*} = 45,8\sqrt{T^*} \text{ м/с}$$

При  $T^* = 4300^\circ\text{K}$  имеем  $V_{\max} \approx 3 \text{ км/с}$ . Таким образом, достижение высоких скоростей истечения, что требуется при реализации космических полетов (см. формулу Мецгерского в п. 3.3 и пример 3.1) представляет весьма сложную техническую задачу, поскольку температуру порядка  $4000^\circ\text{C}$  не выдержит ни один конструкционный материал (температура плавления самого тугоплавкого металла – вольфрама – составляет лишь  $3400^\circ\text{C}$ ).



Перейдем к формулировке закона изменения импульса для жидкости. Импульс сообщается жидкости силами давления  $P$ , трения  $F_{\text{fric}}$ , и противодействия  $F_{\text{use}}$  со стороны устройств, над которыми совершается полезная работа (см. рис.), а также силой тяжести. В области 1' – 2 импульс не

меняется и поэтому приращение импульса выделенной части жидкости есть разность его значений в областях 1 – 1' и 2 – 2'. Уравнение запишем для проекции на ось малой части струйки ( $\alpha$  - угол между осью струйки и горизонталью)

$$(V_2 - V_1) dG = (P_1 S_1 - P_2 S_2) dt - (F_{\text{fric}} + F_{\text{use}}) dt - dG g \sin(\alpha) dt.$$

Поскольку  $dG = S_1 \rho_1 V_1 dt = S_2 \rho_2 V_2 dt = S \rho V dt$  и, то это равенство можно записать в дифференциальном виде

$$V dV = -\frac{dP}{\rho} - \delta \left( \frac{(F_{\text{fric}} + F_{\text{use}}) V dt}{\rho S V dt} \right) - g V \sin(\alpha) dt,$$

откуда следует **уравнение Бернулли** ( $V \sin(\alpha) dt = dz$ ):

$$d \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{dP}{\rho} + \delta \left( \frac{\delta A_{us}}{dG} + \frac{\delta A_{us}}{dG} \right) + g dz = 0. \quad (7.8)$$

Для горизонтальной струйки при отсутствии сил трения и полезной работы уравнение Бернулли упрощается и сводится к  $dP = -\rho V dV$ , т.е. в этом случае увеличение скорости может быть вызвано только уменьшением давления.

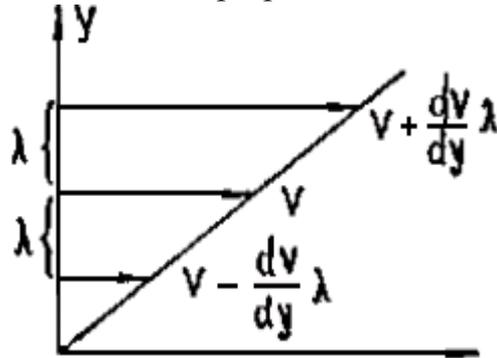
Отметим, что уравнение Бернулли может быть получено и из уравнения энергии (7.4), записанном в дифференциальном виде:

$$\delta\left(\frac{\delta Q}{dG}\right) - d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \delta\left(\frac{\delta A_{us}}{dG} + \frac{\delta A_{fr}}{dG}\right) + g dz + dU + d\left(\frac{V^2}{2}\right). \quad (7.9)$$

Используя первое начало термодинамики для единицы массы жидкости  $\delta\left(\frac{\delta Q}{dG}\right) - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = dU$ , из (7.9) опять получаем (7.8).

### 7.3. Вязкость. Ламинарное и турбулентное течения

Наиболее разработанной в механике жидкостей и газов является теория движения идеальной жидкости (газа), в которой силы трения не учитываются. Влияние сил трения, обусловленных вязкостью жидкости или газа, обычно проявляется лишь вблизи поверхности обтекаемого тела. Силы трения оказываются основной причиной возникновения сопротивления движению тел в жидких и газообразных средах. Величина силы трения на единицу площади называется **напряжением трения**  $\tau$ . Эта величина связана с изменением скорости жидкости в направлении нормали к рассматриваемой площадке **законом трения Ньютона**, который записывается следующим образом:



$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (7.10)$$

В кинетической теории, которая рассматривает жидкость или газ как совокупность большого числа движущихся и взаимодействующих друг с другом м.т. (эти м.т. соответствуют молекулам среды), вязкость связывается с обменом импульсами слоями, имеющими различную скорость. Рассмотрим упрощенную модель переноса импульса от одного слоя газа к другому. Характерным пространственным размером переноса является  $\lambda$  - длина свободного пробега молекул. В слой со скоростью  $V$  со стороны больших  $y$  переносится импульс  $\frac{1}{6} ncm \left( V + \frac{\partial V}{\partial y} \lambda \right) dS dt$  ( $n, c, m$  - плотность, скорость теплового движения и масса молекул, коэффициент  $1/6$  взят из соображений симметрии), а со стороны меньших  $y$ :  $\frac{1}{6} ncm \left( V - \frac{\partial V}{\partial y} \lambda \right) dS dt$  (см. рис.). Этот перенос в сумме и дает импульс силы между слоями  $\tau dS dt$ , т.е.

$$\tau dS dt = \frac{1}{3} ncm \frac{\partial V}{\partial y} \lambda dS dt,$$

откуда получаем закон Ньютона вида (7.10)

$$\tau = \frac{1}{3} ncm \lambda \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (7.11)$$

Из (7.10) и (7.11) следует значение для коэффициента вязкости ( $\rho = nm$ )

$$\mu = \frac{1}{3} ncm \lambda = \frac{1}{3} \rho c \lambda. \quad (7.12)$$

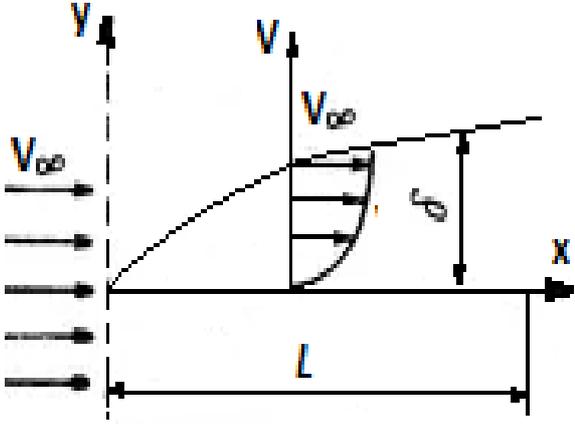
Более точные расчеты с учетом закона распределения молекул по скоростям теплового движения дают тот же результат, но с другим значением коэффициента (вместо  $\frac{1}{3}$

получается 0,499). В соответствии с (7.12) вязкость не зависит от давления и пропорциональна средней скорости теплового движения молекул, которая в свою очередь, пропорциональна  $\sqrt{T}$  ( $\lambda \sim \frac{1}{n\sigma}$ ,  $\sigma$  - эффективное сечение столкновения)

$$\mu \sim nct\lambda \sim mc \sim \sqrt{T}.$$

В действительности, конечно, зависимость вязкости от температуры более сложная.

Важной безразмерной характеристикой любого вязкого течения является безразмерный параметр – **число Рейнольдса**  $Re = \frac{\rho VL}{\mu}$ , характеризующее отношение сил инерции к силам вязкости.



*Пример 7.3. На примере продольного обтекания пластины (см. рис.) покажем, что основные характеристики явления определяются числом Рейнольдса. Найдем толщину  $\delta$  пограничного слоя*

*– слоя у поверхности обтекаемого тела длиной  $L$ , где силы вязкости и силы инерции сравнимы.*

*Оценим для элемента жидкости  $dx dy dz$  порядок сил инерции  $F_{in}$  и трения  $F_{fric}$ :*

$$F_{in} = ma = \rho dx dy dz \cdot a = \rho V \frac{\partial V}{\partial y} dx dy dz \sim \rho V \frac{V}{L} dx dy dz \sim \frac{\rho V^2}{L} dx dy dz,$$

$$F_{fr} = \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau \cdot dx dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dz dy = \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx dy dz \sim \mu \frac{V}{\delta^2} dx dy dz.$$

*За границу пограничного слоя примем поверхность, на которой силы инерции и силы вязкости сравниваются*

$$F_{in} = F_{fric} \quad \text{или} \quad \frac{\rho V^2}{L} dx dy dz \sim \mu \frac{V}{\delta^2} dx dy dz$$

откуда

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

*Через число Рейнольдса  $Re$  выражается и величина безразмерных касательных напряжений в пограничном слое*

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial y} \sim \mu \frac{V}{\delta} \sim \frac{\mu V}{L} \sqrt{Re},$$

откуда

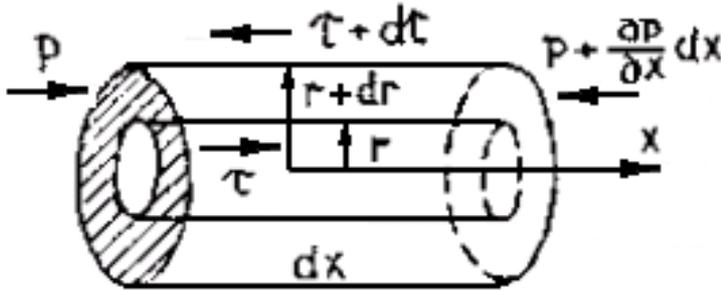
$$\frac{\tau}{\rho V^2} \sim \frac{\mu}{\rho VL} \sqrt{Re} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

Число Рейнольдса служит не только для оценки количественных характеристик погранслоя, но определяет характер течения. При небольших значениях  $Re$  движение частиц среды имеет упорядоченный характер и такое течение называется **ламинарным**. В случае больших  $Re$  движение частиц становится беспорядочным, возникают неравномерные пульсации скорости в продольном и поперечном направлениях. Такое течение называется **турбулентным**. Критическое число Рейнольдса  $Re^*$ , соответствующее переходу от ламинарного течения к турбулентному, зависит от величины начальных воз-

мущений, т.е. от интенсивности турбулентности набегающего потока. Для плоской пластины  $Re^* \sim 10^5 \dots 10^6$  т.е. начиная с  $x$ , удовлетворяющего условию  $\frac{\rho V x}{\mu} \sim 10^5 \dots 10^6$ , течение около пластинки переходит от ламинарного к турбулентному. Для течения в круглой трубе  $Re^* = \frac{\rho V x}{\mu} \sim 2300 \dots 10^5$ , где величина 2300 соответствует случаю, затекания в трубу, имеющую острые кромки.

#### 7.4. Течение вязкой жидкости в круглой трубе

Рассмотрим стационарное ламинарное вязкое течение жидкости в круглой трубе (течение Пуазейля). Будем считать, что скорость направлена по оси  $x$  и зависит только от радиальной координаты  $r$ , т.е.  $\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$  ( $\varphi$  – угловая координата). Тогда, поскольку течение стационарно  $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0$ , то  $a_x = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = 0$  и для



каждого цилиндрического элемента жидкости (см. рис.) сила давления со стороны других элементов, равная

$$dF_p = (P - (P + dP))2\pi r dr = -dP \cdot 2\pi r = -\frac{\partial P}{\partial x} 2\pi r \cdot dr dx,$$

уравновешивается силой вязкого трения  $dF_{fric}$

$$\begin{aligned} dF_{fric} &= 2\pi r \cdot dr dx - (\tau + d\tau)2\pi(r + dr) dx = -2\pi r \left( \frac{dr}{r} \tau + d\tau \right) dx = -2\pi r \left( \frac{dr}{r} \tau + \frac{d\tau}{dr} dr \right) dx = \\ &= -2\pi r dr dx \left[ \frac{1}{r} \left( -\mu \frac{dV}{dr} \right) + \frac{d}{dr} \left( -\mu \frac{dV}{dr} \right) \right] = 2\pi r \cdot \mu \cdot dr dx \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right). \end{aligned}$$

Записывая равенство этих сил, получаем уравнение для распределения скорости по радиусу трубы

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Интегрируя это уравнение с учетом того, что скорость конечна при  $r = 0$  и равна нулю у стенки {условие прилипания}  $V|_{r=R} = 0$  ( $R$  – радиус трубы), находим распределение скорости по радиусу

$$V = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (R^2 - r^2) \quad (7.13)$$

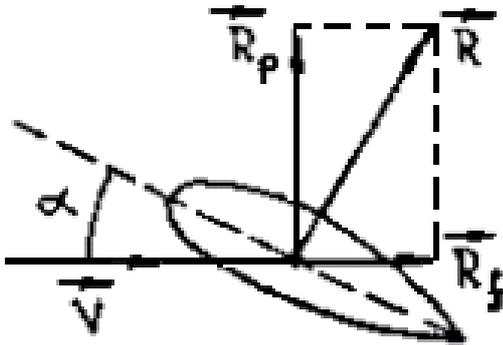
Скорость расхода жидкости  $dQ_V / dt$  (объем, проходящий в единицу времени через любое поперечное сечение трубы) находится интегрированием по сечению:

$$\frac{dQ_V}{dt} = 2\pi \int_0^R r |V(r)| dr = -\frac{\pi}{2\mu} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi}{8\mu} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| R^4. \quad (7.14)$$

При малых скоростях, когда течение – ламинарное, соотношение (7.14) хорошо соответствует опытным данным (например, в капиллярах, где  $R$  – мало и, согласно (7.13), оказывается малым также и  $V$ ).

### 7.5. Лобовое сопротивление и подъемная сила. Сила Стокса

Рассмотрим обтекание симметричного тела однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости, имеющей скорость  $\vec{V}$ , с целью определения действующих на тело сил со стороны движущейся среды. Считаем, что скорость  $\vec{V}$  параллельна сечению тела плоскостью симметрии (это сечение показано на рис.). Обозначим через:  $\vec{R}_f$  – силу лобового сопротивления, направленную противоположно скорости;  $\vec{R}_p$  – подъемную силу, направленную перпендикулярно скорости;  $\vec{R} = \vec{R}_f + \vec{R}_p$  – результирующую силу.



Эти силы при заданной форме тела определяются следующими параметрами:  $L$  – характерным размером тела;  $\alpha$  – углом атаки (углом между направлением скорости и характерной прямой в центральном сечении тела, например осью симметрии, если таковая имеется);  $V$  – скоростью движения;  $\rho, \mu$  – плотностью и вязкостью жидкости. Из этих параметров можно составить только две независимые безразмерные величины: число Рейнольдса  $Re$  и угол атаки  $\alpha$ . Независимо от того, какую из составляющих сил сопротивления мы рассматриваем, соответствующая ей безразмерная сила может быть функцией только этих двух величин:

$$\frac{R}{\rho V^2 L^2} = f(Re, \alpha), \quad \frac{R_f}{\rho V^2 L^2} = f_f(Re, \alpha), \quad \frac{R_p}{\rho V^2 L^2} = f_p(Re, \alpha).$$

Определение функций  $f, f_f, f_p$  для различных форм тела является одной из основных задач теории и эксперимента в гидроаэромеханике. При достаточно медленном движении роль вязкости оказывается определяющей и силы сопротивления не должны зависеть от плотности  $\rho$ . Последнее возможно, когда  $f_{f,p} = \frac{\psi(\alpha)}{Re}$  ( $\psi(\alpha)$  – неизвестная функция угла атаки). Отсюда, например, для силы лобового сопротивления получаем:

$$R_f = \rho V^2 L^2 \cdot \frac{\mu}{\rho V L} \psi(\alpha) = \rho V L \mu \psi_L(\alpha). \quad (7.15)$$

В случае обтекания шара ясно, что вследствие симметрии задачи силы не могут зависеть от угла атаки, т.е.  $\psi_f(\alpha) = const = A$ . Значение постоянной  $A$  было вычислено Стоксом в предположении, что движение шара достаточно медленное, и можно пренебречь нелинейными членами типа  $V \frac{\partial V}{\partial x}$  (именно этот случай и представляет интерес, поскольку, если скорости велики, то обтекание становится турбулентным и решение даже с учетом нелинейных членов в уравнениях, описывающих ламинарное движение жидкости, не будет соответствовать действительности). Подставляя в (7.15) найденное Стоксом значение  $A = 3\pi$  и характерный размер  $L = 2r$  ( $r$  – радиус шара), получаем **формулу Стокса**:

$$R_f = 6\pi\mu r V, \quad (7.16)$$

позволяющую определить величину силы сопротивления при ламинарном обтекании шара вязкой жидкостью.

### ВОПРОСЫ

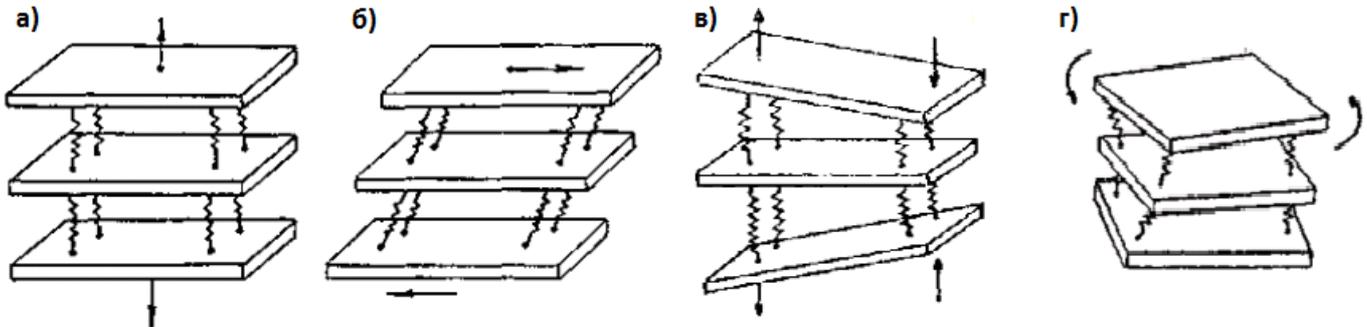
1. В чем суть модели сплошной среды?
2. Чем отличается модель сплошной среды от модели абсолютно твердого тела?

3. Опишите эйлеров и лагранжев способы описания движения.
4. Чем определяется выбор способа (эйлеров или лагранжев) задания движения сплошной среды?
5. На какие подразделы и почему разделяется механика сплошной среды?
6. Напишите уравнения неразрывности и теплосодержания для струйки жидкости.
7. Как связаны энтальпия и внутренняя энергия единицы массы вещества?
8. Напишите уравнение теплосодержания для идеального газа.
9. Что такое температура торможения? Определите ее для идеального газа, имеющего температуру  $T$  и движущегося со скоростью  $V$ .
10. Напишите уравнение Бернулли.
11. Сформулируйте закон Ньютона для сил трения в жидкости. Чем обусловлены и где существенны силы вязкого трения?
12. Что является причиной возникновения сопротивления движению тел в жидких и газообразных средах?
13. Что такое число Рейнольдса? Что оно характеризует?
14. Напишите формулу Стокса для ламинарного обтекания шара вязкой жидкостью. Почему сила Стокса не зависит от угла атаки  $\alpha$ ?

## VIII. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 8.1. Уравнения теории упругости

Перейдем к рассмотрению механики деформируемых твердых тел. В отличие от жидкостей и газов, твёрдые тела сопротивляются не только изменению объема, но и формы. При этом, если нагрузки не очень велики, то после их снятия деформации исчезают, а форма и объём тела возвращаются к исходным. Такое **свойство тел восстанавливать свою форму и объём называется упругостью**. В упругих телах силы, с



которыми отдельные части тела действуют друг на друга, определяются деформациями этих взаимодействующих частей. При всем разнообразии деформаций тел оказывается возможным свести их к двум элементарным видам: равномерному по трем взаимно перпендикулярным направлениям растяжению или сжатию (изменению объема) и сдвигу (искажению формы). Для их наглядного представления можно воспользоваться моделью тела в виде множества одинаковых пластин. При растяжении этой модели (раздвигании недеформируемых пластинок) изменение расстояния между пластинами происходит таким образом, что расстояния между соседними пластинами остаются одинаковыми (см. рис. а). Это соответствует однородному растяжению твёрдого тела. Деформацию сдвига можно смоделировать, сдвигая верхнюю пластину относительно нижней параллельно самой себе (см. рис. б). При этом расстояния между пластинами останутся неизменными, но точки соседних пластин, лежащие на одной вертикали, сдвинутся относительно друг друга на некоторую величину. В этом случае мы имеем однородный сдвиг. На модели можно пронаблюдать и деформацию изгиба, наклонив верхнюю пластину (см. рис. в). При этом, расстояния между соседними пластинами в разных местах изменятся по-разному (неоднородное растяжение и сжатие). Кручение мы получим, повернув верхнюю пластину вокруг вертикальной оси (см. рис. г). При этом расстояние между пластинами останется неизменным, но точки пластины, лежащие на одной вертикали, сдвинутся друг относительно друга на разные значения (неоднородный сдвиг).

Основными законами для описания упругого деформирования изотропных материалов, свойства которых одинаковы во всех направлениях, служат закон Гука и соотношение Пуассона, полученные экспериментальным путем.

**Закон Гука.** При достаточно малых силах  $F$  удлинение  $\Delta l$  стержня (тела, один из размеров которого много больше двух других) пропорционально растягивающей силе, приложенной к его торцам

$$\Delta l \sim F \quad (8.1)$$

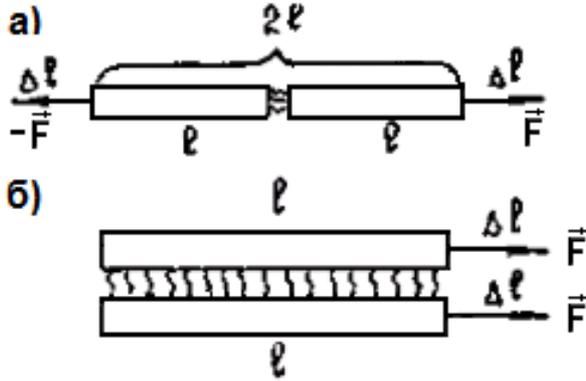
**Соотношение Пуассона.** При растяжении стержень сжимается в поперечном направлении, причем относительное сжатие оказывается пропорциональным относительному продольному растяжению ( $h$  - поперечный размер стержня,  $l$  - длина стержня)

$$\frac{\Delta h}{h} \sim \frac{\Delta l}{l}.$$

Или, вводя коэффициент пропорциональности (**коэффициент Пуассона**)  $\nu$ , имеем

$$\frac{\Delta h}{h} = -\nu \frac{\Delta l}{l}. \quad (8.2)$$

Установим теперь как удлинение  $\Delta l$  зависит от длины  $l$  и площади поперечного сечения стержня  $S$ . Для этого мысленно соединим два одинаковых стержня длиной  $l$  каждый и растянем их силой  $F$ . При этом на каждый из них будет тоже действовать сила  $F$  и, очевидно, общее удлинение составит  $2\Delta l$  (см. рис. а). Следовательно,  $\Delta l \sim l$ .



Приложим боковыми гранями два одинаковых стержня и на каждого из них воздействуем силой  $F$  (см. рис. б). Опять получим удлинение  $\Delta l$  (это не столь очевидно, т.к. между стержнями теперь в поперечном направлении возникнет взаимодействие из-за их поперечного сжатия, но предположим, что оно не влияет на удлинение в перпендикулярном направлении), но оно уже достигнуто силой  $2F$  из-за увеличения площади сечения до  $2S$ . Поэтому  $\Delta l \sim \frac{F}{S}$ . Обобщая предыдущее, находим, что  $\Delta l \sim \frac{Fl}{S}$ . Коэффициент пропорциональности называется **модулем Юнга** и, обозначая его через  $E$ , **закон Гука** можно записать в виде

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad \text{или} \quad \sigma = E \varepsilon_l, \quad (8.3)$$

где  $\sigma = \frac{F}{S}$  – напряжение – сила, действующая на единицу площади;  $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$  — продольная деформация – относительное удлинение в направлении оси стержня. Тогда для поперечного удлинения имеем

$$\frac{\Delta h}{h} = -\nu \frac{\Delta l}{l} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta h}{h} = -\frac{\nu F}{E S} \quad \text{или} \quad \varepsilon_h = -\frac{\nu}{E} \sigma. \quad (8.4)$$

Знак минус введен потому, что для большинства материалов при  $\Delta l > 0$  (растяжение) в продольном направлении имеет место  $\Delta h < 0$  (сжатие) в поперечном.

Закон Гука можно записать в дифференциальной форме, выразив деформацию стержня через перемещение  $u(x)$ . Если  $x$  – координата точки стержня до деформации,  $x'$  – после, то  $x' = x + u$ , следовательно

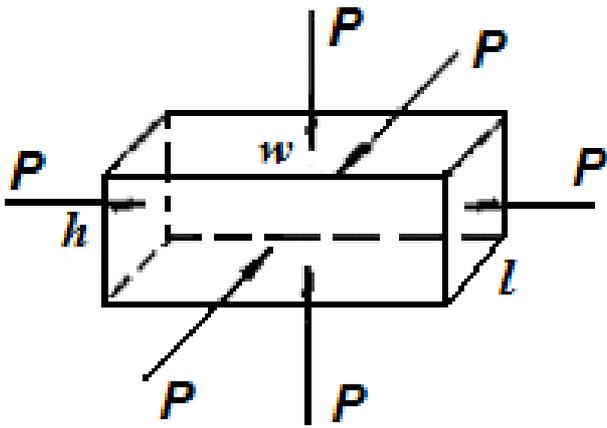
$$\varepsilon_l = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x'_2 - x'_1}{\Delta x} = \frac{[x_2 + u(x_2)] - [x_1 + u(x_1)] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x_2) - u(x_1)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

и закон Гука принимает вид

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.5)$$

Важным следствием из линейности законов Гука и Пуассона является **принцип суперпозиции**: если на упругую среду действует сумма сил  $\vec{F} = \sum_{i=1}^K \vec{F}_i$ , то полная деформация есть сумма деформаций от каждого из воздействий  $\varepsilon = \sum_{i=1}^K \varepsilon_i$  ( $K$  – число приложенных к телу (среде) сил;  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_i$  – относительные удлинения в любом заданном направлении). Причем, очевидно, результат не зависит от порядка приложения сил.

Рассмотрим теперь простейшие задачи об упругом деформировании в случае **однородных деформаций**, т.е. когда они одинаковы во всех точках тела.



Найдем деформацию бруска с характерными размерами  $l$ ,  $h$  и  $w$  под действием равномерного давления  $P$  (см. рис.) окружающей его жидкости (гидростатического давления). Используем принцип суперпозиции. Тогда

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1}{l} + \frac{\Delta l_2}{l} + \frac{\Delta l_3}{l},$$

где  $\Delta l_1$  – сжатие из-за приложения  $P$  к торцам  $\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{P}{E}$ ;  $\Delta l_2$  – растяжение из-за приложения  $P$  к вертикальным граням

$$\frac{\Delta l_2}{l} = \nu \frac{P}{E}; \quad \Delta l_3 \text{ – растяжение из-за приложения } P \text{ к горизонтальным граням } \frac{\Delta l_3}{l} = \nu \frac{P}{E}.$$

Итак,

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{P}{E}(1 - 2\nu). \quad (8.6)$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{P}{E}(1 - 2\nu), \quad \frac{\Delta w}{w} = -\frac{P}{E}(1 - 2\nu). \quad (8.7)$$

Используя (8.6), (8.7), найдем изменение объема  $\Delta V$  ( $V = lhw$ ):

$$\Delta V = (l + \Delta l)(h + \Delta h)(w + \Delta w) - lhw \approx V \left( \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta w}{w} \right) = -3PV \frac{1 - 2\nu}{E},$$

откуда получаем

$$P = -K \frac{\Delta V}{V}, \quad (8.8)$$

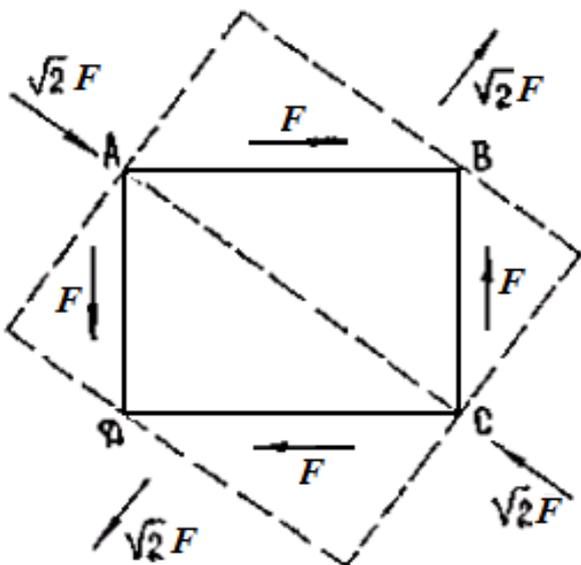
где коэффициент  $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$  называется **модулем объёмного сжатия**. Из этого выражения

модуля объёмного сжатия  $K$  через  $E$  и  $\nu$  следует, что, т.к.  $K > 0$ , то  $\nu < \frac{1}{2}$ . При  $\nu = \frac{1}{2}$

получаем  $K = \infty$ , т.е. значение  $\nu = \frac{1}{2}$  – максимально и соответствует несжимаемому материалу, т.к. из (8.8) следует

$$\Delta V = -PV / K = -PV / \infty = 0.$$

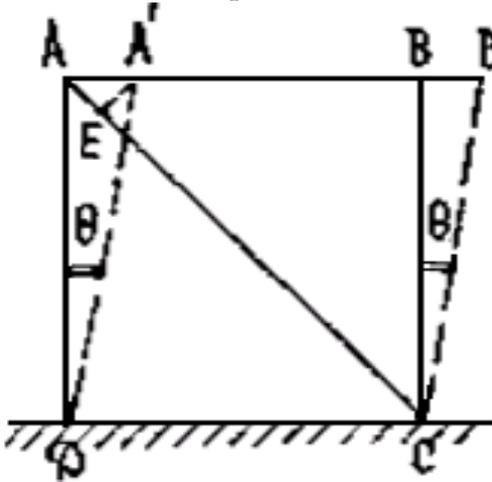
Другим важным случаем однородных деформаций является **деформация чистого сдвига**, которая реализуется, когда к боковым граням бруска ABCD равномерно приложены касательные усилия (см. рис.). Возникающие в этой задаче напряжения и деформации называются сдвиговыми. При сдвиге меняется только форма, а объем сохраняется. Изменение формы характеризуется искажением углов



– их отклонением от прямых (от  $\pi/2$ ), а само отклонение определяется относительным изменением длин диагоналей  $\frac{\Delta D}{D}$ . Оказывается, что задача о сдвиге сводится к известным задачам о растяжении и сжатии в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, как это показано на рисунке. Используя это, по закону Гука легко рассчитать относительное изменение длины диагонали

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\sqrt{2}F}{\sqrt{2SE}} + \nu \frac{\sqrt{2}F}{\sqrt{2SE}} = \frac{(1+\nu)F}{E} \frac{1}{S} = \frac{(1+\nu)}{E} \tau, \quad (8.9)$$

где  $\tau = F/S$  – касательное напряжение. Отметим, что в случае с жидкостью (см. п. 7.3) касательное напряжение  $\tau$  возникает, вследствие разности скоростей в слоях среды, а в твердом теле оно противодействует изменению формы.



Найдем теперь сдвиговую деформацию, которая характеризуется углом  $\theta$  (см. рис.). Считая, что изменение прямого угла мало по сравнению с ним, получаем (используем (8.9))

$$\theta \approx \operatorname{tg}(\theta) = \frac{AA'}{AD} = \frac{\sqrt{2}AE}{AD} = \frac{\sqrt{2}AD}{AC/\sqrt{2}} = 2 \frac{\Delta D}{D} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau.$$

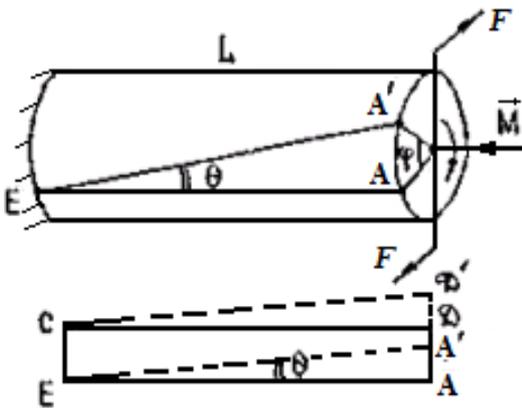
Откуда, выводя модуль сдвига  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  и

сдвиговую деформацию  $\gamma = \theta$ , находим **закон Гука для сдвига**

$$\tau = G \gamma. \quad (8.10)$$

Из выражения для  $G$  через  $E$  и  $\nu$  и требования  $G > 0$  следует  $\nu > -1$ . Итак,

$-1 < \nu < \frac{1}{2}$ , но, фактически, для большинства материалов  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ .



В отличие от двух ранее рассмотренных случаев, деформации, как правило, оказываются неоднородными. Классической задачей, в которой деформации неоднородны, является **кручение круглого стержня** (см. рис.). Определим крутящий момент, необходимый для закручивания на угол  $\varphi$  закрепленного стержня. Выделим в нем цилиндрический элемент с радиусом  $r$ , для которого имеем:

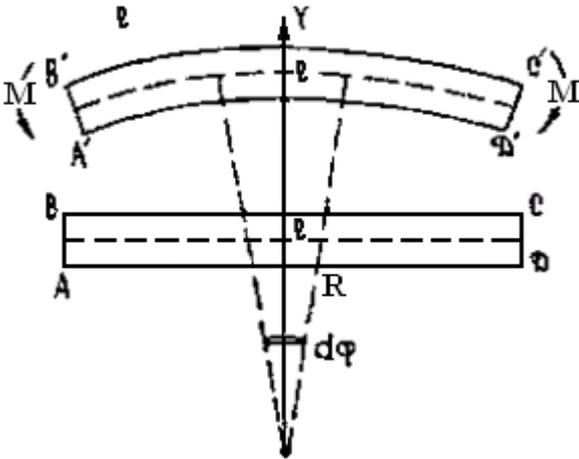
$\theta = \frac{r\varphi}{L} = \tau / G \rightarrow \tau = G \frac{r\varphi}{L} \rightarrow dM = \tau \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi G \varphi \frac{r^3}{L} dr$ . Интегрируя по всему сечению стержня от  $r = r_1$  (предполагается, что внутри стержня может быть цилиндрическая полость с радиусом  $r_1$ ) до  $r = r_2$ , находим закручивающий момент:

$$M = \int_{r_1}^{r_2} dM = 2\pi\mu\varphi / L \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \mu \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{2L} \varphi.$$

Итак, **основное уравнение кручения стержня** имеет вид:

$$M = k\varphi, \quad (8.11)$$

где  $k = \frac{\pi}{2} G (r_2^4 - r_1^4) / L$  – жесткость стержня на кручение.



В случае сплошного сечения, когда стержень не имеет внутренних полостей,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = a$ , формула для крутящего момента упрощается

$$M = \frac{\pi \mu a^4}{2L} \varphi. \quad (8.12)$$

Неоднородная деформация имеет место и в случае изгиба балки (**балкой называется стержень, работающий на изгиб**). Воспользуемся справедливой для балок гипотезой Д. Бернулли, в соответствии с которой сечения после изгиба остаются плоскими. Из этой гипотезы следует, что существует нейтральный слой, не деформирующийся при изгибе. Чем дальше точка от нейтрального слоя, тем в ней больше деформации (см. рис.)

Чем дальше точка от нейтрального слоя, тем в ней больше деформации (см. рис.)

$$\varepsilon = \frac{(R + y)d\varphi - R d\varphi}{R d\varphi} = \frac{y}{R},$$

где  $R$  – радиус кривизны нейтральной оси балки;  $y$  – расстояние от нейтральной оси до рассматриваемой точки балки;  $d\varphi$  – угол между двумя прямыми, проведенными из центра кривизны к концам выделенного линейного участка. Согласно закону Гука (8.3) (пользуясь законом Гука в виде (8.3), мы, конечно, пренебрегаем взаимодействием волокон стержня в поперечном направлении при изгибе) для напряжений в балке, получаем

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E y}{R}.$$

При известном распределении напряжений изгибающий момент находится интегрированием по сечению стержня:

$$M = \int \sigma y dS = \int \frac{E y^2}{R} dS = \frac{E}{R} \int y^2 dS = \frac{EI}{R},$$

где  $I = \int y^2 dS$  – момент инерции сечения балки относительно оси, лежащей в нейтральном слое. Итак, **основное уравнение изгиба балки** имеет вид

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}. \quad (8.13)$$

*Пример 8.1. Найдем форму изгиба консоли (балки, жестко – заземленной с одного из краев).*

*Пусть прогиб нейтральной оси балки задается функцией  $\xi = \xi(x)$  (см. рис.), а на ее свободный край действует сила  $F$ , тогда кривизна балки и изгибающий момент вычисляются из соотношений:*

$$\frac{1}{R} \cong -\frac{d^2 \xi}{dx^2}, \quad M = F(L - x)$$

и уравнение изгиба (8.13) записывается как

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\frac{F(L - x)}{EI}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем форму балки

$$\xi = C_1 x + C_2 - \frac{Fx^2}{2EI} \left( L - \frac{x}{3} \right).$$

Константы интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находятся из условий на левом краю

$\xi|_{x=0} = \frac{d\xi}{dx}|_{x=0} = 0$ , которые означают отсутствие прогиба и горизонтальность касательной к нейтральной оси в месте жесткого заземления балки. Отсюда  $C_1 = C_2 = 0$  и, следовательно,

$$\xi = -\frac{Fx^2}{2EI} \left( L - \frac{x}{3} \right).$$

Максимальный прогиб у консоли на правом свободном краю при  $x = L$

$$|\xi_{\max}| = |\xi|_{x=L} = \left| -\frac{Fx^2}{2EI} \left( L - \frac{x}{3} \right) \right|_{x=L} = \frac{FL}{3EI}.$$

Отметим, что в этой задаче момент сил создается не парой сил (случай чистого изгиба, рассмотренный при выводе основного уравнения изгиба балки), а одной силой, действующей на свободном конце консоли. При этом в сечениях консоли помимо момента возникает и перерезывающая сила  $Q = F$ . Тем не менее, более детальное решение задачи показывает, что в первом приближении полученные результаты сохраняют свою силу.

## 8.2. Упругие волны в стержнях

Мы рассмотрели стационарные деформации упругих сред в простейших случаях. Если же внешнее воздействие на тело изменяется во времени, то возникает волновое движение, при котором возмущение деформации передается от одних участков среды к другим с конечной скоростью. Одним из вариантов такого волнового движения являются упругие продольные волны в стержнях.

**Волны называются продольными, когда смещение в них параллельно направлению распространения.** В стержне продольные волны можно возбудить ударом по его торцу в направлении оси. Выведем уравнение, описывающее распространение этой волны. Из дифференциальной формы закона Гука (8.5) имеем

$$F = \sigma S = ES \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.14)$$

Разность сил в сечениях по второму закону Ньютона создает ускорение и, используя (8.14), получаем для элемента стержня длиной  $\Delta x$

$$\begin{aligned} m a_x = \Delta F &\rightarrow \rho S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x + \Delta x) - F(x) \rightarrow S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x \rightarrow \\ &\rightarrow \rho S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x, \end{aligned}$$

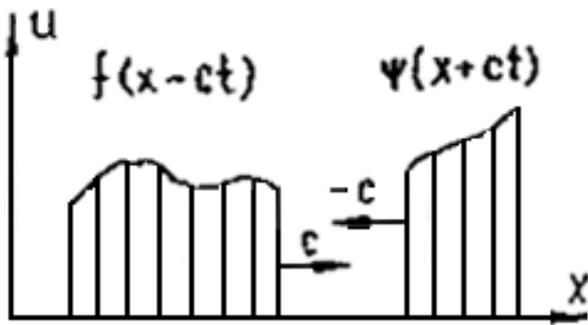
откуда получаем волновое уравнение для распространения продольных возмущений в стержне

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

При  $ES = const$  вдоль стержня волновое уравнение упрощается

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.15)$$

где  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость распространения продольных волн в стержне.



Общее решение (8.15) имеет вид ( $f, \psi$  – произвольные функции)

$$u(x,t) = f(x-ct) + \psi(x+ct), \quad (8.16)$$

в котором первый член описывает волну, бегущая в положительном направлении оси  $x$ , а второй – в отрицательном со скоростями, равными  $c$  (см. рис.). Из общего решения (8.16) видно, что аргументы функций  $f$  и  $\psi$  (а значит и их значения не изменяются при  $x-ct = const$ ,

$x+ct = const$ , соответственно. Дифференцируя эти равенства, получаем скорости распространения фиксированного значения перемещения

$$\frac{dx}{dt} = \pm c.$$

*Пример 8.2.* Значение скорости продольных волн в стержне можно получить, не обращаясь к волновому уравнению (8.15), а рассмотрев частный случай распространения кратковременного импульса прямоугольной формы (приблизительно такой импульс формируется в стержне при резком ударе по его торцу, см. рис.). По теореме об изменении импульса для заштрихованной на рисунке части материала, вовлеченного в движение ( $V$  – скорость частиц вещества) импульс равен

$$\Delta P = F\Delta t,$$

$$\Delta P = \Delta mV = \rho c\Delta tSV, \quad F\Delta t = \sigma S\Delta t = E\varepsilon S\Delta t,$$

откуда

$$\rho c\Delta tSV = E\varepsilon S\Delta t, \quad \text{т.е.} \quad \rho cV = E\varepsilon.$$

Подставляя в последнее соотношение  $\varepsilon = V/c$  (это равенство доказывается дифференцированием  $u(x,t) = \psi(x+ct)$  по  $x$  и  $t$ , поскольку  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $V = \frac{\partial u}{\partial t}$ ), получаем искомое значение скорости

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Если стержень имеет конечную длину или состоит из разнородных вдоль стержня материалов, то это оказывает влияние на распространение волн. Математически влияние учитывается посредством задания граничных условий. Сформулируем их в произвольной точке  $x=l$ . Если на границе не допускается смещения, то она называется **абсолютно жесткой**, и на ней выполняется условие

$$u|_{x=l} = 0. \quad (8.17)$$

В противоположном случае **абсолютно мягкой (свободной) границы** усилия на ней, а значит, и напряжения должны быть нулевыми:

$$\sigma|_{x=l} = 0 \rightarrow E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (8.18)$$

На контактной границе стержней из разных материалов требуется выполнение двух условий: непрерывность перемещений (из-за отсутствия разрыва между стержнями) и равенство напряжений (согласно третьему закону Ньютона):

$$\sigma_1|_{x=l} = \sigma_2|_{x=l} \rightarrow E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad u_1|_{x=l} = u_2|_{x=l}. \quad (8.19)$$

Учет влияния на распространение волн граничных условий приводит к таким явлениям как их отражение и формирование прошедших волн. Законы отражения и прохождения волн в упругом материале достаточно изучать на гармонических волнах, т.к., согласно известной из математики теореме, практически любую встречающуюся в физических приложениях функцию можно разложить в интеграл Фурье по гармоническим составляющим, а затем, используя принцип суперпозиции (уравнение и граничные условия – линейны) и гармонические законы отражения, легко получить результат отражения в общем случае. Для гармонических волн перемещение, исходя из (8.15), представляется в виде ( $f$  и  $\psi$  – тригонометрические функции ( $\cos, \sin$ ))

$$u(x,t) = a \cos(kx - wt + \psi_1) + b \cos(kx + wt + \psi_2), \quad (8.20)$$

где  $k$  - волновое число,  $w$  - круговая частота. Волна (8.20) обладает пространственно-временной периодичностью. В фиксированный момент времени  $t$  волновое возмущение  $u(x,t)$  принимает одинаковые значения при изменении координаты  $x$  на величину  $\lambda$ , называемую **длиной волны** и равную (учтено, что функция косинус имеет период  $2\pi$ )

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (8.21)$$

Согласно (8.21) волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  представляет собой число волн, укладываемых на отрезке длиной  $2\pi$ . Если же рассматривать волновой процесс в заданной точке пространства  $x$ , то величина  $u(x,t)$  меняется с периодом

$$T = \frac{2\pi}{w}. \quad (8.22)$$

С помощью введенных характеристик пространственной и временной периодичности  $\lambda$  и  $T$  гармоническая волна (8.20) записывается в виде

$$u(x,t) = a \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)\right) + b \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_2\right)\right). \quad (8.23)$$

Поскольку функция  $u(x,t)$  должна удовлетворять волновому уравнению, то длина волны  $\lambda$ , период колебаний  $T$  и скорость распространения волны  $c$  должны быть связаны некоторым соотношением. Сравнивая (8.23) с (8.16), получаем

$$\lambda = cT. \quad (8.24)$$

Соотношение (8.24) имеет простой физический смысл: за время  $T$  имеющееся в какой-либо точке волновое возмущение с одной стороны распространяется на расстояние  $cT$ , а с другой стороны это возмущение повторяется через время  $T$  в той же самой точке, т.е. величина возмущений совпадает на расстоянии  $\lambda = cT$ .

Для удобства промежуточных выкладок  $u(x,t)$  записывают в комплексной форме ( $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ ):

$$u(x,t) = ae^{i(kx-wt)}e^{i\psi_1} + be^{i(kx+wt)}e^{i\psi_2} = ae^{i\psi_1}e^{i(kx-wt)} + be^{i\psi_2}e^{i(kx+wt)} = Ae^{i(kx-wt)} + Be^{i(kx+wt)}, \quad (8.25)$$

где  $A = ae^{i\psi_1}$ ,  $B = be^{i\psi_2}$  представляют собой комплексные амплитуды. Конечно, физический смысл имеет только вещественная часть выражения (8.25). Однако, если мы совершаем линейные операции над комплексными волнами (сложение, дифференцирова-

ние по  $t$  или  $x$ , интегрирование и т.д.), то вещественная часть окончательного результата будет равна результату тех же операций над вещественной частью исходных волн. Но с экспонентами оперировать значительно проще, чем с тригонометрическими функциями и поэтому используют комплексное представление гармонических волн. В том случае, когда операции – нелинейны, например, при определении энергии квадратичной по перемещению, надо с самого начала использовать вещественную форму.

*Пример 8.3. Рассмотрим для примера прохождение гармонической волны через границу двух стержней. Пусть слева на границу падает волна  $u_+ = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$ . В результате отражения в первой среде будет две волны, идущие к границе и от нее. С учетом сохранения частоты (сохранение частоты, как легко видеть, также следует из граничных условий) смещение в первом стержне записывается в виде*

$$u_1 = A(e^{ik_1x} + Ve^{-k_1x}), \quad k_1 = \omega / c_1.$$

*От границы вправо во втором стержне может идти только одна уходящая волна*

$$u_2 = ZAe^{ik_2x}, \quad k_2 = \omega / c_2$$

*Подставляя эти выражения для перемещений в граничные условия*

$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0} \quad \text{и} \quad E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

получаем

$$\begin{cases} 1 + V = Z, \\ ikE_1(1 - V) = ikE_2, \end{cases}$$

откуда следуют **формулы Френеля**:

$$V = \frac{\sqrt{\rho_1 E_1} - \sqrt{\rho_2 E_2}}{\sqrt{\rho_1 E_1} + \sqrt{\rho_2 E_2}} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = \frac{n - m}{n + m}, \quad Z = 1 + V = \frac{2n}{n + m},$$

где  $n = c_1 / c_2$ ,  $m = \rho_2 / \rho_1$ .

В отсутствии вынуждающей продольной силы стержень колеблется (вибрирует) на собственных частотах, при этом в нем образуется стоячая волна. Найти собственные частоты можно, решая волновое уравнение с соответствующими граничными условиями и предполагая, что в стержне установятся гармонические колебания. Подставляя в волновое уравнение перемещение в виде гармоники, записанной в комплексном виде  $u = \varphi(x)e^{-i\omega t}$ , получаем уравнение для собственных форм колебаний стержня ( $\omega^2 / c^2 = (\omega / c)^2 = (2\pi / T / c)^2 = (2\pi / (cT))^2 = (2\pi / \lambda)^2 = k^2$ )

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 \varphi = 0 \tag{8.26}$$

с решением

$$\varphi = A \sin(kx) + B \cos(kx). \tag{8.27}$$

*Пример 8.4 В качестве примера продольных собственных колебаний в сплошной среде рассмотрим вибрацию стержня с абсолютно жесткими границами (см. рис.). Подставляя в граничные условия  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  функцию (8.27), имеем  $B = 0$  и  $A \sin(kl) = 0$ . Из второго соотношения, полагая, что  $A \neq 0$  (иначе  $u \equiv 0$ ), получаем  $\sin(kl) = 0$ , откуда  $kl = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3$ ). Следовательно,  $k = n\pi / l$  и для стержня набор собственных частот определяется по формуле:*

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{Tc} = \frac{2\pi}{\lambda} c = kc = n\pi \frac{c}{l}.$$

Так как собственные формы стержня есть  $u = A \sin(n\pi \frac{x}{l})$ , то легко видеть, что  $(n-1)$  – число узлов (точек, где  $u = 0$ ), исключая граничные. Случай со свободными границами рассматривается аналогично. Набор частот получается тот же, но число узлов в этом случае равно  $n$ .

Рассмотрим теперь **поперечные волны изгиба в стержнях**. Такой вид волн возникает при ударе по стержню в поперечном направлении.

Смещение оказывается перпендикулярным направлению распространения волны, как и должно быть в случае, когда волна – поперечная (см. рис.). Второй закон Ньютона для элемента  $\Delta x$  записывается в виде

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Delta x = Q(x + \Delta x) - Q(x) = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x$$

или

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (8.28)$$

где  $Q$  – поперечная {или перерезывающая} сила, равная сумме сдвиговых (касательных) напряжений, действующих в рассматриваемом сечении, перпендикулярном

нейтральной оси стержня. Величина  $Q$  связана с моментом  $M$  уравнением вращения для элемента стержня длиной  $\Delta x$ :

$$Q \Delta x + [M(x + \Delta x) - M(x)] = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Delta x.$$

откуда

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (8.29)$$

Дифференцируя уравнение (8.29) по  $x$  и подставляя  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  из (8.28), получаем

$$(M = EI \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2})$$

$$\text{и } \varphi \cong \text{tg}(\varphi) = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = \rho I \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (8.30)$$

Покажем, что в случае длинноволновых возмущений, когда характерная длина волны  $\lambda$  значительно больше характерной толщины стержня, стоящий в правой части (8.30) член мал по сравнению  $\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Введем эффективный радиус инерции сечения  $r$ , т. ч.

$I = r_0^2 S$ . Пусть  $T$  и  $\lambda$  - характерные масштабы изменения  $\xi$  по времени и длине. Тогда:

$$\left( \rho I \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial t^2} \right) / \left( \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) = (r_0^2 S \rho \xi / \lambda^2 T^2) / (\rho S \xi / T^2) = \left( \frac{r_0^2}{\lambda} \right) \ll 1,$$

т.к. поперечные размеры стержня  $r_0$  много меньше длины волны  $\lambda$ . В этом приближении правой частью в (8.30) можно пренебречь и уравнение для волн изгиба приобретает вид

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} = 0. \quad (8.31)$$

Уравнение волн изгиба имеет четвертый порядок по  $x$  и для однозначного определения решения необходимо формулировать четыре граничных условия. Например, в случае жестко-закрепленного края смещение и угол поворота равны нулю  $\xi|_{x=1} = 0$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x=1} = 0$ ; для свободно-опертого края момент в сечении и смещение равны нулю

$$M|_{x=1} = 0, \quad \xi|_{x=1} = 0 \quad \text{или, с учетом (8.13),} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}|_{x=1} = 0, \quad \xi|_{x=1} = 0 \quad \text{и, наконец, когда край сво-}$$

боден, момент и перерезывающая сила равны нулю, т.е.  $M|_{x=1} = 0$ ,  $Q|_{x=1} = -\frac{\partial M}{\partial x}|_{x=1} = 0$

$$\text{или, с учетом (8.13),} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}|_{x=1} = 0.$$

В отличие от решения (8.16) уравнения продольных волн (8.15), общее решение уравнения поперечных волн изгиба (8.31) уже нельзя представить в виде волн произвольной формы, распространяющихся с постоянной скоростью. Поэтому рассмотрим более простой случай гармонической волны, когда

$$\xi(x, t) = A\varphi(x)e^{-i\omega t}.$$

Для нее из (8.31) следует

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - k^4 \varphi = 0, \quad (8.32)$$

где

$$k = \left( \frac{\rho}{Er_0^2} \right)^{1/4} w^{1/2} \quad \text{или} \quad w = \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{1/2} k^2. \quad (8.33)$$

Находя общее решение (8.32), получаем

$$\xi(x, t) = A_+ e^{i(kx - \omega t)} + A_- e^{-i(kx + \omega t)} + B_+ e^{kx - i\omega t} + B_- e^{-kx - i\omega t}.$$

Первые два слагаемых соответствуют волнам, распространяющимся в разные стороны со скоростью

$$c = \frac{w}{k} = \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{1/4} w^{1/2} = \sqrt{\left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/2} r_0} w \quad (8.34)$$

Из (8.34) следует, что изгибные волны в стержне, в отличие от продольных, обладают дисперсией (зависимостью скорости распространения  $c$  от частоты колебаний  $w$  или длины волны  $\lambda$ ).

### 8.3. Фазовая и групповая скорости волн

Рассматриваемая нами до сих пор скорость распространения волн на самом деле являлась скоростью перемещения фазы волны, т.е. скоростью перемещения точки, у которой  $\omega t \pm kx = const$ . Такие скорости называются **фазовыми**, и мы будем их помечать соответствующим индексом  $ph$  ( $c = c_{ph}$ ). В тех волновых процессах, когда эти скорости оказываются постоянными (не зависящими от частоты для монохроматических волн), форма волны (распределение ее характеристик) по мере ее распространения не меняется, и фазовая скорость совпадает со скоростью перемещения области локализации волновой энергии. При этом частота  $w$  линейно зависит от волнового числа  $k$  ( $w = ck$ ). Однако, как мы видели в п. 8.2 на примере изгибных волн (см. соотношение (8.33)), такая ли-

нейность не всегда имеет место. В случае, когда фазовая скорость зависит от частоты, форма волны при распространении меняется, т.е. имеет место **дисперсия**. Для некогерентных волн, представляющих собой, согласно теореме Фурье, суперпозицию монохроматических волн, каждая из которых перемещается, вообще говоря, со своей скоростью, необходимо ввести новое понятие – **групповую скорость** – **скорость группы монохроматических волн, движущейся как целое в окрестности рассматриваемого промежутка времени и характеризующей скорость распространения полной энергии волны**. При выводе соотношения, определяющего групповую скорость  $c_{gr}$ , предположим для простоты, что группа волн состоит из двух монохроматических волн, имеющих фазовые скорости  $c_{ph}$  и  $c_{ph} + dc_{ph}$  и длины волн  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ . За скорость перемещения волны в целом (групповую скорость)  $C_{gr}$  примем скорость какой-либо ее характерной точки, например, максимума. Условием образования максимума при наложении волн в точке  $x$  и в момент времени  $t$  будет равенство фаз (или их отличие на  $2\pi n, n = 0, \pm 1, \dots$ )

$$\frac{c_{ph}t - x}{\lambda} = \frac{(c_{ph} + dc_{ph})t - x}{\lambda + d\lambda},$$

из которого следует зависимость от времени координаты максимума:

$$x(t) = t \left( c_{ph} - \lambda \frac{dc_{ph}}{d\lambda} \right) = t \left( c_{ph} + \frac{1}{\lambda} \frac{dc_{ph}}{d(1/\lambda)} \right) = t \left( c_{ph} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dc_{ph}}{d(2\pi/\lambda)} \right) = t \left( c_{ph} + k \frac{dc_{ph}}{dk} \right) = t \frac{d(c_{ph}k)}{dk} = t \frac{dw}{dk}$$

откуда, дифференцируя по  $t$ , получим скорость движения точки максимума, которая и является в данном случае групповой скоростью  $c_{gr}$ :

$$c_{gr} = c_{ph} - \lambda \frac{dc_{ph}}{d\lambda} = \frac{dw}{dk}. \tag{8.35}$$

Из полученного соотношения (8.35), в частности, следует, что, как уже отмечалось, при линейной зависимости  $w = w(k) = ck$  групповые и фазовые скорости совпадают, т.к. все входящие в группу волн гармоники имеют одинаковую фазовую скорость  $c_{ph} = \frac{w}{k} = c = const$ , с которой и движется вся волна в целом  $c_{gr} = \frac{dw}{dk} = \frac{d(ck)}{dk} = c = c_{ph}$ , не изменяя своей формы.

*Пример 8.5. В случае изгибных волн в стержне найдем фазовую и групповую скорости, используя (8.33)*

$$c_{ph} = \frac{w}{k} = \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{1/2} k^2 / k = \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{1/2} k,$$

откуда  $k = c_{ph} \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{-1/2}$  и согласно (8.35)

$$c_{gr} = \frac{dw}{dk} = \frac{d}{dk} \left[ \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{1/2} k^2 \right] = 2k \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{1/2} = 2c_{ph} \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{-1/2} \left( \frac{Er_0^2}{\rho} \right)^{1/2} = 2c_{ph}.$$

*Следовательно, групповая скорость изгибных волн в стержне вдвое больше фазовой.*

## **ВОПРОСЫ**

1. Что такое упругое тело?
2. К каким двум видам можно свести все разнообразие деформаций твердых тел?
3. Каковы основные законы описания упругого деформирования изотропного твердого тела? Сформулируйте законы Гука и Пуассона.
4. Сформулируйте принцип суперпозиции для упругой среды. Следствием чего он является?
5. Что такое чистый сдвиг? Сформулируйте закон Гука для сдвига.
6. Напишите закон Гука в дифференциальной форме.
7. Какие деформации твердых тел называются однородными?
8. Что такое стержень и балка ? Опишите виды деформаций стержня (растяжение, кручение, изгиб).
9. Каков физический смысл волнового числа и как оно связано с длиной волны?
10. Дайте определение продольной волны.
11. Как возбуждаются продольные волны в стержнях? Выпишите волновое уравнение упругих продольных колебаний в стержне.
12. Определите собственные частоты продольных колебаний стержня с абсолютно жесткими границами.
13. Когда возбуждаются поперечные волны изгиба в стержнях? Выпишите уравнение для упругих волн изгиба.
14. Что такое дисперсия? Как связаны между собой фазовая и групповая скорости волн?

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

### I. ВВЕДЕНИЕ

Основным объектом изучения аналитической механики является **механическая система – несвободная (с наложенными связями) система материальных точек и твердых тел**. Если движения – несвободны, то в уравнения второго закона Ньютона необходимо добавить подлежащие определению силы реакции со стороны связей, что существенно усложняет получение решений конкретных задач механики. С другой стороны, наличие связей ограничивает число степеней свободы системы, а значит, уменьшает порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей ее поведение. Основная задача аналитической механики и заключается в разработке методов, позволяющих описать поведение механической системы системой дифференциальных уравнений, не содержащих неизвестных реакций связи и имеющих наименьший возможный порядок. Таким образом, ставится задача максимального учета особенностей поведения системы, порождаемых наложенными связями.

Далее с целью упрощения будут рассматриваться системы, состоящие только из материальных точек, на которые наложены голономные, удерживающие и, в общем случае, нестационарные связи (классификацию связей см. далее).

#### 1.1. Классификация связей и обозначения

**Связями называются ограничения, накладываемые на координаты и скорости м.т. механической системы.** Математически связи выражаются в виде уравнений или неравенств, содержащих время, координаты и скорости точек. **Связи называются голономными, если они могут быть записаны в виде соотношений, не содержащих производных координат по времени** (в противном случае, если эти соотношения не удается проинтегрировать по времени, то связи являются неголономными). В том случае, когда уравнение связей не содержит явной зависимости от времени, связь называется стационарной (соответственно, при наличии этой зависимости – нестационарной). В наиболее общем виде нестационарные голономные связи описываются системой нелинейных уравнений ( $n$  – число наложенных на систему м.т. связей;  $N$ -число м.т. в механической системе):

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \\ \quad \bullet \\ \quad \bullet \\ \quad \bullet \\ f_n(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0. \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \\ f_2(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \\ \quad \bullet \\ \quad \bullet \\ \quad \bullet \\ f_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Если число точек в системе  $N$ , а число связей  $n$ , то число степеней свободы  $s$  (число независимых параметров, которыми полностью задается конфигурация системы) равняется:

$$s = 3N - n.$$

Таким образом, индексы, характеризующие отдельные элементы (связи, м.т., их координаты, их независимая совокупность координат и т.д.) рассматриваемой системы материальных точек (СМТ), могут изменяться: от 1 до  $n$  (например, номера связей); от 1 до  $N$  (например, номера м.т. или индексы их радиус - векторов); от 1 до  $3N$  (например, номера подряд занумерованных координат или проекций скоростей точек м.т., см.

ниже), от 1 до  $s$  (например, номера независимых параметров – обобщенных координат – полностью характеризующих конфигурацию системы). Для того, чтобы каждый раз не писать пределы изменения, закрепим их за определенными индексами:  $\rho = 1, \dots, n$ ;  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, s$ ;  $\nu = 1, \dots, 2s$  (индексы, изображаемые буквами греческого алфавита);  $i, j, k = 1, \dots, N$ ;  $l, m = 1, \dots, 3N$  (индексы, изображаемые буквами латинского алфавита). Кроме того, для сокращения записи, будем считать, что если индексы где-то написаны, то они пробегают все соответствующие им значения. Например,

$$f_\rho(\vec{r}_i) \sim f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \dots, f_n(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

В тех немногочисленных случаях, когда индекс требуется фиксировать, будем ставить ограничительную черту справа от переменной с индексом. Например,  $f(\vec{r}_i|)$  означает функцию от радиус-вектора конкретной  $i^{\text{ой}}$  точки.

При применении индексных обозначений иногда оказывается удобным занумеровать координаты м.т. и проекции, относящихся к ним векторов единым образом, например,

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) \sim (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}) = (x_l),$$

$$(\vec{F}_i) = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N) = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, \dots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz}) \sim (F_1, \dots, F_{3N}) = (F_l)$$

$$(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N) \sim (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, \dots, m_{3N-2}, m_{3N-1}, m_{3N}) = (m_l).$$

Используя принятые соглашения, довольно громоздкую систему уравнений (1.1) можно записать в одном из следующих эквивалентных по смыслу видов:

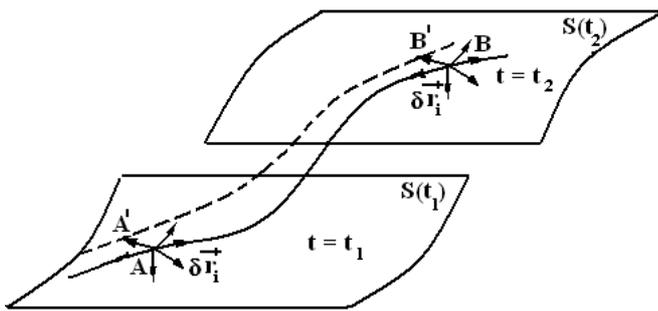
$$f_\rho(\vec{r}_i, t) = 0, \quad f_\rho(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad f_\rho(x_l, t) = 0. \quad (1.2)$$

И, наконец, в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем пользоваться правилом Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся индексу, например:

$$a_\gamma b_\gamma = a_\beta b_\beta = a_\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=s} a_\alpha b_\alpha, \quad a_j b_j = a_i b_i = \sum_{i=1}^{i=N} a_i b_i, \quad a_m b_m = a_l b_l = \sum_{l=1}^{l=3N} a_l b_l, \quad a_i b_l \neq \sum_{l=1}^{l=3N} a_i b_l.$$

## 1.2. Виртуальные перемещения и вариации координат

**Виртуальными перемещениями  $\delta \vec{r}_i$  называются бесконечно малые перемещения материальных точек механической системы, удовлетворяющие наложенным на нее связям, в фиксированный момент времени.** Виртуальными такие перемещения называются потому, что они не предполагают наличия движения, а являются воображаемыми изменениями конфигурации СМТ, удовлетворяющими условиям связи (1.1). Например, пусть условия связи задают, что рассматриваемая  $i^{\text{ая}}$  м.т. должна в любой момент времени находиться на некоторой деформирующейся, движущейся поверхности  $S(t)$ . Тогда истинное движение м.т. может описываться кривой  $AB$ , а виртуальные перемещения  $\delta \vec{r}_i|$  в моменты времени  $t = t_1, t_2$  – стрелочками, как показано на рисунке.



Таким образом, виртуальные перемещения, в отличие от истинных перемещений, не есть функции времени. Однако из виртуальных перемещений в каждый момент времени можно выбрать такие, что в совокупности они составят некоторую непрерывную виртуальную траекторию  $|\tilde{x}_i(t)|, |\tilde{y}_i(t)|, |\tilde{z}_i(t)|$  (она показана на рисунке пунктирной линией  $A'B'$ ), которая удовлетворяет наложенным на м.т. связям, но ее координаты отлича-

ется от координат истинного движения точки  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$  на бесконечно малые величины:

$$\begin{cases} \delta x_i(t) = |\tilde{x}_i(t) - x_i(t)|, \\ \delta y_i(t) = |\tilde{y}_i(t) - y_i(t)|, \\ \delta z_i(t) = |\tilde{z}_i(t) - z_i(t)|, \end{cases}$$

называемые вариациями координат. Отметим, что вариации координат уже являются функциями времени. Мы рассматривали варьирование координат фиксированной  $i$  ой материальной точки, но во многих случаях оказывается полезным одновременное изменение всей совокупности координат СМТ, т.е. варьирование траектории в многомерном ( $3N$ -мерном) конфигурационном пространстве

$$\delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t) \quad \text{или} \quad \delta \vec{r}_i(t) = \tilde{\vec{r}}_i(t) - \vec{r}_i(t).$$

Таким образом, **вариация координат есть бесконечно малое приращение координат точек механической системы от истинного движения к виртуальному, допускаемому связями.**

Введенное понятие вариации позволяет применять широко используемый в аналитической механике метод варьирования функций, зависящих от координат СМТ и времени. Пусть задана некоторая функция координат  $f(x_i, t)$ , тогда согласно формуле Тейлора вариация этой функции определяется соотношением:

$$\delta f(x_i, t) = f(x_i + \delta x_i, t) - f(x_i, t) = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_i) \delta x_m \quad (1.3)$$

или, используя векторное задание положения точек,

$$\delta f(\vec{r}_i, t) = f(\vec{r}_i + \delta \vec{r}_i, t) - f(\vec{r}_i, t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_j}(\vec{r}_i) \delta \vec{r}_j, \quad (1.4)$$

где под производной функции по вектору понимается вектор с компонентами равными частным производным этой функции по компонентам вектора.

Поскольку полный дифференциал функции  $f(x_i, t)$  равняется  $df(x_i, t) = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_i) dx_m + \frac{\partial f}{\partial t} dt$ , то он отличается от вариации лишь слагаемым  $\frac{\partial f}{\partial t} dt$  и мы можем написать

$$\delta f = df \Big|_{dx_i = \delta x_i}^{dt=0}.$$

### 1.3. Обобщенные координаты и скорости

Используя понятие вариации функции координат и времени, накладываемые на виртуальные перемещения ограничения, которые описываются соотношениями (1.1), теперь можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad \text{или в векторной форме} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = 0, \quad (1.5)$$

В соответствии с (1.5) среди  $3N$  вариаций координат, задающих положение материальных точек механической системы из  $N$  м.т., только  $s = 3N - n$  оказываются независимыми. Поскольку **число независимых величин, задание которых полностью определяет конфигурацию СМТ (положение всех её точек), называется числом степеней свободы**, то в данном случае при наложении на механическую систему  $n$  связей оно оказывается равным  $s$ . Очевидно, что параметры, задающие конфигурацию СМТ, не обязательно должны быть декартовыми координатами м.т. **Любые  $s$  величин  $q_\alpha$ ,**

полностью характеризующие положение СМТ с  $s$  степенями свободы, называются обобщенными координатами, и могут быть с успехом использованы для описания поведения СМТ. Соответственно, производные по времени от обобщенных координат  $\dot{q}_\alpha$  (напомним, что полная производная по времени обозначается точкой сверху дифференцируемой функции, и это оказывается особенно удобным в аналитической механике) называются обобщенными скоростями. В общем случае многомерное (размерностью  $s$ ) пространство, образованное совокупностью обобщенных координат СМТ  $q_\alpha$  называется конфигурационным.

Обобщенные координаты уже оказываются независимыми, несмотря на то, что на СМТ наложены внешние связи. Кроме того, их меньше, чем координат м.т. на число связей  $n$ . Поэтому постановка и решение задач механики для СМТ со связями в обобщенных координатах упрощается (особенно в том случае, когда размерность конфигурационного пространства – невелика). Однако задание для СМТ обобщенных координат в некоторый момент времени не определяет динамику развития механической системы в последующие моменты. Как следует из опыта, только одновременное задание обобщенных координат и обобщенных скоростей позволяет предсказать дальнейшую эволюцию СМТ. С точки зрения математической постановки задачи это означает, что должны существовать уравнения, позволяющие по значениям обобщенных координат и скоростей рассчитать вторые производные  $\ddot{q}_\alpha$  (получение последующих производных уже не является проблемой, т.к. соответствующие уравнения для них могут быть найдены дифференцированием по времени уравнений для определения вторых производных). Вывод этих уравнений, называемых уравнениями движения, и является одной из основных задач аналитической механики.

Поскольку по своему определению обобщенные координаты полностью задают конфигурацию СМТ, то по ним могут быть однозначно рассчитаны декартовы координаты м.т., т.е. должны существовать функциональные зависимости (уравнения преобразования)

$$x_l = x_l(q_\alpha, t) \quad \text{или} \quad \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_\alpha, t). \quad (1.6)$$

Из (1.6) получаем соотношения для вариаций декартовых и обобщенных координат

$$\delta x_l = \frac{\partial x_l(q_\alpha, t)}{\partial q_\beta} \delta q_\beta \quad \text{или} \quad \delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i(q_\alpha, t)}{\partial q_\beta} \delta q_\beta. \quad (1.7)$$

Отметим, что по своему математическому смыслу функциональные зависимости (1.6) – есть просто параметрическое представление ( $q_\alpha$  – параметры) решения системы уравнений связей (1.2), и, если связи стационарны, то время, отсутствуя в (1.2), не будет явно входить и в (1.6). Обратное преобразование

$$q_\alpha = q_\alpha(x_l, t) \quad \text{или} \quad q_\alpha = q_\alpha(\vec{r}_i, t)$$

может быть неоднозначным в некоторых точках  $x_l$  ( $\vec{r}_i$ ). Например, если м.т. движется согласно наложенным связям вдоль некоторой самопересекающейся кривой, то в точках ее пересечения обобщенная координата (в качестве нее может быть взято расстояние вдоль кривой, как при естественном способе задания движения в первой задаче кинематики) принимает столько значений сколько раз происходит самопересечение. Частным случаем этого примера является движение м.т. по замкнутой кривой, где любая точка этой кривой обладает столькими значениями обобщенной координаты, сколько полных оборотов вдоль кривой совершила м.т.

В конкретных задачах выбор обобщенных координат подсказывается видом связей, ограничивающих свободу движения СМТ. Число этих обобщенных координат (число степеней свободы)  $s$  может быть найдено следующим способом. Если СМТ не имеет возможности менять свою конфигурацию, то  $s=0$ . При возможности движения фиксируется одна из декартовых координат той м.т., которая способна эту координату менять. Если дальнейшее изменение конфигурации невозможно, то  $s=1$ . Иначе опять фиксируем одну из координат одной из оставшейся подвижной м.т. и т.д., пока не определится  $s$  (очевидно, что этот процесс закончится, т.к. число степеней свободы СМТ не может неограниченно расти, будучи не больше  $3N$ ).

## **ВОПРОСЫ**

1. Что такое механическая система?
2. Какие значения пробегает индексы  $\alpha, \rho, i, l$ ?
3. В чём смысл правила суммирования по повторяющимся индексам?
4. Какая связь называется стационарной и голономной?
5. Что такое число степеней свободы механической системы? Чему оно равно для системы из  $N$  материальных точек, на которую наложено  $n$  связей?
6. Что такое обобщенные координаты и обобщенные скорости механической системы.
7. Чему равна размерность конфигурационного пространства механической системы из  $N$  материальных точек, на которую наложено  $n$  связей?
8. Как определяется вариация координат механической системы?
9. Что понимается под производной функции по вектору, сколько у этой производной компонент?
10. Как определить число степеней свободы для конкретной механической системы?

## II. ПРИНЦИПЫ ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 2.1. Принцип Лагранжа

Принцип Лагранжа (идея принципа принадлежит Э. Торричелли, а его обобщение на случай неударяющих связей – М.В. Остроградскому) формулируется для несвободных СМТ, находящихся в равновесии. Необходимым и достаточным условием равновесия СМТ с наложенными связями является система  $N$  векторных уравнений ( $3N$  скалярных)

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \quad (2.1)$$

или, используя единую нумерацию компонент векторов сил, приложенных к м.т.,

$$F_i + R_i = 0, \quad (2.2)$$

где  $\vec{F}_i|$  – суммарный вектор заданных (активных) сил, приложенных к  $i^{\text{ой}}$  материальной точке;  $\vec{R}_i|$  – суммарный вектор сил реакции связей, приложенных к  $i^{\text{ой}}$  материальной точке. Умножим  $i^{\text{ое}}$  уравнение (2.1) на соответствующее виртуальное перемещение  $\delta \vec{r}_i|$  и просуммируем полученные равенства

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.3)$$

Поскольку каждое слагаемое  $\vec{F}_i \delta \vec{r}_i|$  и  $\vec{R}_i \delta \vec{r}_i|$  в левой части (2.3) представляет собой работу соответствующих сил, приложенных к  $i^{\text{ой}}$  м.т. на виртуальном перемещении  $\delta \vec{r}_i|$ , то её называют виртуальной работой и, следовательно, **сумма виртуальных работ заданных сил и сил реакции для СМТ, находящихся в равновесии, равна нулю.**

Так как связи в данном случае учитываются силами реакциями, то последние можно включить в заданные, считая все точки свободными (удовлетворение условиям связи будет обеспечено силами реакции), тогда перемещения становятся независимыми и из (2.3) следует (2.1). Поэтому равенство нулю суммарной виртуальной работы (2.3) является необходимым и достаточным условием равновесия СМТ.

Условие (2.3) – неудобно, т.к. содержит неизвестные силы реакции. Попытаемся их исключить, накладывая на связи в СМТ дополнительные требования. Разложим каждую из сил реакции на нормальную  $\vec{N}_i$  и тангенциальную  $\vec{T}_i$ . (силу трения) составляющие

$$\vec{R}_i = \vec{N}_i + \vec{T}_i \quad (2.4)$$

и подставив в (2.3), получим (учтено, что в силу перпендикулярности  $\vec{N}_i$  и  $\delta \vec{r}_i$  сумма  $\vec{N}_i \delta \vec{r}_i = 0$ )

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{T}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь идеальные связи, в которых по определению силы трения отсутствуют (более общим является требование, что работа сил реакции, создаваемых идеальными связями, на виртуальных перемещениях не совершается). Тогда второе слагаемое в (2.5) обращается в ноль, и мы получаем **принцип виртуальных перемещений Лагранжа: виртуальная работа заданных сил, приложенных к механической системе с идеальными связями и находящейся в равновесии, равна нулю**

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.6)$$

Используя единую нумерацию компонент векторов из (2.6) получаем принцип виртуальных перемещений в виде

$$F_i \delta x_i = 0. \quad (2.7)$$

Теперь из (2.7) уже не могут быть получены условия равновесия (2.2), т.к.  $\delta x_l$  не являются независимыми. Однако независимыми являются обобщенные координаты  $q_\alpha$  и для них из (1.7) и (2.6), (2.7) получаем

$$F_l \delta x_l = F_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0. \quad (2.8)$$

Вводя обозначение для обобщенной силы  $Q_\alpha$ , равной

$$Q_\alpha = F_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \quad \text{или} \quad Q_\alpha = \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (2.9)$$

из (2.8) находим математическую формулировку принципа виртуальных перемещений Лагранжа в обобщенных координатах

$$Q_\alpha \delta q_\alpha = 0. \quad (2.10)$$

В принципе виртуальных перемещений (2.10) все обобщенные виртуальные перемещения  $\delta q_\alpha$  – уже независимы, и из него следует система уравнений равновесия механической системы

$$Q_\alpha = 0. \quad (2.11)$$

Компоненты обобщенных силы  $Q_\alpha$ , определяемые равенством (2.9), являются обобщением понятия компонент механической силы. В зависимости от соответствующей ей обобщенной координаты  $\delta q_\alpha$  сила  $Q_\alpha$  может иметь различный физический смысл. В частности, ее размерность не фиксирована, а определяется по формуле (это следует из того что  $Q_\alpha \delta q_\alpha$  имеет размерность работы  $\delta A$ ; в данном случае скобки означают размерность физической величины, в них заключенной)

$$[Q_\alpha] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_\alpha]}. \quad (2.12)$$

Например, из (2.12) получаем, что если обобщенная координата – угол (величина безразмерная), то размерность обобщенной силы совпадает с размерность момента силы (Дж=н×м). Так в случае бесконечно малого поворота а.т.т., вращающегося вокруг неподвижной оси, работа равняется произведению проекции на ось вращения суммарного момента действующих сил на угол поворота.

Отметим, что обобщенные силы в конкретных задачах удобнее рассчитывать не по соотношениям (2.9), а на основе выражения работы отдельной компоненты обобщенной силы

$$\delta A = Q_\alpha \delta q_\alpha. \quad (2.13)$$

Согласно (2.13) компонента обобщенной силы равняется коэффициенту при вариации обобщенной координаты в выражении возможной работы. Поэтому достаточно посчитать работу при изменении конфигурации СМТ в результате бесконечно малого приращения только одной обобщенной координаты на  $\delta q_\alpha$ . Работа окажется пропорциональной этому приращению, а коэффициент пропорциональности равным искомой  $\alpha$ -компоненте обобщенной силы  $Q_\alpha$ .

В случае потенциальных сил определение компонент  $Q_\alpha$  упрощается. Так как компоненты обобщенной силы определяются дифференцированием потенциальной энергии  $U(x_l)$

$$F_l = -\frac{\partial U}{\partial x_l} \quad \text{или} \quad \vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

то из (2.9) получаем

$$Q_\alpha = F_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

или, используя векторы,

$$Q_\alpha = \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (2.14)$$

В соответствии с (2.11) и (2.14) условия равновесия СМТ в случае действия только потенциальных сил записываются в виде необходимого условия экстремума потенциальной энергии как функции с переменных  $q_\alpha$

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (2.15)$$

В заключение отметим, что полученные уравнения равновесия, вообще говоря, справедливы только в случае голономных, стационарных, идеальных связей. Однако требование идеальности может быть несколько ослаблено. Если связи неидеальны, но силы трения выражаются через нормальные компоненты сил реакции связей, как это имеет место в случае сухого трения, то эти силы трения можно включить в заданные, а связи считать по-прежнему идеальными.

## 2.2. Принцип Даламбера – Лагранжа

Дифференциальные уравнения движения несвободной СМТ могут быть представлены в форме уравнений равновесия. Впервые возможность этого представления была отмечена Даламбером. На основе подхода Даламбера полученные в предыдущем разделе условия равновесия СМТ могут быть обобщены на случай движения.

Для  $N$  материальных точек второй закон Ньютона в векторном представлении имеет вид

$$m_i \vec{a}_i | = \vec{F}_i + \vec{R}_i = 0, \quad (2.16)$$

где  $m_i$ ,  $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$  – масса и вектор ускорения  $i^{\text{ой}}$  точки системы. Введем даламберовы силы инерции по формулам

$$\vec{F}_i^{\text{ин}} = -m_i \vec{a}_i |. \quad (2.17)$$

Тогда из (2.16), (2.17) получаем систему уравнений движения в виде условий равновесия сил, приложенных к м.т. механической системы

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + F_i^{\text{ин}} = 0. \quad (2.18)$$

Представление уравнений движения СМТ в виде (2.18) составляет **содержание принципа Даламбера: если к заданным силам и силам реакции связей движущейся СМТ добавить силы инерции, то в каждый момент времени такая система сил будет уравновешенной.** Конечно, в действительности механическая система не находится в равновесии, утверждается лишь, что уравновешивается совокупность трех видов сил. Принцип Даламбера оказывается полезным в задачах, где требуется определить реакции связей в движущихся механических системах. Но кроме практических применений он играет роль связующего звена между принципом виртуальных перемещений в статике (принципом Лагранжа) и принципом виртуальных перемещений в динамике (принципом Даламбера – Лагранжа).

Так же, как и в случае статики (см. предыдущий подраздел), из условий равновесия (2.18) получим принцип виртуальных перемещений, но теперь он уже будем сформулирован для движущейся системы. Умножим каждое из уравнений (2.18) на соответствующее виртуальное перемещение  $\delta \vec{r}_i |$  и просуммируем полученные равенства

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \delta \vec{r}_i + \vec{F}_i^{in} \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.19)$$

В случае идеальных связей, когда работа сил реакции на виртуальных перемещениях не совершается  $\vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0$ , из (2.19) получаем **принцип Даламбера–Лагранжа: в любой момент времени движения механической системы с идеальными связями алгебраическая сумма виртуальных работ заданных и даламберовых сил инерции равна нулю**

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{F}_i^{in} \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.20)$$

Из (1.7) и (2.20) получаем принцип Даламбера–Лагранжа в обобщенных координатах

$$Q_\alpha \delta q_\alpha + \vec{F}_i^{in} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0. \quad (2.21)$$

Принцип Даламбера – Лагранжа является одним из наиболее общих вариационных принципов классической механики и может быть использован в качестве ее основной аксиомы. Так же, как и принцип Лагранжа в статике, он может быть обобщен на тот случай неидеальных связей, когда тангенциальные составляющие сил реакций  $\vec{T}_i$ , будучи известными (например, для сухого трения они выражаются через нормальные), включаются в набор заданных сил. С учетом таких заданных сил трения принцип Даламбера – Лагранжа принимает вид

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \vec{T}_i \delta \vec{r}_i + \vec{F}_i^{in} \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.22)$$

или в покомпонентной записи

$$F_i \delta x_i + T_i \delta x_i + F_i^{in} \delta x_i = 0. \quad (2.23)$$

## ВОПРОСЫ

1. Для каких механических систем справедлив вариационный принцип Лагранжа?
2. Как записывается принцип Лагранжа через вариации обобщенных координат?
3. Как определяется размерность и величина обобщенной силы?
4. В чем заключается физический смысл принципа Даламбера?
5. Для каких механических систем справедлив вариационный принцип Даламбера – Лагранжа?
6. Какой принцип является более общим, Лагранжа или Даламбера – Лагранжа?
7. Как записывается принцип Даламбера – Лагранжа через вариации обобщенных координат?

### III. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

#### 3.1. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Даламбера – Лагранжа

Из общего вариационного принципа Даламбера-Лагранжа следуют уравнения динамики механической системы в обобщенных координатах, называемые уравнениями Лагранжа. В силу принципиальной важности этих уравнений в аналитической механике, проведем их вывод одновременно в покомпонентном (слева) и векторном (справа) представлениях. Так как  $\vec{F}_i^{in} = -m_i \ddot{\vec{r}}_i$ , то принцип Даламбера – Лагранжа (2.21) записывается в виде (во втором слагаемом пришлось использовать знак суммы, т.к. индексы  $l$  и  $i$  входят в слагаемые трижды):

$$Q_\alpha \delta q_\alpha - \sum_{l=1}^{3N} m_l x_l \ddot{x}_l \delta q_\alpha = 0, \quad Q_\alpha \delta q_\alpha - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0. \quad (3.1)$$

Для дальнейших преобразований второго слагаемого в (3.1) получим предварительно несколько полезных соотношений. Расписывая полную производную по времени от любой координаты  $x_l = x_l(q_\beta, t)$  (вектора  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_\beta, t)$ ) м.т.

$$\dot{x}_l = \frac{\partial x_l}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial x_l}{\partial t}, \quad \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (3.2)$$

и дифференцируя ее по обобщенной скорости  $\dot{q}_\alpha$ , получаем ( $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера)

$$\frac{\partial \dot{x}_l}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial x_l}{\partial q_\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (3.3)$$

т.е. у производных  $\frac{\partial \dot{x}_l}{\partial \dot{q}_\alpha}$ ,  $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}$  можно убирать точки (полные производные по времени)

сверху и снизу одновременно.

Продифференцируем (3.2) по обобщенной координате  $q_\alpha$  ( $n=1, \dots, s$ )

$$\frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_\alpha \partial t}, \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} \quad (3.4)$$

и просто распишем полную производную по времени от частной производной декартовой координаты (вектора) м.т. по обобщенной координате

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 x_l}{\partial t \partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha}. \quad (3.5)$$

Правые части равенств (3.4), (3.5) совпадают (функции предполагаются достаточно гладкими, чтобы смешанные производные не зависели от порядка дифференцирования), следовательно, полную производную по времени и частную по обобщенной координате можно переставлять местами

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (3.6)$$

Перейдем теперь непосредственно к выводу уравнений движения Лагранжа. Преобразуем второе слагаемое в (3.1) используя (3.3), (3.6). Для покоординатной записи получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{3N} m_l \ddot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha &= \sum_{l=1}^{3N} m_l \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{x}_l \frac{d}{dt} \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = \sum_{l=1}^{3N} m_l \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_l \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \dot{x}_l \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3N} m_l \dot{x}_l^2}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3N} m_l \dot{x}_l^2}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha, \end{aligned}$$

где  $T$  – кинетическая энергия механической системы равная (индекс  $l$  повторяется дважды и знак суммы уже можно не писать)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3N} m_l \dot{x}_l^2 = \frac{1}{2} m_l \dot{x}_l^2. \quad (3.7)$$

Аналогично получаем такой же результат при векторной записи

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha = \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha, \end{aligned}$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2, \quad (3.8)$$

что, конечно, совпадает по величине с расчетом по формуле (3.7).

В итоге, подставляя в (3.1) результат расчета второго слагаемого, имеем

$$\left( Q_\alpha - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) \right) \delta q_\alpha = 0$$

и, так как вариации обобщенных координат  $\delta q_\alpha$  – независимы, то написанная сумма обращается в нуль лишь при нулевых коэффициентах при них. Откуда получаем систему уравнений движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha. \quad (3.9)$$

Так как при выводе уравнений Лагранжа использовались достаточно общие нестационарные преобразования координат (1.6), которые могут рассматриваться не только как переход к обобщенным координатам, но и как переход к другой системе отсчета, в общем случае неинерциальной, то замечательным оказывается тот факт, что вид этих уравнений один и тот же (в него явно не входят функции преобразования). Таким образом, мы получили уравнения движения инвариантные по отношению к выбору систем отсчета и переменных, описывающих конфигурацию СМТ (в частности, систем координат). Такой высокий уровень инвариантности делает уравнения Лагранжа весьма полезными при расчетах механических систем.

### 3.2. Уравнения Лагранжа для обобщенно - потенциальных сил

Если действующие на и в механической системе силы – потенциальны, то согласно (2.14)

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U(q_\beta, t)}{\partial q_\alpha} \quad (3.10)$$

и уравнения Лагранжа (3.9) записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

или, перенося все в левую часть и учитывая независимость потенциальной энергии от обобщенных скоростей

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_\alpha} = 0.$$

Из последнего соотношения видно, что поведение механической системы с потенциальными силами определяется разностью кинетической и потенциальной энергий, называемой функцией Лагранжа

$$L = L(\dot{q}_\alpha, q_\beta, t) = T - U. \quad (3.11)$$

Следовательно, уравнения Лагранжа в этом случае имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (3.12)$$

Как видно из вывода уравнений (3.12), они могут быть получены и в том случае, когда обобщенные силы определяются более общим соотношением, чем (3.10)

$$Q_\alpha = Q_\alpha(\dot{q}_\beta, q_\gamma, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U(\dot{q}_\beta, q_\gamma, t)}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial U(\dot{q}_\beta, q_\gamma, t)}{\partial q_\alpha}. \quad (3.13)$$

Это соотношение переходит в (3.10), когда введенная функция обобщенного потенциала  $U(\dot{q}_\beta, q_\gamma, t)$  не зависит от обобщенных скоростей  $U = U(q_\gamma, t)$ .

Таким образом, уравнения Лагранжа (3.12) и вид функции Лагранжа (3.11) остаются верными и для случая обобщенно-потенциальных сил. Как будет показано в следующем подразделе, обобщенный потенциал удастся построить для зависящих от скорости электромагнитных сил Лоренца и сил инерции, вводимых при рассмотрении неинерциальных систем отсчета. Вне описания в рамках уравнений (3.11) оказываются только диссипативные силы, рассеивающие механическую энергию, которые могут быть учтены обобщенными непотенциальными силами  $Q_\alpha^*$ . Как следует из (3.9) и вывода (3.12), в этом наиболее общем случае, уравнения Лагранжа записываются, как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^*. \quad (3.14)$$

### 3.3. Функции Лагранжа для различных механических систем

**Неоднозначность функции Лагранжа.** Прежде всего, отметим, что функция Лагранжа задается неоднозначно. Ее неоднозначность следует уже из того факта, что входящая в нее функция потенциальной энергии определена с точностью до константы. Однако неоднозначность задания функции Лагранжа этим не ограничивается. Легко видеть, что прибавление к ней полной производной по времени от любой функции координат и времени  $\chi(q_\alpha, t)$  не изменяет уравнений движения (3.14) (в частности, любой

функции времени  $\psi(t) = \dot{\chi}(t)$ ; считаем, что смешенные производные не зависят от порядка дифференцирования)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(L + \dot{\chi}(q_\beta, t))}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial(L + \dot{\chi}(q_\beta, t))}{\partial q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \left( L + \frac{\partial \chi}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \left( L + \frac{\partial \chi}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \\ &+ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \chi}{\partial q_\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) - \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta - \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_\alpha \partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial q_\alpha} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta - \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_\alpha \partial t} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}. \end{aligned}$$

**Структура функции Лагранжа.** Рассмотрим теперь структуру входящих в функцию Лагранжа обобщенного потенциала и кинетической энергии механической системы. Так как обобщенно-потенциальная сила не должна зависеть от ускорений, то, в соответствии с (3.13), обобщенный потенциал может быть лишь линейной функцией обобщенных скоростей (здесь и в дальнейшем числовые индексы у величин  $T, U$  означают максимальную степень обобщенной скорости, от которой зависит соответствующее слагаемое)

$$U = U(q_\gamma, \dot{q}_\gamma, t) = b_\alpha(q_\gamma, t) \dot{q}_\alpha + U_0(q_\gamma, t) = U_1 + U_0. \quad (3.15)$$

Общее выражение для кинетической энергии СМТ получается в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_l \dot{x}_l^2 = \frac{1}{2} m_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_l}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_l^{3N} m_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_l}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial x_l}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_l^{3N} m_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_l}{\partial q_\beta} \right) + \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha \sum_l^{3N} m_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_l}{\partial t} + \frac{1}{2} \dot{q}_\beta \sum_l^{3N} m_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\beta} \frac{\partial x_l}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_l^{3N} m_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_l^{3N} m_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_l}{\partial q_\beta} \right) + \dot{q}_\alpha \sum_l^{3N} m_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_l}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_l^{3N} m_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_\gamma, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + a_\alpha(q_\gamma, t) \dot{q}_\alpha + a(q_\gamma, t) = T_2 + T_1 + T_0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

или в векторном представлении

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \right) + \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha \sum_i^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial r_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \dot{q}_\beta \sum_i^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \frac{\partial r_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} \right) + \dot{q}_\alpha \sum_i^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial r_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_\gamma, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + a_\alpha(q_\gamma, t) \dot{q}_\alpha + a(q_\gamma, t) = T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned}$$

где введены обозначения для коэффициентов (коэффициенты  $a_{kn}(q, t)$  называются коэффициентами инерции механической системы):

$$\begin{aligned}
 a_{\alpha\beta}(q_\gamma, t) &= \sum_l^{3N} m_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_l}{\partial q_\beta} \right) = \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right), \\
 a_\alpha(q_\gamma, t) &= \sum_l^{3N} m_l \frac{\partial x_l}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_l}{\partial t} = \sum_i^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \\
 a(q_\gamma, t) &= \frac{1}{2} \sum_l^{3N} m_l \left( \frac{\partial x_l}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Таким образом, согласно (3.16), (3.17), в общем случае кинетическая энергия оказывается квадратичной функцией обобщенных скоростей, коэффициенты в которой зависят от обобщенных координат и времени. Легко видеть, что в случае стационарных связей кинетическая энергия становится уже однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими лишь от обобщенных координат (коэффициенты  $a_\alpha(q_\gamma, t)$ ,  $a(q_\gamma, t)$  зануляются)

$$T = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_\gamma) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = T_2. \tag{3.18}$$

Поскольку любая квадратичная форма приводится к диагональному виду, то при соответствующем выборе обобщенных координат кинетическая энергия записывается в виде суммы квадратов обобщенных скоростей умноженных на коэффициенты инерции

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s a_{\alpha\alpha}(q_\alpha) \dot{q}_\alpha^2. \tag{3.19}$$

Из полученных соотношений следует, что для механической системы с обобщенно-потенциальными силами при нестационарных связях функция Лагранжа имеет вид

$$L = L(\dot{q}_\gamma, q_\gamma, t) = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_\gamma, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + a_\alpha(q_\gamma, t) \dot{q}_\alpha + a(q_\gamma, t) - b_\alpha(q_\gamma, t) \dot{q}_\alpha - U_0(q_\gamma, t) = T_2 + T_1 + T_0 - U_1 - U_0.$$

Если же связи стационарны, а обобщенно-потенциальные силы не зависят явно от времени, то выражение для функция Лагранжа существенно упрощается

$$L = L(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_\gamma) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - b_\alpha(q_\gamma) \dot{q}_\alpha - U_0(q_\gamma) = T_2 - U_1 - U_0. \tag{3.20}$$

**Функция Лагранжа для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле.** Покажем, что к обобщенно-потенциальным сводятся электромагнитные силы, построив для них обобщенный потенциал. На м.т., имеющую заряд  $q_{el}$  и скорость  $\vec{V}$ , действует сила Лоренца  $\vec{F}_L$  равная (индексом  $el$  помечаются переменные, относящаяся к электромагнетизму, т.к. в нашем курсе механики некоторые из них обозначают другие физические величины)

$$\vec{F}_L = q_{el} \vec{E}_{el} + q_{el} [\vec{V}, \vec{B}_{el}], \quad \vec{E}_{el} = -grad(\varphi_{el}) - \frac{\partial \vec{A}_{el}}{\partial t}, \quad \vec{B}_{el} = rot(\vec{A}_{el}), \tag{3.21}$$

где  $\vec{E}_{el}$ ,  $\vec{B}_{el}$  – силовые характеристики электромагнитного поля (вектор напряженности электрического поля и вектор магнитной индукции, соответственно), а  $\varphi_{el}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}_{el}(\vec{r}, t)$  – его скалярный и векторный потенциалы. В качестве обобщенного потенциала может быть взята функция

$$U = q_{el} \varphi_{el} - q_{el} \vec{A}_{el} \vec{V}. \tag{3.22}$$

Докажем, что при таком выборе обобщенного потенциала верно определяется проекция на ось  $x$  силы Лоренца в соответствии с (3.21). Из (3.13), (3.22) получаем для  $x^{0й}$  составляющей электромагнитной силы Лоренца

$$\begin{aligned}
 F_{Lx} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (q_{el}\varphi_{el} - q_{el}(A_{elx}\dot{x} + A_{ely}\dot{y} + A_{elz}\dot{z}))}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial (q_{el}\varphi_{el} - q_{el}\vec{A}_{el}\vec{V})}{\partial x} = \\
 &= q_{el} \left( -\frac{dA_{elx}}{dt} - \frac{\partial \varphi_{el}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}_{el}}{\partial x} \vec{V} \right) = q_{el} \left( -\frac{\partial A_{elx}}{\partial t} - \frac{\partial A_{elx}}{\partial x} V_x - \frac{\partial A_{elx}}{\partial y} V_y - \frac{\partial A_{elx}}{\partial z} V_z - \frac{\partial \varphi_{el}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}_{el}}{\partial x} \vec{V} \right) \\
 &= q_{el} \left[ -\frac{\partial \varphi_{el}}{\partial x} - \frac{\partial A_{elx}}{\partial t} \right] + q_{el} \left[ V_y \left( \frac{\partial A_{ely}}{\partial x} - \frac{\partial A_{elx}}{\partial y} \right) + V_z \left( \frac{\partial A_{elz}}{\partial x} - \frac{\partial A_{elx}}{\partial z} \right) \right] = \\
 &= q_{el} \left[ -grad \varphi_{el} - \frac{\partial \vec{A}_{el}}{\partial t} \right]_x + q_{el} [\vec{V}, rot \vec{A}_{el}]_x = q_{el} E_{elx} + q_{el} [\vec{V}, \vec{B}_{el}]_x = F_{Lx}.
 \end{aligned}$$

Мы доказали, что  $x^{ая}$  составляющая электромагнитной силы может быть вычислена по соотношению (3.13) с обобщенным потенциалом (3.22). Для остальных проекций выкладки – аналогичны.

Теперь построение обобщенного потенциала для системы заряженных м.т., движущихся в электромагнитном поле, очевидно: просто надо просуммировать потенциалы (3.22) по всем м.т. механической системы. В итоге, функция Лагранжа для механической системы заряженных частиц во внешнем поле с потенциалами  $\varphi_{el}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}_{el}(\vec{r}, t)$  имеет вид

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i=1}^N q_{eli} \left( \varphi_{el}(\vec{r}_i, t) - \vec{A}_{el}(\vec{r}_i, t) \dot{\vec{r}}_i \right). \quad (3.23)$$

Конечно, построенная функция Лагранжа пригодна для описания механической системы заряженных частиц, собственным полем которых можно пренебречь по сравнению с заданным своими потенциалами внешним полем. В противном случае, необходимо уравнения движения механической системы дополнить уравнениями Максвелла для определения потенциалов электромагнитного поля, создаваемого всей системой зарядов (внешних, движение которых считается заданным, и принадлежащих системе, движение которых в общем электромагнитном поле рассчитывается в процессе решения задачи).

**Функция Лагранжа для неинерциальной системы отсчета.** Как уже отмечалось, уравнения Лагранжа сохраняют свой вид и в неинерциальных системах отсчета. Поэтому имеет смысл построение функции Лагранжа и для этого случая. Построим функцию Лагранжа для неинерциальной (штрихованной) системы отсчета, исходя ее вида в инерциальной системе отсчета (нештрихованной). Поскольку, как известно (см. часть I: Векторная механика), скорости в этих двух системах отсчета связаны соотношением

$$\vec{V}_i = \vec{V}'_i + \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'_i]$$

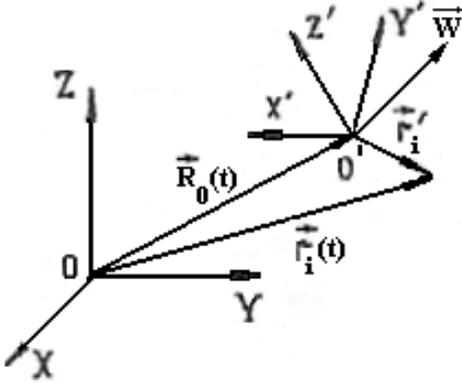
то для функции Лагранжа (3.11) имеем (слагаемые, зависящая только от времени, отбрасываются, т.к. функция Лагранжа определена с точностью до таких величин)

$$\begin{aligned}
 L &= T - U = \frac{1}{2} m_i V_i^2 - U(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} m_i \left( \vec{V}'_i + \vec{V}_0 + [\vec{W}, \vec{r}'_i] \right)^2 - U(\vec{r}'_i) = \\
 &= \frac{1}{2} m_i V_i'^2 + \frac{1}{2} m_i [\vec{W}, \vec{r}'_i]^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] + \left\{ \sum_{i=1}^N \left( m_i \vec{V}'_i + [\vec{W}, \vec{r}'_i] \right) \vec{V}_0 \right\} - U(\vec{r}'_i) = \quad (3.24) \\
 &= T' - \left( U(\vec{r}') - \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] - \frac{1}{2} m_i [\vec{W}, \vec{r}'_i]^2 + M \vec{A}_0 \vec{R}'_c \right) = T' - U'(\vec{V}'_i, \vec{r}'_i),
 \end{aligned}$$

где  $M$  – суммарная масса механической системы;  $\vec{R}'_c = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i / M$  – радиус - вектор центра масс в штрихованной системе координат;  $\vec{A}_0 = d\vec{V}_0 / dt$  – ускорение начала координат неинерциальной системы отсчета. При выводе (3.24) мы отбросили несущественные для  $L$  функцию времени  $M\vec{V}_0^2 / 2$  и полную производную от функции координат  $d / dt \left( \vec{V}_0 \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right)$ , учитывая, что выделенное в (3.24) фигурными скобками слагаемое представляется в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N m_i \left( \vec{V}'_i + [\vec{W}, \vec{r}'_i] \right) \vec{V}_0 = \sum_{i=1}^N m_i (d\vec{r}'_i / dt) \vec{V}_0 = \sum_{i=1}^N m_i (d\vec{r}'_i / dt) \vec{V}_0 = \\ & = \sum_{i=1}^N \left( m_i d / dt (\vec{r}'_i \vec{V}_0) - m_i \vec{r}'_i \vec{A}_0 \right) = d / dt \left( \vec{V}_0 \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) - \vec{A}_0 \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = d / dt \left( \vec{V}_0 \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) - M \vec{A}_0 \vec{R}'_c \end{aligned}$$

т.к. (см. часть I: Векторная механика)



$$d\vec{r}'_i / dt = \vec{V}'_i + [\vec{W}, \vec{r}'_i].$$

В качестве обобщенных координат СМТ мы можем выбрать переменные  $\vec{r}'_i$  (они связаны с декартовыми координатами  $\vec{r}_i$  преобразованиями вида (1.6)  $\vec{r}_i = \vec{r}'_i(\vec{r}'_i, t) = \vec{r}'_i + \vec{R}_0(t)$ ,  $\vec{R}_0(t)$  – текущий радиус - вектор начала координат штрихованной системы координат), где в них функция Лагранжа, как следует из (3.24), записалась в виде разности кинетической энергии в неинерциальной (штрихованной) системе отсчета и

обобщенного потенциала  $U'(\vec{V}'_i, \vec{r}'_i, t)$  (то, что это обобщенный потенциал следует из его линейности по скоростям). Поэтому полученную функцию  $L$  мы также можем считать функцией Лагранжа в неинерциальной системе координат  $L'$ , если там ввести обобщенный потенциал сил инерции по формуле

$$\begin{aligned} U'(\vec{V}'_i, \vec{r}'_i, t) &= U(\vec{r}'_i) - \sum_{i=1}^N \left( m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] - \frac{1}{2} m_i [\vec{W}, \vec{r}'_i]^2 + m_i \vec{r}'_i \vec{A}_0 \right) = \\ &= U(\vec{r}'_i) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] - \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} W'_\alpha W'_\beta + M \vec{A}_0 \vec{R}'_c, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}(\vec{r}'_i)$  – мгновенный тензор момента инерции СМТ, рассматриваемой как а.т.т. в штрихованной системе координат. В результате функция Лагранжа в неинерциальной системе отсчета записывается в виде (конечно, эти равенства написаны с точностью до слагаемых несущественных для функции Лагранжа):

$$L' = L = T - U = T' - U'(\vec{V}'_i, \vec{r}'_i, t) = T' - \left( U(\vec{r}'_i) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}'_i [\vec{W}, \vec{r}'_i] - I_{\alpha\beta} W'_\alpha W'_\beta + M(\vec{R}'_c, \vec{A}_0) \right). \quad (3.26)$$

Таким образом, мы показали, что обобщенным потенциалом описываются электромагнитные взаимодействия (а также и гравитационные, для которых достаточно введения лишь скалярного потенциала  $\varphi_{gr}(\vec{r}, t)$ ) и силы инерции. Это расширяет область применения уравнений Лагранжа (3.12) и функции Лагранжа (3.11) на все представляющие интерес для классической механики (построение потенциала ядерных сил сталкивается с принципиальными трудностями, да и законы классической механики в

масштабах проявления слабых и сильных взаимодействий не применимы) фундаментальные силы природы и неинерциальные системы отсчета.

### **ВОПРОСЫ**

1. Какой вариационный принцип может быть положен в основу классической механики?
2. В каком случае уравнения Лагранжа применимы при наличии в механической системе сил трения?
3. В чем заключается физический смысл неоднозначности функции Лагранжа? С точностью до какой функции она определена?
4. Какое свойство электромагнитных сил позволяет построить для них обобщенный потенциал, несмотря на то, что эти силы зависят от скорости?
5. В каком случае кинетическая энергия является однородной квадратичной формой обобщенных координат?
6. Ковариантны ли уравнения Лагранжа по отношению к переходу в неинерциальную систему отсчета?
7. Почему ядерные силы, как правило, не рассматриваются в рамках классической механики, хотя они относятся к фундаментальным?

#### IV. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Из второго и третьего законов Ньютона могут быть получены (см. часть I: Векторная механика) законы сохранения энергии, импульса и момента импульса системы свободных м.т. Поскольку уравнения Лагранжа являются обобщением законов Ньютона на механические системы со связями, то из них также следуют законы сохранения так называемых обобщенных энергий и импульсов (в обобщенных координатах в некотором смысле теряется разница между импульсом и моментом импульса, соответственно, закон сохранения момента импульса, вообще говоря, не проявляется в качестве независимого).

##### 4.1. Закон сохранения обобщенной энергии

Умножим каждое из уравнений Лагранжа (3.12) для обобщенно-потенциальных сил на соответствующую обобщенную скорость и просуммируем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) - \left[ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right] = 0. \quad (4.1)$$

Так как

$$\frac{dL}{dt} = \left[ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{или} \quad \left[ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right] = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t},$$

то из (4.1) имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

или, вводя обобщенную энергию, по формуле

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L, \quad (4.2)$$

получаем соотношение, определяющее изменение обобщенной энергии механической системы с обобщенно-потенциальными силами

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует **закон сохранения обобщенной энергии: если функция Лагранжа механической системы с обобщенно-потенциальными силами не зависит явно от времени, то обобщенная энергия сохраняется**

$$E(q_k, \dot{q}_k) = const. \quad (4.4)$$

Рассмотрим теперь частный, но практически важный случай стационарных потенциальных сил и связей (в этом случае механическая система называется консерватив-

ной), когда (кинетическая энергия не зависит явно от времени также в силу стационарности связей)

$$L(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) = T(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) - U(q_\gamma).$$

Поскольку функция Лагранжа явно не зависит от времени, то обобщенная энергия консервативной механической системы сохраняется. Найдем его вид. При стационарных связях, как показано в подразделе 3.3, кинетическая энергия оказывается однородной квадратичная функция координат и для нее справедливо соотношение (используется возможность заменять немые индексы любыми другими, пробегающими те же значения)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( T(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) \right)}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha &= \frac{1}{2} \frac{\partial \left( a_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma \right)}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = \frac{1}{2} \left( a_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\beta} \dot{q}_\gamma + a_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \delta_{\alpha\gamma} \right) \dot{q}_\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left( a_{\alpha\gamma} \dot{q}_\gamma \dot{q}_\alpha + a_{\beta\alpha} \dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha \right) = a_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma = 2T. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Используя (4.5), получаем для консервативной механической системы

$$E(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L = \frac{\partial \left( T(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) \right)}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - T + U = 2T - T + U = T + U. \quad (4.6)$$

Таким образом, для консервативных механических систем сохраняется полная механическая энергия (полной механической энергией называется сумма потенциальной и кинетической энергий системы)

$$T(\dot{q}_k, q_k) + U(q_k) = const. \quad (4.7)$$

В общем случае обобщенно-потенциальных сил обобщенная энергия имеет вид:

$$E(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L = 2T_2 + T_1 - U_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - U_1 - U_0) = T_2 - T_0 + U_0. \quad (4.8)$$

Из (4.3), (4.8) в случае стационарных сил и связей ( $\partial L / \partial t = 0, T_0 = 0$ ) получаем закон сохранения обобщенной энергии: в механической системе со стационарными обобщенно-потенциальными силами и связями обобщенная энергия сохраняется:

$$E(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) = T_2 + U_0 = const. \quad (4.9)$$

Отметим, что при этих же условиях полная механическая энергия

$$T_2(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) + U_1(\dot{q}_\gamma, q_\gamma) + U_0(q_\gamma)$$

уже не сохраняется (за счет непостоянства  $U_1(\dot{q}_\gamma, q_\gamma)$ ), поэтому именно обобщенную энергию следует отождествлять в достаточно общем случае с сохраняющейся физической величиной.

#### 4.2. Закон сохранения обобщенного импульса

Кроме закона сохранения обобщенной энергии из уравнений Лагранжа могут быть получены и другие интегралы движения, в частности, закон сохранения обобщенного импульса. Вводя по определению обобщенный импульс  $p_\alpha$ , как частную производную от функции Лагранжа по обобщенной скорости

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (4.10)$$

уравнения (3.12) запишем в виде

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}. \quad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что если нам удастся так выбрать обобщенные координаты, что функция Лагранжа окажется независимой от некоторых из них, то с каждой из этих координат, называемых циклическими, связан интеграл движения (**закон сохранения обобщенного импульса**): в отсутствие диссипативных сил для циклической координаты  $q_\alpha$  | сохраняется соответствующий ей обобщенный импульс

$$p_\alpha | = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} | = const. \quad (4.12)$$

Отметим, что обобщенные импульсы в случае обобщенно-потенциальных сил рассчитываются по соотношениям

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (4.13)$$

и отличаются от обычного импульса даже в СМТ без связей ( $s = 3N$ ), когда за обобщенные координаты приняты компоненты радиус-векторов м.т. ( $\vec{p}_i^{nor} = m_i \dot{\vec{r}}_i$  | -обычный импульс м.т.)

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (m_j \dot{\vec{r}}_j^2)}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i | - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \vec{p}_i^{nor} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}. \quad (4.14)$$

### 4.3. Законы сохранения как следствия симметрий пространства-времени

Уравнения Лагранжа оказываются полезными и для исследования систем свободных м.т. В частности, применительно к таким СМТ из уравнений Лагранжа наглядно следует взаимосвязь законов сохранения с пространственно-временными симметриями.

Так следствием однородности времени является **закон сохранения полной механической энергии**. Пусть мы имеем консервативную (силы – потенциальны и стационарны:  $U = U_0(q_\gamma)$ ), обобщенные координаты  $q_\gamma$  – не обязательно декартовы, их тоже  $3N$ , но система координат может быть любой) СМТ без связей. Тогда для нее функция Лагранжа не зависит от времени явно и это, очевидно, обусловлено его однородностью во времени. Кроме того, вследствие отсутствия связей  $T = T_2(q_\gamma, \dot{q}_\gamma)$  и, следовательно, обобщенная механическая энергия

$$E(q_\gamma, \dot{q}_\gamma) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L = 2T_2 - (T_2 - U_0) = T_2 + U_0$$

совпадает с полной механической энергией  $T + U = T_2 + U_0$ . Поскольку в соответствии с (4.3) при выполнении условия  $\partial L / \partial t = 0$  сохраняется обобщенная энергия, то отсюда следует **закон сохранения полной механической энергии (она совпадает с обобщенной энергией в этом частном случае) для консервативной СМТ без наложенных связей**

$$T + U = T_2 + U_0 = E(q_k, \dot{q}_k) = const.$$

**Закон сохранения импульса замкнутой системы свободных точек** следует из **однородности пространства**. Произведем сдвиг СМТ в пространстве как единого целого, придав бесконечно малое приращение  $\delta \vec{r}$  радиус-векторам всех м.т.  $\vec{r}_i$ . Тогда функция Лагранжа замкнутой СМТ получит приращение, которое в силу однородности

пространства должно быть нулевым (если СМТ – незамкнута, то изменится расстояние до источников внешних сил и уже будет  $\delta L \neq 0$ ):

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) \delta \vec{r} = 0.$$

Так как независимое приращение  $\delta \vec{r}$  в СМТ может быть любыми, то из последнего соотношения следует

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0. \quad (4.15)$$

Записывая уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

и суммируя их с учетом (4.15), получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) = 0, \quad (4.16)$$

и из соотношений (4.16) следует **закон сохранения суммарного импульса замкнутой СМТ без связей:**

$$\vec{P}_\Sigma = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = const.$$

Аналогично показывается, что **закон сохранения момента импульса замкнутой системы свободных м.т. следует из предположения об изотропности пространства.** Произведем поворот СМТ в пространстве как единого целого на малый угол  $\delta \vec{\varphi}$ . Тогда радиус-вектора и скорости всех м.т. получают приращения

$$\delta \vec{r}_i = [\delta \vec{\varphi}, \vec{r}_i], \quad \delta \dot{\vec{r}}_i = [\delta \vec{\varphi}, \dot{\vec{r}}_i]$$

и нулевое изменение функция Лагранжа замкнутой СМТ запишется в виде

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} [\delta \vec{\varphi}, \vec{r}_i] + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} [\delta \vec{\varphi}, \dot{\vec{r}}_i] = \left( [\vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}] + [\dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}], \delta \vec{\varphi} \right) = 0.$$

Поскольку бесконечно-малый угол поворота  $\delta \vec{\varphi}$  – произвольный, то из последнего соотношения следует

$$\left[ \vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right] + \left[ \dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right] = 0$$

или, так как из уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right),$$

то

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right] = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно закону сохранения суммарного момента импульса  $\vec{L}_\Sigma$  замкнутой СМТ без связей относительно неподвижного полюса (через этот полюс проходит ось поворота на угол  $\delta \vec{\varphi}$ ):

$$\vec{L}_\Sigma = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = const.$$

## **ВОПРОСЫ**

1. При каких условиях выполняется закон сохранения обобщенной энергии?
2. Как связана обобщенная энергия с функцией Лагранжа и от каких переменных она зависит?
3. Какой закон сохранения более общий: полной механической энергии или обобщенной энергии механической системы?
4. Что такое циклическая координата? Как она связана с законами сохранения?
5. В каком смысле в аналитической механике пропадает различие между законами сохранения импульса и момента импульса в механической системе?
6. Как законы сохранения связаны с пространственно-временными симметриями?
7. Могут ли выполняться законы сохранения суммарных импульсов и моментов импульсов в случае, когда механическая система не замкнута? Если могут, то при каких условиях?

## V. РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

В настоящем разделе рассматриваются различные наиболее употребительные представления уравнений динамики механической системы.

### 5.1. Канонические уравнения Гамильтона

В основе подхода (формализма) Лагранжа к получению уравнений движения механической системы в обобщенных координатах лежит использование функции Лагранжа. Известен и другой метод составления уравнений движения на основе функции Гамильтона. Соответствующий подход называется гамильтоновым формализмом.

Уравнения Лагранжа представляют собой систему  $s$  уравнений движений второго порядка каждое, т.е. систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка  $2s$ . Под канонической системой уравнений понимается система уравнений, каждое из которых первого порядка, и они разрешены относительно производных по времени от искомых функций. Таким образом, для получения уравнений движения в каноническом виде нам необходимо к  $s$  искомым функциям – обобщенным координатам – добавить еще  $s$  функций и для этой совокупности переменных составить каноническую систему  $2s$  уравнений. Вполне понятно, что выбор искомых функций и приведение к нормальному виду системы уравнений движения могут быть проведены множеством способов. Рядом преимуществ, особенно при рассмотрении общих вопросов механики, обладает описание в переменных  $(q_\alpha, p_\alpha)$ . При этом состояние системы задается точкой  $(q_\gamma, p_\gamma)$  в так называемом фазовом пространстве размерностью  $2s$  (при лагранжевом подходе состояние задавалось точкой  $(q_\gamma)$  в  $s$ -мерном пространстве конфигураций). Уравнения движения в переменных фазового пространства могут быть получены из уравнений Лагранжа переходом от переменных  $(q_\gamma, \dot{q}_\gamma)$  к переменным  $(q_\gamma, p_\gamma)$ . Наиболее просто такой переход реализуется путем выписывания дифференциалов некоторых функций (в нашем случае лагранжиана и гамильтониана) в соответствующих переменных.

Полный дифференциал функции Лагранжа от времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей имеет вид

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.1)$$

Преобразуем это соотношение, используя определение обобщенного импульса (4.10) и уравнения Лагранжа (4.11), к переменным  $(q_\gamma, p_\gamma)$

$$dL = \dot{p}_\alpha dq_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{p}_\alpha dq_\alpha + d(p_\alpha \dot{q}_\alpha) - \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или

$$d(p_\alpha \dot{q}_\alpha - L) = -\dot{p}_\alpha dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

откуда, вводя функцию Гамильтона, как функцию переменных фазового пространства  $(q_\gamma, p_\gamma)$

$$H = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \Big|_{\dot{q}_\beta = \dot{q}_\beta(q_\gamma, p_\gamma)} = H(q_\gamma, p_\gamma),$$

получаем

$$dH = -\dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.2)$$

Введенная функция Гамильтона является обобщенной энергией, но в переменных фазового пространства  $(q_\gamma, p_\gamma)$

$$H = H(q_\gamma, p_\gamma) = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \Big|_{q_\beta = q_\beta(q_\gamma, p_\gamma)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L \Big|_{q_\beta = q_\beta(q_\gamma, p_\gamma)} = E \Big|_{q_\beta = q_\beta(q_\gamma, p_\gamma)}.$$

Из (5.2) следуют **каноническая система уравнений движения Гамильтона**:

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \\ \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{cases} \quad (5.3)$$

и соотношение для частных производных по времени от функций Лагранжа и Гамильтона

$$\left( \frac{\partial L}{\partial t} \right)_{q_\gamma, \dot{q}_\gamma} = - \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{q_\gamma, p_\gamma}. \quad (5.4)$$

Отметим, что в преобразованиях от соотношения (5.1) к (5.2) время играло роль параметра, не имеющего прямого отношения к замене переменных  $(q_\gamma, \dot{q}_\gamma) \rightarrow (q_\gamma, p_\lambda)$ , поэтому и для любого другого параметра  $\lambda$ , характеризующего свойства механической системы или действующего на нее внешнего силового поля имеем соотношение аналогичное (5.4)

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{q_\gamma, \dot{q}_\gamma} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{q_\gamma, p_\gamma}. \quad (5.5)$$

Из первой половины уравнений системы (5.3) и уравнений Лагранжа (4.11) также получаем связь между производными функций Лагранжа и Гамильтона по обобщенным координатам

$$\left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right)_{p_\gamma} = - \dot{p}_\alpha = - \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right)_{\dot{q}_\gamma},$$

т.е.

$$\left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right)_{p_\gamma} = - \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right)_{\dot{q}_\gamma}. \quad (5.6)$$

Из уравнений Гамильтона также как и из уравнений Лагранжа следуют законы сохранения обобщенных импульсов и энергии. В соответствии с (5.6) наряду с условием

$$\left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right)_{\dot{q}_\gamma} = 0$$

циклическую координату можно определить и как обобщенную координату, для которой

$$\left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right)_{p_\gamma} = 0. \quad (5.7)$$

Тогда согласно (5.7) и первой половины уравнений системы (5.3) для циклической координаты  $q_\alpha$  сохраняется обобщенный импульс.

$$p_\alpha = \text{const.}$$

Аналогично, при условии отсутствия явной зависимости функции Гамильтона от времени

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{q_\gamma, p_\gamma} = 0,$$

из (5.4) следует, что наряду с закон сохранения обобщенной энергии (4.3) выполняется и закон сохранения функции Гамильтона (это один и тот же закон сохранения, но в разных переменных)

$$E(q_\gamma, \dot{q}_\gamma) = H(q_\gamma, p_\gamma) = const. \quad (5.8)$$

При выводе канонических уравнений Гамильтона (5.3) мы исходили из уравнений Лагранжа для обобщенно потенциальных сил. Если учитывать диссипативные силы (система уравнений Лагранжа (3.14)), то в правые части уравнений Гамильтона для производных по времени от обобщенных импульсов войдут обобщенные силы  $Q_\alpha^*$

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^*, \\ \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \end{cases} \quad (5.9)$$

## 5.2. Скобки Пуассона

Рассмотрим некоторую функцию переменных фазового пространства и времени  $f(q_\gamma, p_\gamma, t)$ . Сформулируем условие, при которых эта функция сохраняется с течением времени, т.е. является интегралом движения. Для этого, используя уравнения Гамильтона (5.3), найдем ее полную производную по времени, обращаясь для интегралов движения в ноль

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5.10)$$

В соотношение (5.10) введены операторные скобки Пуассона  $\{ \}$ , которые для любых функций переменных фазового пространства и времени (а также любых других параметров)  $f(q_\gamma, p_\gamma, t)$ ,  $g(q_\gamma, p_\gamma, t)$  означают следующий дифференциальный оператор

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}. \quad (5.11)$$

Скобки обладают следующими свойствами, которые легко получаются из их определения (5.11) ( $c = const$ ,  $f, g, h$  – функции канонических переменных и времени):

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\}, \quad \{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}, \quad \{h, f + g\} = \{h, f\} + \{h, g\}, \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + g\{f, h\}, \quad \{h, fg\} = f\{h, g\} + g\{h, f\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\{f, c\} = \{c, f\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}, \quad \{f, q_\alpha\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}, \quad \{f, p_\alpha\} = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}.$$

Из последних двух соотношений следуют формулы для фундаментальных скобок Пуассона, когда в качестве функций служат переменные фазового пространства:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.13)$$

Также эти соотношения позволяют записать уравнения Гамильтона (5.3) в симметричном (без знака минуса и в записи каждого уравнения лишь один вид переменной фазового пространства) виде

$$\begin{cases} \dot{p}_\alpha = \{H, p_\alpha\}, \\ \dot{q}_\alpha = \{H, q_\alpha\}. \end{cases}$$

Наконец, для двойных скобок выполняется **тождество Якоби**:

$$\{f\{g, h\}\} + \{g\{h, f\}\} + \{h\{f, g\}\} + = 0. \quad (5.14)$$

С помощью скобок Пуассона описываются инвариантные свойства механических систем, т.е. свойства, не зависящие от выбора канонических переменных. В частности, из (5.10) следует, что для того, чтобы  $f(q_\alpha, p_\alpha, t)$  была интегралом движения СМТ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\{H, f\} = -\frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5.15)$$

В том случае, когда интеграл движения явно не зависит от времени условия (5.15) просто сводится к равенству нулю скобок Пуассона

$$\{H, f\} = 0. \quad (5.16)$$

Важным свойством операторных скобок Пуассона, позволяющим в некоторых случаях получать новые интегралы движения, является тот факт (**теорема Пуассона**), что, если мы имеем два закона сохранения  $f(q_\gamma, p_\gamma, t) = const$ ,  $g(q_\gamma, p_\gamma, t) = const$ , то сохраняется и их скобка Пуассона:

$$\{f, g\} = const. \quad (5.17)$$

Сохранение  $\{f, g\}$  следует из (5.10) и тождества Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{H\{f, g\}\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} = \\ &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\}\right\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} = \{0, g\} + \{f, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Конечно, применяя теорему Пуассона, мы не всегда будем получать новые интегралы движения, поскольку, в противном случае, их бы было бесконечно много, а их всего  $2s - 1$  (общее число интегралов движения равно числу констант, получающихся после интегрирования систем уравнений движения, минус единица; так как система уравнений имеет порядок  $2s$ , то и число констант равно этой величине, а уменьшение числа констант на единицу связано с возможностью изменения начала отсчета времени на любую константу). В некоторых случаях получаются тривиальные результаты: константа или функция исходных интегралов движения  $F(f, g)$ . Однако, если это не имеет места, то скобки Пуассона дают новый закон сохранения.

В заключение отметим, что гамильтонов формализм играет важную роль в квантовой механике, в частности, фундаментальные скобки Пуассона (скобки Пуассона от самих канонических переменных) оказываются квантово-механическим аналогом перестановочных соотношений Гейзенберга.

### 5.3. Принцип экстремальности действия Гамильтона

Уравнения движения для механической системы со связями в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа) ранее были получены из принципа виртуальных перемещений Даламбера-Лагранжа. Однако эти уравнения могут быть получены и из общего принципа экстремальности действия Гамильтона (иногда его называют принципом Остроградского-Гамильтона), играющего существенную роль не только в механике, но и во всей физике, так как применим и для систем с бесконечным числом степеней свободы, в частности, полей фундаментальных сил природы.

Рассмотрим движение системы, положение которой на моменты времени  $t = t_1, t_2$  характеризуется определенными точками в конфигурационном пространстве  $q_\gamma^{(1)}, q_\gamma^{(2)}$ .

Поведение системы однозначно задается ее функцией Лагранжа  $L(q_\gamma, \dot{q}_\gamma, t)$ . Действие  $S$  (размерность этой физической величины – «энергия  $\times$  время») между фиксированными

точками  $q_\gamma^{(1)}$ ,  $q_\gamma^{(2)}$  определим, как функционал (функционалом называется оператор, ставящий в соответствие функции или набору функций число; для отличия функции от функционала круглые скобки в функционале заменяются на квадратные)

$$S = S[q_\gamma(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\gamma(t), \dot{q}_\gamma(t), t) dt. \quad (5.18)$$

В конфигурационном пространстве все возможные (виртуальные) движения механической системы из точки  $q_\gamma^{(1)}$  до  $q_\gamma^{(2)}$  представляются набором кривых, проходящих через эти точки и окружающих траекторию истинного движения. В качестве критерия для выделения траектории истинного движения механической системы в конфигурационном пространстве может служить **принцип Гамильтона: из всех возможных движений, переводящих систему из положения  $q_\gamma^{(1)}$  при  $t = t_1$  в положение  $q_\gamma^{(2)}$  при  $t = t_2$  в действительности реализуется то, для которого действие – экстремально**

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_\gamma, \dot{q}_\gamma, t) dt = 0. \quad (5.19)$$

Покажем, что из принципа Гамильтона следуют уравнения Лагранжа, а значит и вся классическая механика. Вычислим вариацию действия, интегрируя по частям (используется, что операции вариации и полной производной – перестановочны и концы траектории в конфигурационном пространстве – фиксированы:  $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$ )

$$\begin{aligned} \delta S[q_\gamma(t)] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_\gamma, \dot{q}_\gamma, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\gamma + \delta q_\gamma, \dot{q}_\gamma + \delta(\dot{q}_\gamma), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_\gamma, \dot{q}_\gamma, t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( L(q_\gamma + \delta q_\gamma, \dot{q}_\gamma + \delta(\dot{q}_\gamma), t) - L(q_\gamma, \dot{q}_\gamma, t) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta(\dot{q}_\alpha) \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d(\delta q_\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt \end{aligned}$$

Из полученного выражения для вариации и принципа экстремальности действия (5.19) находим

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = 0,$$

откуда в силу независимости и произвольности вариаций  $\delta q_\alpha$  следуют уравнения Лагранжа (3.12).

В формулировке принципа Гамильтона действие  $S$  определялось как функционал от виртуальных траекторий в конфигурационном пространстве с фиксированными начальными и конечными точками. Рассмотрим теперь действие как функцию конечных обобщенных координат действительных траекторий механической системы с фиксированной при  $t = t_1$  начальной точкой  $q_\alpha^{(1)}$  и переменной конечной точкой  $q_\alpha$  на момент времени  $t$ . Тогда действие может рассматриваться как функция  $s+1$  переменной

$S = S(q_\gamma, t)$ . Так как на траектории действительного движения выполняются уравнения Лагранжа, то теперь вариация действия при фиксированном  $t$  равняется:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^t + \int_{t_1}^t \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = p_\alpha \delta q_\alpha.$$

Из полученного соотношения следует, что

$$p_\alpha = \left( \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \right)_t. \quad (5.20)$$

Используя (5.20), получаем полную производную действия по времени

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial S}{\partial t} + p_\alpha \dot{q}_\alpha. \quad (5.21)$$

Но с другой стороны по самому определению действия

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_1}^t L(q_\gamma, \dot{q}_\gamma, t) dt = L. \quad (5.22)$$

и, сравнивая (5.21), (5.22), находим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dt} - p_\alpha \dot{q}_\alpha = L - p_\alpha \dot{q}_\alpha = - \left( p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \right) = -H. \quad (5.23)$$

Таким образом, из (5.20), (5.23) следует, что полный дифференциал действия как функции координат и времени конечной точки траектории записывается в виде:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial S}{\partial t} dt = p_\alpha dq_\alpha - H dt. \quad (5.24)$$

Исходя из (5.24) и сам принцип Гамильтона об экстремальности действия можно записать как требование равенства нулю вариации

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dS = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_\alpha dq_\alpha - H dt) = 0. \quad (5.25)$$

при независимом варьировании обобщенных координат и импульсов. Покажем, что из этого требования следуют канонические уравнения Гамильтона. Теперь у нас траектории рассматриваются в фазовом пространстве (при выводе уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона использовалось конфигурационное пространство) с фиксированными концами по обобщенным координатам ( $\delta q_\alpha = 0$ )

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dS = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_\alpha dq_\alpha - H dt) = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_\alpha \dot{q}_\alpha - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_\alpha \delta p_\alpha + p_\alpha \delta(\dot{q}_\alpha) - \delta H) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_\alpha \delta p_\alpha dt + \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha d(\delta q_\alpha) - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) dt + \\ &+ p_\alpha \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_\alpha \delta q_\alpha dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) \delta p_\alpha - \left( \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right) dt. \end{aligned}$$

Приравнявая, согласно (5.25), полученную вариацию действия нулю и учитывая, что вариации  $\delta q_\alpha, \delta p_\alpha$  – независимы и произвольны, получаем систему канонических уравнений Гамильтона (5.3).

#### 5.4. Вариационный принцип Мопертюи

Принцип Гамильтона об экстремальности действия на действительных траекториях полностью описывает поведение механической системы. Однако, если ограничится более узкой задачей поиска лишь траекторий движения (абстрагироваться от временной

части задачи), то принцип упрощается. Предположим, что функция Лагранжа, а значит, согласно (5.4), и функция Гамильтона явно не зависят от времени и, следовательно, выполняется закон сохранения обобщенной энергии (индекс  $c$  означает константу этой физической величины)

$$E(q_\gamma, \dot{q}_\lambda) = H(q_\gamma, p_\gamma) = H_c = const.$$

Зафиксируем начальные и конечные точки траекторий, а также время начала движения, варьируя лишь временем прихода механической системы в конечную точку, тогда

$$\delta S = -H \delta t$$

или, если рассматривать только вариации удовлетворяющие закону сохранения функции Гамильтона, то

$$\delta S + H_c \delta t = 0. \tag{5.26}$$

Согласно (5.24) имеем

$$S = \int_{t_1}^t dS = \int_{t_1}^t (p_\alpha dq_\alpha - H dt) = \int_{t_1}^t p_\alpha dq_\alpha - H_c (t - t_1). \tag{5.27}$$

Входящий в (5.27) первый член

$$S_0 = \int_{t_1}^t p_\alpha dq_\alpha \tag{5.28}$$

называется укороченным действием. Подставив (5.27) в (5.26), получаем принцип экстремальности укороченного действия

$$\delta S_0 = \delta \int_{t_1}^t p_\alpha dq_\alpha = 0. \tag{5.29}$$

Для того, чтобы с помощью этого принципа определять траектории механических систем, необходимо обобщенные импульсы, входящие в подинтегральное выражение (5.29), выразить через обобщенные координаты и их приращения. Найдем из закона сохранения обобщенной энергии

$$E(q_\gamma, \dot{q}_\gamma) = H_c$$

дифференциал времени  $dt$  и подставим его в определение обобщенного импульса (4.10)

$$p_\alpha = \frac{\partial L(q_\gamma, \dot{q}_\gamma)}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

В итоге определяется требуемое выражение для обобщенных импульсов. Получающийся описанным образом вариационный принцип для укороченного действия называется принципом Мопертюи.

Найдем для принципа Мопертюи явный вид укороченного действия для механической системы с потенциальными силами (стационарность сил и связей была предположена ранее, когда постулировалась явная независимость функции Лагранжа от времени). В этом случае обобщенная энергия совпадает с полной механической энергией и из закона сохранения

$$T(q_\gamma, \dot{q}_\gamma) + U(q_\gamma) = E(q_\gamma, \dot{q}_\gamma) = H_c$$

определяем  $dt$  :

$$\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_\gamma) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + U(q_\gamma) = H_c \rightarrow dt = \sqrt{\frac{a_{\alpha\beta}(q_\gamma) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta}{2(H_c - U)}}.$$

Теперь находим подынтегральное выражение в укороченном действии (5.28)

$$p_\alpha dq_\alpha = \frac{\partial L(q_\gamma, \dot{q}_\gamma)}{\partial \dot{q}_\alpha} dq_\alpha = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} a_{\beta\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma \right)}{\partial \dot{q}_\alpha} dq_\alpha = \frac{a_{\alpha\beta}(q_\gamma) dq_\alpha dq_\beta}{dt} = \sqrt{2(H_c - U(q_\gamma))} a_{\alpha\beta}(q_\gamma) dq_\alpha dq_\beta$$

Таким образом, для консервативной механической системы со стационарными связями принцип Мопертюи записывается в виде (очевидно, что в вариационном принципе на множитель  $\sqrt{2}$  можно сократить)

$$\delta \int_{t_1}^t \sqrt{(H_c - U(q_\gamma))} a_{\alpha\beta}(q_\gamma) dq_\alpha dq_\beta = 0. \quad (5.30)$$

### 5.5. Канонические преобразования

Вид уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат (конфигурационного пространства), т.е. эти уравнения инвариантны к преобразованиям (новые переменные фазового пространства будем обозначать теми же буквами, но заглавными)

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_\gamma, t). \quad (5.31)$$

Наряду с уравнениями Лагранжа не меняют своего вида при преобразованиях (5.31) и полученные из них уравнения Гамильтона. Одним из преимуществ гамильтонова формализма является тот факт, что последние допускают более широкий класс преобразований (замен переменных), поскольку в фазовом пространстве независимыми переменными являются и обобщенные импульсы

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q_\gamma, p_\gamma, t), \\ P_\alpha = P_\alpha(q_\gamma, p_\gamma, t). \end{cases} \quad (5.32)$$

Однако теперь уже не при всех видах преобразований (5.32) уравнения Гамильтона сохраняют свой канонический вид. Получим условия, при которых переход к новым переменным фазового пространства (5.32) в уравнениях Гамильтона (5.3) приводит опять к каноническому виду:

$$\begin{cases} \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}, \\ \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha} \end{cases}$$

с новой функцией Гамильтона  $H^* = H^*(Q_\gamma, P_\gamma, t)$ . Такие преобразования называются каноническими.

Условия каноничности преобразований (5.32) можно получить из вариационного принципа Гамильтона. Как в новых, так и в старых переменных, если выполняются уравнения Гамильтона, то справедлив и принцип экстремальности действия (5.25):

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_\alpha dq_\alpha - H dt) = 0, \quad (5.33)$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (P_\alpha dQ_\alpha - H^* dt) = 0. \quad (5.34)$$

Но два принципа (5.33) и (5.34) эквивалентны тогда, когда подынтегральные функции отличаются на полный дифференциал произвольной функции обобщенных координат (старых и новых) и времени  $F = F(q_\gamma, Q_\gamma, t)$

$$dF = p_\alpha dq_\alpha - H dt - P_\alpha dQ_\alpha + H^* dt = p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha + (H^* - H) dt. \quad (5.35)$$

Сравнивая (5.35) с формулой для полного дифференциала

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} dQ_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

получаем искомые канонические преобразования, порождаемые производящей функцией  $F = F(q_\gamma, Q_\gamma, t)$

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}, \quad H^* = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (5.36)$$

Конечно, производящие функции могут быть заданы и в других переменных (всего 4 варианта:  $(q_\gamma, Q_\gamma, t)$ ,  $(q_\gamma, P_\gamma, t)$ ,  $(p_\gamma, Q_\gamma, t)$ ,  $(p_\gamma, P_\gamma, t)$ ). Получим формулы аналогичные формулам (5.36) (с точностью до знака) для производящей функции в других переменных  $\Phi = \Phi(q_\gamma, P_\gamma, t)$  (эти преобразования нам понадобятся при рассмотрении уравнения Гамильтона – Якоби). Преобразуем соотношение (5.35), используя тождество  $P_\alpha dQ_\alpha = d(P_\alpha Q_\alpha) - Q_\alpha dP_\alpha$

$$dF = p_\alpha dq_\alpha - d(P_\alpha Q_\alpha) + Q_\alpha dP_\alpha + (H^* - H) dt,$$

откуда

$$d(F + P_\alpha Q_\alpha) = p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (H^* - H) dt$$

и, обозначая  $\Phi = F + P_\alpha Q_\alpha$ , получаем дифференциал в требующихся нам переменных  $(q_\gamma, P_\gamma, t)$ .

$$d\Phi = p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha + (H^* - H) dt.$$

Сравнивая это соотношение с формулой для полного дифференциала

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha} dP_\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt,$$

получаем искомые канонические преобразования, порождаемые производящей функцией  $\Phi = \Phi(q_\gamma, P_\gamma, t)$

$$p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha}, \quad H^* = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5.37)$$

Из этих двух примеров канонических преобразований, порождаемых производящими функциями, следует, что: производные по прописным переменным дают ответствующие (импульс дает координату, а координата – импульс) прописные переменные, по заглавным – заглавные; разность  $H^* - H$  всегда определяется частной производной по времени и, если производящая функция от него не зависит явно, то функции Гамильтона в старых и новых переменных совпадают.

Допуская столь широкий класс канонических преобразований, мы лишаем группы переменных  $q_\alpha$  и  $p_\alpha$  их первоначального смысла и физического различия. Так, например, преобразование  $Q_\alpha = p_\alpha$ ,  $P_\alpha = -q_\alpha$  (производящая функция  $F = F(q_\alpha, Q_\alpha) = q_\alpha Q_\alpha$ ), не меняя канонического вида уравнений, просто сводится к взаимному переименованию координат и импульсов. Для того чтобы подчеркнуть неразличимость групп переменных  $q_\alpha$  и  $p_\alpha$  фазового пространства их называют канонически сопряженными величинами. Условия канонической сопряженности (условия, которым должны удовлетворять новые переменные для обеспечения каноничности преобразования) могут быть сформулированы с помощью операторных скобок Пуассона:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{p_\gamma, q_\gamma} = 0, \quad \{P_\alpha, P_\beta\}_{p_\gamma, q_\gamma} = 0, \quad \{P_\alpha, Q_\beta\}_{p_\gamma, q_\gamma} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.37)$$

Равенства (5.37) следуют из инвариантности скобок Пуассона к каноническим преобразованиям и соотношений (5.13)

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{p_\gamma, q_\gamma} = \{Q_\alpha, Q_\beta\}_{P_\gamma, Q_\gamma} = 0, \quad \{P_\alpha, P_\beta\}_{p_\gamma, q_\gamma} = \{P_\alpha, P_\beta\}_{P_\gamma, Q_\gamma} = 0, \quad \{P_\alpha, Q_\beta\}_{p_\gamma, q_\gamma} = \{P_\alpha, Q_\beta\}_{P_\gamma, Q_\gamma} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Инвариантность скобок Пуассона при канонических преобразованиях доказывается прямыми вычислениями с использованием выражений канонических преобразований через производящие функции.

### 5.6. Уравнение Гамильтона – Якоби

Рассматривая действие как функцию координат и времени, мы получили соотношение (5.23), которое может быть записано в виде (использованы соотношения (5.20)), называемом уравнением Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_\gamma, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t) = 0. \quad (5.38)$$

Наряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнения Гамильтона, уравнение Гамильтона – Якоби также может быть положено в основу описания поведения механической системы. Однако, в отличие от предыдущих способов описания движения, соотношение (5.38) представляет не систему обыкновенных дифференциальных уравнения порядка  $2s$ , а уравнение в частных производных первого порядка.

Рассмотрим, как, зная полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби (5.38), найти решение уравнений движения (зависимости обобщенных координат от времени). Полный интеграл уравнения (5.38) содержит столько же констант, сколько в нем независимых переменных, т.е. в нашем случае  $s + 1$

$$S = \Phi(t, q_\gamma, C_\gamma) + C, \quad (5.39)$$

где  $C_\gamma, C - s + 1$  произвольных констант.

Произведем каноническое преобразование от переменных  $q_\alpha, p_\alpha$  к переменным  $Q_\alpha, P_\alpha$ , причем в качестве производящей функции возьмем функцию  $\Phi = \Phi(t, q_\gamma, C_\gamma)$ , а систему констант  $C_\gamma$  примем за новые обобщенные импульсы. Тогда (последнее соотношение получено в силу (5.38)):

$$p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial C_\alpha}, \quad H^* = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0. \quad (5.40)$$

В силу тождественного равенства нулю функции Гамильтона в новых канонических переменных имеем для них следующие канонические уравнения Гамильтона ( $P_\alpha = C_\alpha$ ):

$$\dot{C}_\alpha = 0, \quad \dot{Q}_\alpha = 0,$$

откуда

$$C_\alpha = const, \quad (5.41)$$

$$Q_\alpha = const. \quad (5.42)$$

Система уравнений (5.41) констатирует тот уже известный (предполагаемый) факт, что  $C_\alpha -$  множество констант. Но согласно (5.42) и множество обобщенных координат  $Q_\alpha -$  также являются постоянными. Это позволяет, используя второе множество соотношений в (5.40), выразить неявным образом зависимости  $q_\alpha = q_\alpha(t)$  через  $2s$  констант  $Q_\gamma, C_\gamma$

$$Q_\alpha = \frac{\partial \Phi(t, q_\gamma(t), C_\gamma)}{\partial C_\alpha}. \quad (5.43)$$

Таким образом, находя полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби  $S = \Phi(t, q_\gamma, C_\gamma)$  (аддитивная константа  $C$  в данном случае при дифференцировании исчезает и может быть положена равной нулю), дифференцируя его по  $s$  констант  $C_\alpha$  и приравнивая результаты дифференцирования новым  $s$  константам  $Q_\alpha$ , получаем систему нелинейных уравнений (5.43), позволяющих определить обобщенные координаты, как функции времени и  $2s$  констант  $Q_\gamma, C_\gamma$

$$q_\alpha = q_\alpha(t, Q_\gamma, C_\gamma).$$

В свою очередь, это множество констант определяется из  $2s$  начальных условий (начальных значений обобщенных координат и скоростей).

### ВОПРОСЫ

1. Какие различные представления законов динамики механических систем вы знаете?
2. Сформулируйте принцип экстремальности действия Гамильтона при движении механической системы.
3. Какой из вариационных принципов более общий: Гамильтона или Мопертюи?
4. Выведите из принцип экстремальности действия Гамильтона системы уравнений Лагранжа и Гамильтона.
5. Дайте определение скобок Пуассона. Сформулируйте их свойства и теорему Пуассона. Запишите уравнения Гамильтона, используя скобки Пуассона.
6. Какие преобразования называются каноническими? Почему уравнения Гамильтона допускают более широкие классы преобразований по сравнению с уравнениями Лагранжа?
7. Получить два не рассмотренных варианта канонических преобразований с производящими функциями в переменных  $(p_\gamma, Q_\gamma, t)$  и  $(p_\gamma, P_\gamma, t)$ .
8. Как из полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби получить закон движения механической системы? Какие принципиальные трудности могут при этом возникнуть?

## VI. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Ранее нами изучались (см. часть I: Векторная механика) малые колебания консервативных систем с одной степенью свободы. Теперь мы имеем возможность рассмотреть малые колебания механических систем с любым конечным числом степеней свободы.

### 6.1. Свободные колебания

Пусть консервативная механическая система со стационарными связями совершает малые свободные колебания около устойчивого положения равновесия. Для малых колебаний отклонения обобщенных координат  $q_\alpha$  от их значений в положении равновесия  $q_{\alpha 0}$ , равные

$$x_\alpha = q_\alpha - q_{\alpha 0},$$

– также малы и, раскладывая в ряд Тейлора потенциальную энергию  $U(q_\alpha)$  с учетом, что в положении равновесия обобщенные силы равны нулю  $Q_\alpha = -\partial U / \partial q_\alpha = 0$ , с точностью до членов второго порядка получаем ее в виде однородной положительно определенной (положительная определенность следует, очевидно, из условия минимума  $U(q_\alpha)$  в положении устойчивого равновесия) квадратичной формы ( $U(q_{\gamma 0}) = 0$ , т.к. отсчитываем потенциальную энергию от положения равновесия)

$$U(q_\gamma) \approx U(q_{\gamma 0}) + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} (q_\alpha - q_{\alpha 0}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} (q_\alpha - q_{\alpha 0})(q_\beta - q_{\beta 0}) = \frac{1}{2} k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (6.1)$$

где  $k_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}$  – матрица констант упругих сил. В случае стационарных связей кинетическая энергия также оказывается однородной положительно определенной квадратичной формой обобщенных скоростей

$$T = T_2 = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_\gamma) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \approx \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}(q_{\gamma 0}) \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta, \quad (6.2)$$

где  $m_{\alpha\beta}$  – матрица коэффициентов инерции.

Таким образом, при стационарных связях функция Лагранжа консервативной системы, совершающей малые колебания около устойчивого положения равновесия, представляет собой разность двух однородных положительно определенных квадратичных форм обобщенных отклонений  $x_\alpha$  и скоростей  $\dot{x}_\alpha$

$$L = T - U = T_2 - U_0 = \frac{1}{2} (m_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta - k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta). \quad (6.3)$$

По построенной функции Лагранжа (6.3) составим теперь систему уравнений Лагранжа (3.12):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (6.4)$$

Требующиеся для этого частные производные от функции Лагранжа имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} \left( \frac{1}{2} m_{\beta\gamma} \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma \right) = \frac{1}{2} \left( m_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\beta} \dot{x}_\gamma + m_{\beta\gamma} \dot{x}_\beta \delta_{\alpha\gamma} \right) = m_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta, \\ \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} &= -\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{2} k_{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma \right) = -\frac{1}{2} \left( k_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\beta} x_\gamma + k_{\beta\gamma} x_\beta \delta_{\alpha\gamma} \right) = -k_{\alpha\beta} x_\beta. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из (6.4), (6.5) получаем уравнения малых свободных колебаний консервативной механической системы с  $s$  степенями свободы

$$m_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + k_{\alpha\beta} x_\beta = 0. \quad (6.6)$$

Это система  $s$  обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждое из уравнений имеет второй порядок и, следовательно, порядок всей системы  $2s$ .

В соответствии с общей методикой решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищем решение (6.6) в виде ( $i = \sqrt{-1}$ )

$$x_\beta = C_\beta e^{i\omega t}, \quad (6.7)$$

где  $C_\beta$  – множество пока неопределенных  $s$  постоянных;  $\omega$  – одна из возможных круговых частот собственных колебаний механической системы. Подставляя (6.7) в (6.6), получаем систему однородных линейных уравнений порядка  $s$

$$(-\omega^2 m_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}) C_\beta = 0. \quad (6.8)$$

Как известно, для существования ненулевого решения однородной линейной системы уравнений требуется равенство нулю ее определителя

$$\|k_{\alpha\beta} - \omega^2 m_{\alpha\beta}\| = 0. \quad (6.9)$$

Это, так называемое характеристическое уравнение, представляет собой алгебраическое уравнение степени  $s$  относительно квадрата собственной частоты свободных колебаний  $\omega^2$ . Вещественность и положительность корней уравнения (6.9) очевидна по физическому смыслу, т.к. в противном случае частота оказывается с неравной нулю мнимой частью, приводящей к экспоненциально возрастающим или убывающим со временем решениям, которые, очевидно, противоречат выполняющемуся в консервативных системах закону сохранения полной механической энергии.

Тем не менее, докажем это и непосредственно из системы уравнений (6.8). Предположим противное:  $\omega^2$  – комплексное число. Тогда и  $C_\alpha$  могут быть комплексными числами. Умножим (6.8) на  $\bar{C}_\alpha$  (черточка сверху означает комплексно-сопряженную величину) и просуммируем по всем уравнениям

$$(-\omega^2 m_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}) C_\beta \bar{C}_\alpha = 0,$$

откуда получаем

$$\omega^2 = \frac{k_{\alpha\beta} C_\beta \bar{C}_\alpha}{m_{\alpha\beta} C_\beta \bar{C}_\alpha}. \quad (6.10)$$

Числитель и знаменатель этой дроби вещественны в силу вещественности и симметричности коэффициентов  $k_{\alpha\beta}$  и  $m_{\alpha\beta}$ . Например, для знаменателя имеем (последнее равенство следует из того факта, что индексы по которым ведется суммирование могут быть любыми):

$$\overline{(k_{\alpha\beta} C_\beta \bar{C}_\alpha)} = k_{\alpha\beta} \bar{C}_\beta C_\alpha = k_{\beta\alpha} \bar{C}_\beta C_\alpha = k_{\beta\alpha} C_\alpha \bar{C}_\beta = k_{\alpha\beta} C_\beta \bar{C}_\alpha,$$

т.е. сопряженная величина равна самой величине, а это верно только для действительных чисел. Следовательно, вещественной оказывается и дробь. Мы получили противо-

речие: предположили  $w^2$  – комплексное число, а получили, что  $w^2$  – действительное число, значит предположение – неверно. Положительность  $w^2$  следует из положительной определенности входящих в нее квадратичных форм:

$$w^2 = \frac{k_{\alpha\beta} C_\beta \bar{C}_\alpha}{m_{\alpha\beta} C_\beta \bar{C}_\alpha} = \frac{k_{\alpha\beta} (\operatorname{Re}(C_\beta) + \operatorname{Im}(C_\beta)i)(\operatorname{Re}(C_\alpha) - \operatorname{Im}(C_\alpha)i)}{m_{\alpha\beta} (\operatorname{Re}(C_n) + \operatorname{Im}(C_n)i)(\operatorname{Re}(C_k) - \operatorname{Im}(C_k)i)} =$$

$$= \frac{k_{\alpha\beta} \operatorname{Re}(C_\beta) \operatorname{Re}(C_\alpha) + k_{\alpha\beta} \operatorname{Im}(C_\beta) \operatorname{Im}(C_\alpha)}{m_{\alpha\beta} \operatorname{Re}(C_\beta) \operatorname{Re}(C_\alpha) + m_{\alpha\beta} \operatorname{Im}(C_\beta) \operatorname{Im}(C_\alpha)} > 0.$$

После определения частот  $w_\gamma$  (этих частот  $s$ , т.к. отрицательные частоты, получающиеся при извлечении корня, не имеют физического смысла) из характеристического уравнения (6.9) для каждой из них находится набор констант  $C_\alpha(w_\gamma)$ , удовлетворяющих линейной системе уравнений (6.8). Как известно, если корни характеристического уравнения различны, то эти константы пропорциональны соответствующим минорам определителя (6.9) при значениях  $w = w_\gamma$ . Обозначив эти миноры через  $\Delta_{\alpha\gamma}$ , получаем набор (для каждой собственной частоты  $w_\gamma$  свое решение) частных решений  $x_\alpha = C_\alpha(w_\gamma)e^{iw_\gamma t} = \Delta_{\alpha\gamma}e^{iw_\gamma t}$  и общее решение, представляющее собой линейную комбинацию частных решений

$$x_\alpha = \sum_{\gamma=1}^s A_\gamma \Delta_{\alpha\gamma} e^{iw_\gamma t} = \sum_{\gamma=1}^s |A_\gamma| \Delta_{\alpha\gamma} e^{i(w_\gamma t + \varphi_\gamma)}, \quad (6.11)$$

где  $A_\gamma = |A_\gamma|e^{i\varphi_\gamma}$  – произвольные комплексные константы, определяющиеся из начальных условий. Переходя к вещественной части, получаем общий вид решения системы уравнений малых свободных колебаний (6.6)

$$x_\alpha = \sum_{\gamma=1}^s |A_\gamma| \Delta_{\alpha\gamma} \cos(w_\gamma t + \varphi_\gamma) = \Delta_{\alpha\gamma} \xi_\gamma, \quad (6.12)$$

в который входят в соответствии с порядком этой системы  $2s$  констант ( $|A_\gamma|$  и  $\varphi_\gamma$ ).

В соответствии с (6.12) изменение каждой обобщенной координаты  $x_\alpha$  представляет собой суперпозицию (наложение)  $s$  простых гармонических колебаний  $\xi_\gamma(t) = |A_\gamma| \cos(w_\gamma t + \varphi_\gamma)$  различных собственных частот с произвольными амплитудами и фазами. Рассматривая (6.12) как связь между обобщенными координатами  $x_\alpha$  и  $\xi_\gamma$  и разрешая их относительно новых координат  $\xi_\gamma$ , получаем, что для них уже решение распадается на  $s$  простых гармонических колебаний, описываемых уравнениями

$$\ddot{\xi}_\gamma + w_\gamma^2 \xi_\gamma = 0. \quad (6.13)$$

Так построенные и обладающие такими свойствами обобщенные координаты называются нормальными или главными. Как видно из (6.13) ускорение каждой нормальной координаты зависит лишь от нее самой. Соответственно, и для определения ее временной зависимости (определения амплитуды и начальной фазы), необходимы лишь начальные координаты и скорости только ее самой же, т.е. все нормальные колебания механической системы полностью независимы друг от друга.

Поскольку система уравнений малых колебаний (6.6) в нормальных координатах распадается на независимые уравнения (6.12), то достаточно очевидно, что функция Лагранжа в этом случае представляет собой сумму функций Лагранжа для колебаний механической системы с одной степенью свободы и частотами  $w_\gamma$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^s \left( \left( \dot{\xi}_{\gamma} \right)^2 - w_{\gamma}^2 \xi_{\gamma}^2 \right). \quad (6.14)$$

Сравнение (6.3) и (6.14) показывает, что переходом к нормальным обобщенным координатам удастся обе квадратичные формы (кинетической и потенциальной энергий) одновременно привести к диагональному виду (это соответствует теореме о возможности одновременного приведения двух квадратичных форм к диагональному виду, если хотя бы одна из них положительно определена).

Случай кратных частот отличается незначительно. Решение также имеет вид (6.12) (степенных временных множителей не возникает из тех же энергетических соображений, которые приводились ранее для обоснования отсутствия экспоненциально возрастающих или убывающим со временем решений), однако коэффициенты  $\Delta_{\alpha\gamma}$  для кратных частот  $w_{\gamma}$  уже не являются соответствующими минорами, т.к. последние оказываются равными нулю. Каждой кратной частоте соответствует число нормальных координат равное кратности, и их выбор становится неоднозначным.

### 6.2. Свободные колебания с трением

В соответствии с (3.14) уравнения Лагранжа для малых колебаний механических систем с диссипативными силами трения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha}} = Q_{\alpha}^*. \quad (6.15)$$

В случае линейной зависимости этих сил от скоростей имеем

$$Q_{\alpha}^* = -\alpha_{\alpha\beta} \dot{x}_{\beta}, \quad (6.16)$$

где набор коэффициентов  $\alpha_{\alpha\beta}$  представляет собой симметричную матрицу (доказательство этого факта выходит за рамки механики)

$$\alpha_{\alpha\beta} = \alpha_{\beta\alpha}. \quad (6.17)$$

Из (6.16), (6.17) следует, что обобщенные силы трения могут быть записаны в виде частных производных по обобщенным координатам

$$Q_{\alpha}^* = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \quad (6.18)$$

от квадратичной формы (так называемой диссипативной функции)

$$D = \frac{1}{2} \alpha_{\alpha\beta} \dot{x}_{\alpha} \dot{x}_{\beta}. \quad (6.19)$$

Введенной функцией диссипации определяется интенсивность рассеивания обобщенной энергии

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \dot{x}_{\alpha} - L \right) = \ddot{x}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} + \dot{x}_{\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \right) - \ddot{x}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} - \dot{x}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha}} = \\ &= \dot{x}_{\alpha} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha}} \right) = -\dot{x}_{\alpha} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{\alpha}} = -\dot{x}_{\alpha} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \left( \alpha_{\beta\gamma} \dot{x}_{\beta} \dot{x}_{\gamma} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \dot{x}_{\alpha} \left( \alpha_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\beta} \dot{x}_{\gamma} + \alpha_{\beta\gamma} \dot{x}_{\beta} \delta_{\alpha\gamma} \right) = -\frac{1}{2} \left( \alpha_{\alpha\gamma} \dot{x}_{\gamma} \dot{x}_{\alpha} + \alpha_{\beta\alpha} \dot{x}_{\beta} \dot{x}_{\alpha} \right) = -\alpha_{\alpha\beta} \dot{x}_{\alpha} \dot{x}_{\beta} = -2D. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Поскольку силы диссипации могут приводить лишь к уменьшению обобщенной энергии, то из (6.20) следует положительная определенность квадратичной формы (6.19) для диссипативной функции  $D$ .

Подставляя (6.18) в (6.15), получаем систему уравнений Лагранжа для малых колебаний механических систем с трением

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (6.21)$$

где в качестве функции Лагранжа по-прежнему служит разностью двух положительно определенных форм (6.3). Подставляя (6.3) в (6.21), получаем систему уравнений малых колебаний с трением

$$m_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + \alpha_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + k_{\alpha\beta} x_\beta = 0, \quad (6.22)$$

которые отличаются от уравнений (6.6) без трения лишь силами (6.16).

Решение (6.22) ищем в виде

$$x_\alpha = C_\alpha e^{\lambda t}.$$

В результате получаем характеристическое уравнение

$$\| m_{\alpha\beta} \lambda^2 + \alpha_{\alpha\beta} \lambda + k_{\alpha\beta} \| = 0. \quad (6.23)$$

Так как в алгебраическом уравнении (6.23) порядка  $2s$  все коэффициенты – действительные, то его решения – собственные значения  $\lambda$  – могут быть либо вещественными, либо комплексно сопряженными. Вещественные решения и вещественные части комплексно сопряженных решений должны быть обязательно отрицательными, поскольку в противном случае полная механическая энергия возрастала бы со временем, что противоречит (6.20) и физически обоснованному предположению о положительной определенности диссипативной функции  $D$ .

### 6.3. Вынужденные колебания

Введением нормальных обобщенных координат вынужденные колебания для механических систем с  $s$  степенями свободы сводятся к рассмотрению  $s$  одномерных вынужденных колебаний. Функция Лагранжа в нормальных координатах  $\xi_\alpha$  с учетом действующих внешних сил  $F_\alpha(t)$  записывается в виде:

$$L = L_{free} + F_\alpha(t) x_\alpha = \sum_{\gamma=1}^s (\dot{\xi}_\gamma^2 - w_\gamma^2 \xi_\gamma^2) + f_\gamma(t) \xi_\gamma,$$

где  $L_{free}$  – функция Лагранжа для свободных колебаний, а  $f_\alpha(t)$  – обобщенные силы в нормальных координатах

$$f_\gamma(t) = F_\alpha(t) \Delta_{\alpha\gamma}.$$

Соответственно система уравнений движения распадется на  $s$  независимых колебательных движений каждой из нормальных координат  $\xi_\gamma$

$$\ddot{\xi}_\gamma + w_\gamma^2 \xi_\gamma = f_\gamma(t). \quad (6.24)$$

При вынужденных колебаниях с трением переход к нормальным координатам в общем случае оказывается невозможным вследствие неприводимости к диагональному виду одновременно трех квадратичных форм (кинетической и потенциальной энергий, диссипативной функции). Однако в некоторых частных случаях такое приведение оказывается реализуемым. Например, если коэффициенты функции диссипации оказываются пропорциональными инерционным коэффициентам (так называемый случай внешнего демпфирования)

$$\alpha_{\alpha\beta} = 2\chi m_{\alpha\beta}$$

или коэффициентам квадратичной формы потенциальной энергии (так называемый случай внутреннего демпфирования)

$$\alpha_{\alpha\beta} = 2\eta k_{\alpha\beta},$$

то переход к нормальным координатам возможен, и система уравнений движения распадается на  $s$  полностью независимых колебательных процессов с различным (в случае внутреннего демпфирования) для каждой из нормальных координат коэффициентом трения

$$\ddot{\xi}_\gamma + 2\mu_\gamma \dot{\xi}_\gamma + w_\gamma^2 \xi_\gamma = f_\gamma(t), \quad (6.25)$$

где  $\mu_\gamma \equiv \chi$  – для внешнего демпфирования и  $\mu_\gamma = \eta w_\gamma^2$  – для внутреннего демпфирования.

Отметим, что модели внутреннего и внешнего демпфирования существенно проще общего случая, и вполне естественным представляется принятие этих моделей в качестве рабочих на начальном этапе исследований механических систем с неизвестными диссипативными свойствами.

## **ВОПРОСЫ**

1. Почему при малых свободных колебаниях без трения в окрестности устойчивого равновесия у консервативной механической системы всегда существуют собственные частоты колебаний?
2. Что такое нормальные обобщенные координаты? Почему переход к ним всегда возможен и как найти соотношения для перехода от произвольных обобщенных координат к нормальным?
3. Может ли при малых свободных колебаниях механической системы с трением, описываемым диссипативной функцией, возрастать или оставаться постоянной обобщенная энергия?
4. Почему при вынужденных колебаниях с трением переход к нормальным координатам в общем случае оказывается невозможным? В каких случаях он возможен?
5. В чем физический смысл моделей внешнего и внутреннего демпфирования? Почему их использование упрощает исследование вынужденных колебаний с учетом трения?

## VII. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Проектирование любой механической системы включает в себя, как один из основных элементов, ее расчет, т.е. решение системы уравнений движения и (или) равновесия (далее для движения и равновесия будем употреблять единый термин – поведение системы). В то же время параметры конкретной реализации этой системы неизбежно имеют отклонения от значений, закладываемых в ее численную модель, в пределах некоторых допусков, которые также должны быть определены на стадии разработки конструкции. Кроме того, при эксплуатации механическая система подвергается воздействию нагрузок, содержащих случайную компоненту, также, как правило, не учитываемую при расчетах в силу ее малости по сравнению с основными действующими силами. Однако несмотря на малость, случайное воздействие может оказаться причиной, вызывающей существенные для рассматриваемой задачи отклонения решения от полученного в первоначальной постановке без учета малых возмущающих факторов. В связи с изложенным, дополнительно к изучению поведения механической системы должно проводиться исследование его устойчивости, гарантирующее допустимо малые изменения получаемых решений при достаточно малых возмущениях параметров конструкции, действующих сил и начальных условий (в случае исследования устойчивости движения).

### 7.1. Определение и критерии устойчивости

Система уравнений Лагранжа (3.14), разрешенная относительно вторых производных обобщенных координат, имеет вид:

$$\ddot{q}_\alpha = Y_\alpha(\dot{q}_\gamma, q_\gamma, t). \quad (7.1)$$

Для получения из (7.1) однозначного решения требуются начальные условия, задающие обобщенные координаты и скорости в некоторый момент времени  $t_0$  (далее считаем  $t_0 = 0$ ; точка сверху у  $q_\alpha^0$  не означает в этом случае дифференцирования по времени, это просто удобное обозначение для набора констант – начальных значений обобщенных скоростей):

$$q_\alpha|_{t=0} = q_\alpha^0, \quad \dot{q}_\alpha|_{t=0} = \dot{q}_\alpha^0. \quad (7.2)$$

Интегрируя (7.1) с начальными условиями (7.2), получаем решение уравнений движения

$$q_\alpha = q_\alpha(t, q_\gamma^0, \dot{q}_\gamma^0). \quad (7.3)$$

Именно это решение (называемое невозмущенным), выбор которого также является частью постановки задачи (он – неоднозначен, т.к. определяется целью исследований и используемой математической моделью), и исследуется на устойчивость.

Исследование устойчивости поведения механической системы, вообще говоря, требует рассмотрения представительного набора существенно различных возмущающих факторов, приводящих к изменениям начальных условий (7.2) и правых частей системы уравнений (7.1), а в некоторых случаях и к смене ее порядка (если возмущающие факторы изменяют число степеней свободы). Однако в такой постановке задача оказывается необозримой и приходится становиться на наивную, но вынужденную точку зрения, заключающуюся в том, что достаточным является исследование устойчивости к некоторому весьма ограниченному набору возмущающих факторов, которые, по мнению разработчика механической системы, могут наиболее сильно повлиять на ее пове-

дение. Далее для простоты изложения в качестве возмущающего фактора рассматривается только изменение начальных условий (7.2), при котором поведение системы уже будет описываться новыми возмущенными решениями системы (7.1) (все возмущенные величины помечаются сверху волной)

$$\tilde{q}_\alpha = \tilde{q}_\alpha(t, \tilde{q}_\gamma^0, \dot{\tilde{q}}_\gamma^0). \quad (7.4)$$

Разность этих решений называется отклонением

$$\Delta_\alpha(t) = \tilde{q}_\alpha(t, \tilde{q}_\gamma^0, \dot{\tilde{q}}_\gamma^0) - q_\alpha(t, q_\gamma^0, \dot{q}_\gamma^0), \quad \dot{\Delta}_\alpha(t) = \dot{\tilde{q}}_\alpha(t, \tilde{q}_\gamma^0, \dot{\tilde{q}}_\gamma^0) - \dot{q}_\alpha(t, q_\gamma^0, \dot{q}_\gamma^0).$$

В начальный момент времени эти отклонения определяются возмущением начальных условий (как уже отмечалось, точка над задаваемыми начальными константами  $\dot{\tilde{q}}_\alpha^0, \dot{\Delta}_\alpha^0$  не означает дифференцирования по времени, а лишь напоминает, что это начальное значение обобщенной скорости или ее изменения)

$$\Delta_\alpha(0) = \Delta_\alpha^0 = \tilde{q}_\alpha^0 - q_\alpha^0, \quad \dot{\Delta}_\alpha(0) = \dot{\Delta}_\alpha^0 = \dot{\tilde{q}}_\alpha^0 - \dot{q}_\alpha^0. \quad (7.5)$$

В качестве меры отклонения удобно принять расстояние между точками конфигурационного пространства (а также пространства обобщенных скоростей), изображающими положение механической системы в заданные моменты времени

$$\|\Delta_\gamma\| = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^s (\tilde{q}_\alpha - q_\alpha)^2}, \quad \|\dot{\Delta}_\gamma\| = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^s (\dot{\tilde{q}}_\alpha - \dot{q}_\alpha)^2}. \quad (7.6)$$

Основной вопрос теории устойчивости заключается в возможности задания возмущающих отклонений в таких пределах (размерах допусков), чтобы отклонения в решениях не превышали наперед заданных значений. В соответствии с этим и делается **определение устойчивости поведения системы по Ляпунову: если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\dot{\varepsilon} > 0$  найдутся такие  $\delta(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) > 0$  и  $\dot{\delta}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) > 0$ , что при**

$$\|\Delta_\gamma^0\| < \delta, \quad \|\dot{\Delta}_\gamma^0\| < \dot{\delta}$$

**для всех  $t > 0$  выполняются неравенства:**

$$\|\Delta_\gamma\| < \varepsilon, \quad \|\dot{\Delta}_\gamma\| < \dot{\varepsilon},$$

**то поведение системы – устойчиво.**

Если поведение системы не обладает свойством устойчивости, то оно – неустойчиво. Дадим определение неустойчивости, формулируя свойство поведения системы противоположное данному в определении ее устойчивости (математическая логика учит, что для этого надо слова «любые» и «все» заменить на «существуют» и «найдутся» и наоборот, а также изменить знаки в неравенствах для норм отклонений решения; ну и, конечно, немножко подумав, отредактировать получившееся утверждение). Тогда получим **определение неустойчивости поведения системы по Ляпунову: если существуют такие  $\varepsilon > 0$  и  $\dot{\varepsilon} > 0$ , что для любых  $\delta > 0$  и  $\dot{\delta} > 0$ , несмотря на то, что**

$$\|\Delta_\gamma^0\| < \delta, \quad \|\dot{\Delta}_\gamma^0\| < \dot{\delta},$$

**найдется такое  $t > 0$ , что окажется справедливым хотя бы одно из неравенств:**

$$\|\Delta_\gamma(t)\| > \varepsilon, \quad \|\dot{\Delta}_\gamma(t)\| > \dot{\varepsilon},$$

**то поведение системы – неустойчиво.**

Определение устойчивости говорит лишь о том, что нормы отклонений в поведении системы можно сделать сколь угодно малыми, но из него не следует, что постепенно система «забудет» про ее возмущение и опять устремится к своему невозмущенному поведению при  $t \rightarrow \infty$ . Поскольку такое стремление не гарантирует устойчивости (при не слишком больших  $t$  нормы отклонений могут быть велики), то требование устойчивости также должно быть оставлено для таких устойчиво себя ведущих при больших временах систем. В результате получаем **определение асимптотической устойчивости поведения системы по Ляпунову: устойчивое поведение системы называется асимптотически устойчивым, если дополнительно выполняются предельные соотношения**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| \Delta_\gamma(t) \| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \dot{\Delta}_\gamma(t) \right\| = 0.$$

Исследование устойчивости удобнее проводить, анализируя поведение входящих в ее определение отклонений  $\Delta_\alpha(t), \dot{\Delta}_\alpha(t)$ . Так как возмущенное решение также удовлетворяют системе уравнений движения

$$\ddot{\tilde{q}}_\alpha = Y_\alpha(\tilde{q}_\gamma, \dot{\tilde{q}}_\gamma, t) \tag{7.7}$$

и начальным условиям

$$\tilde{q}_\alpha \Big|_{t=0} = \tilde{q}_\alpha^0, \quad \dot{\tilde{q}}_\alpha \Big|_{t=0} = \dot{\tilde{q}}_\alpha^0, \tag{7.8}$$

то, вычитая (7.1) из (7.7) и (7.2) из (7.8), получаем формулировку задачи об устойчивости системы в отклонениях:

$$\begin{aligned} \ddot{\Delta}_\alpha &= Y_\alpha(\dot{q}_\gamma(t) + \dot{\Delta}_\gamma, q_\gamma(t) + \Delta_\gamma, t) - Y_\alpha(\dot{q}_\gamma(t), q_\gamma(t), t), \\ \Delta_\alpha \Big|_{t=0} &= \Delta_\alpha^0, \quad \dot{\Delta}_\alpha \Big|_{t=0} = \dot{\Delta}_\alpha^0. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (7.9) в общем случае сложна для исследований, и дальнейшим упрощением является ее линеаризация, которая получается при учете лишь линейных членов по отклонениям  $\Delta_n, \dot{\Delta}_n$  в разложении в ряд Тейлора функций  $Y_\alpha(\dot{q}_\gamma + \dot{\Delta}_\gamma, q_\gamma + \Delta_\gamma, t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\Delta}_\alpha + d_{\alpha\beta}(\dot{q}_\gamma(t), q_\gamma(t), t) \dot{\Delta}_\beta + f_{\alpha\beta}(\dot{q}_\gamma(t), q_\gamma(t), t) \Delta_\beta &= 0, \\ d_{\alpha\beta} &= -\frac{\partial Y_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta}, \quad f_{\alpha\beta} = -\frac{\partial Y_\alpha}{\partial q_\beta}, \\ \Delta_\alpha \Big|_{t=0} &= \Delta_\alpha^0, \quad \dot{\Delta}_\alpha \Big|_{t=0} = \dot{\Delta}_\alpha^0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Рассмотрим частный случай консервативной системы со стационарными связями и линейными силами диссипации. Тогда линеаризованные около положения равновесия (необязательно устойчивого) уравнения Лагранжа имеют вид (6.22), откуда следует, что задача (7.10) для устойчивости равновесия сводится уже к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} \ddot{\Delta}_\beta + a_{\alpha\beta} \dot{\Delta}_\beta + k_{\alpha\beta} \Delta_\beta &= 0, \\ \Delta_\alpha \Big|_{t=0} &= \Delta_\alpha^0, \quad \dot{\Delta}_\alpha \Big|_{t=0} = \dot{\Delta}_\alpha^0. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Решение линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами ищется в виде

$$\Delta_\alpha = C_\alpha e^{\lambda t}, \tag{7.12}$$

откуда из требования существования ненулевого решения получается характеристическое уравнение для собственных значений  $\lambda$  (к аналогичному уравнению приходим и в общего случае (7.10), если оказываются постоянными коэффициенты  $d_{\alpha\beta}, f_{\alpha\beta}$ )

$$\| m_{\alpha\beta} \lambda^2 + a_{\alpha\beta} \lambda + k_{\alpha\beta} \| = 0. \tag{7.13}$$

Знание знаков действительных частей собственных значений оказывается достаточным для выводов об устойчивости поведения линейной системы. Из анализа поведения решений (7.12) достаточно очевидно, что:

- если  $\text{Re}(\lambda) < 0$  для всех собственных значений, то невозмущенное поведение системы – асимптотически устойчиво;
- если существует хотя бы одно собственное значения с  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , то невозмущенное поведение системы – неустойчиво;
- если некоторые собственные значения чисто мнимые ( $\text{Re}(\lambda) = 0$ ), а для остальных  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , то невозмущенное поведение системы – устойчиво.



Легко видеть, что перечисленными тремя случаями, исчерпываются все возможные расположения собственных значений  $\lambda$  относительно комплексной оси на комплексной плоскости (примеры таких расположений для системы с тремя степенями сво-

боды представлены на рисунке). Отметим, что по коэффициентам характеристического уравнения (7.12), записанного в виде

$$\sum_{\nu=0}^{2s} a_\nu \lambda^{2s-\nu} = 0, \tag{7.14}$$

можно сделать вывод об отрицательности действительных частей собственных значений. Наиболее известен **критерий Гурвица**: для отрицательности вещественных частей корней алгебраического уравнения (7.14) необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы Гурвица  $G_{2s}$  и все ее диагональные миноры имели одинаковые знаки. На диагонали матрицы Гурвица находятся коэффициенты  $a_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, 2s$ ), а выше и ниже диагонали в каждом столбце располагаются те же коэффициенты с возрастанием и убыванием их индексов, соответственно (если индекс выходит за пределы своего изменения, то это место матрицы заполняется нулем)

$$G_{2s} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2s-2} & a_{2s} & 0 \\ 0 & \dots & a_{2s-3} & a_{2s-1} & 0 \\ 0 & \dots & a_{2s-4} & a_{2s-2} & a_{2s} \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

Используются и другие критерии (частотный критерий Михайлова, критерий Вышнеградского для характеристических уравнений третьего порядка).

Таким образом, в линейном случае исследование устойчивости не вызывает принципиальных трудностей. Поэтому одним из методов исследования на устойчивость является сведение нелинейной задачи в приращениях (7.9) к линейной (7.10) (метод исследования устойчивости по первому приближению). Однако тогда возникает законный вопрос, при каких условиях и какие выводы, полученные для линеаризованной задачи, остаются справедливыми и применительно к ее исходной нелинейной формулировке. **Применительно к линейным системам с постоянными коэффициентами** исчерпывающий ответ на этот вопрос дают следующие **три теоремы Ляпунова** об устойчивости по первому приближению.

**Теорема 1. Из асимптотической устойчивости линеаризованной системы уравнений следует асимптотическая устойчивость и ее исходной нелинейной формулировки.**

**Теорема 2. Из неустойчивости линеаризованной системы уравнений следует неустойчивость и ее исходной нелинейной формулировки.**

**Теорема 3. При отсутствии асимптотической устойчивости из устойчивости линеаризованной системы уравнений устойчивость нелинейной системы уравнений не следует.**

Следовательно, при асимптотической устойчивости и в случае неустойчивости нелинейные добавки, отбрасываемые при линеаризации, на характер устойчивости поведения системы оказать влияния не могут. При устойчивом, но не асимптотически устойчивом поведении линейной системы нелинейные добавки могут существенным образом изменить выводы об устойчивости нелинейного случая.

Таким образом, согласно теореме 3, метод исследования по первому приближению приводит к результату не во всех случаях. Кроме того, **теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению применимы лишь для исследования поведения систем, линеаризация которых приводит к уравнениям с постоянными коэффициентами.**

Более общим по применимости является метод исследования устойчивости Ляпунова, основанный на использовании некоторого класса знакоопределенных функций  $V(x_v)$  в фазовом пространстве  $x_v$ . Будем считать, что в этот класс входят функции, которые только в начале координат фазового пространства обращаются в ноль  $V(x_v)_{x_v=0} = 0$ , а в некоторой его окрестности  $\|x_v\| \leq \delta$ ,  $\delta > 0$  обладают следующими свойствами:

- однозначны и непрерывны;
- имеют непрерывные частные производные  $\partial V / \partial x_v$ .

Из непрерывности и обращения в ноль только в начале координат следует, что функция  $V(x_v)$  – **знакоопределена**, т.е. вне начала координат либо  $V(x_v) > 0$ , либо  $V(x_v) < 0$ . В том случае, если функция не меняет знака, но допускается обращение в ноль и в отличных от начала координат точках, она называется **знакопостоянной**.

Используя введенные функции, сформулируем без доказательства теорему, дающую **достаточный критерий устойчивости: для устойчивости поведения системы достаточно существования знакоопределенной функции  $V(x_v)$  в фазовом пространстве, полная производная которой по времени в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения знакопостоянна с противоположным знаком к  $V(x_v)$  или тождественно равна нулю.**

Таким образом, доказательство устойчивости поведения системы может быть сведено к построению знакоопределенной функции, принадлежащей описанному выше классу и обладающей требуемыми в теореме свойствами. Однако построение такой функции Ляпунова во многих случаях является самостоятельной и не всегда просто решаемой задачей.

### 7.2. Устойчивость равновесия консервативных систем

Рассмотрим консервативную систему со стационарными связями. Тогда справедлива **теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативных систем: если в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум, то равновесие в этом положении – устойчиво.** Доказательство теоремы Лагранжа основывается на построении функции Ляпунова. Согласно (2.15) в положении равновесия обобщенные силы  $Q_\alpha$  обращаются в ноль

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U(q_\gamma)}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (7.16)$$

Решая систему уравнений (7.16), находим значения обобщенных координат  $q_\alpha^0$ , при которых механическая система находится в равновесии, но это равновесие может быть и неустойчивым. Введем новые обобщенные координаты  $x_\alpha = q_\alpha - q_\alpha^0$ . Очевидно, что для них условие (7.16) примет вид

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \right|_{x_\beta=0} = 0. \quad (7.17)$$

Примем, что в исследуемом на устойчивость положении равновесия  $x_\alpha = q_\alpha - q_\alpha^0 = 0$  потенциальная энергия равна нулю (это всегда возможно сделать выбором ее начала отсчета, т.к. она определена с точностью до константы). Тогда, поскольку по условию теоремы потенциальная энергия имеет минимум, то существует окрестность около положения равновесия, где она положительно-определена. Теперь в качестве функции Ляпунова выберем полную механическую энергию

$$V(x_\gamma, \dot{x}_\gamma) = T(x_\gamma, \dot{x}_\gamma) + U(x_\gamma).$$

Она знакоопределена (везде кроме нуля положительна в рассматриваемой окрестности), а ее полная производная по времени в силу сохранений полной механической энергии в консервативных системах тождественно равна нулю. Следовательно, выполнены все достаточные условия теоремы Ляпунова и этим доказано, что положение равновесия с минимум потенциальной энергии – устойчиво.

Однако в реальных механических системах всегда действуют силы диссипации и возникает вопрос, как они могут повлиять на устойчивость равновесия. Оказывается, что они не ухудшают ситуации при наличии устойчивости, но не могут к ней привести при ее отсутствии, а именно, справедливы следующие теоремы (эти теоремы доказаны лишь для сил трения (6.16), пропорциональных обобщенным скоростям), полученные лордом Кельвиным.

**Теорема 1. Учет сил диссипации в консервативных системах оставляет устойчивые положения равновесия таковыми.**

**Теорема 2. Если вводимые в консервативную систему силы трения, обуславливают диссипацию энергии по всем нормальным координатам, то устойчивые положения равновесия приобретают свойство асимптотической устойчивости.**

**Теорема 3. Учет сил диссипации в консервативных системах оставляет неустойчивые положения равновесия таковыми.**

Таким образом, учет сил диссипации не влияет на вывод об устойчивости консервативной системы, лишь, возможно, улучшая устойчивость, делая её асимптотической.

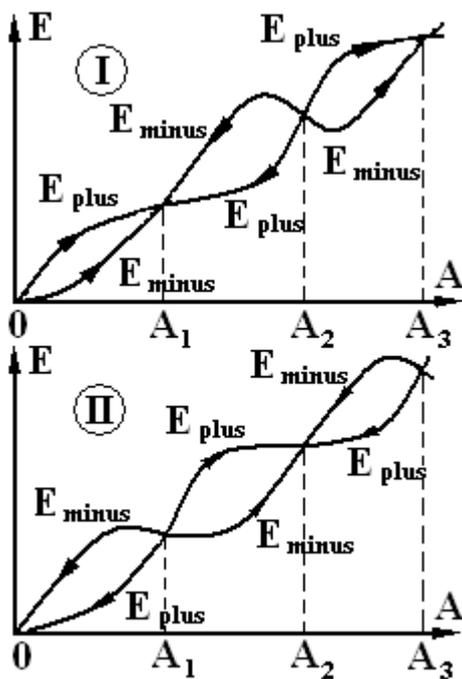
### 7.3. Автоколебания

**Автоколебания – колебания, возбуждаемые и поддерживаемые непериодическим воздействием.** Автоколебательные движения используются во многих устройствах (например, к ним относятся колебания струны скрипки при равномерном движении смычки, колебания маятника часов и т.д.)



Однако если механическая система включает источник энергии, то хотя ее эксплуатация и не предполагает

автоколебательных режимов, они могут возникнуть при некоторых условиях. В этом случае систему относят к классу потенциально автоколебательных, а переход к автоколеба-



ниям может рассматриваться как механизм потери устойчивости рабочего режима устройства. Наиболее известными примерами нежелательных автоколебаний являются: флаттер – возбуждение в струе набегающего потока колебательных движений крыльев, весьма опасных для самолетов, и шимми – возбуждение за счет кинетической энергии автомобиля виляющего движения катящегося колеса.

Помимо наличия постоянной подпитки энергии система лишь в том случае может быть отнесена к потенциально автоколебательной, если в ней имеется обратная связь, способная обеспечить периодический отбор энергии от ее источника. Следовательно, мы можем опасаться автоколебательной неустойчивости, если в механическую систему входят хотя бы три элемента, как это показано на рисунке. К основным особенностям поведения системы, указывающим, что мы имеем дело с автоколебаниями, относят: самовозбуждение колебаний (отсутствует периодическое воздействие извне), а также зависимость частот и амплитуд только от параметров системы (в частности, независимость амплитуд от начальных условий, как это имеет место при малых свободных колебаниях).

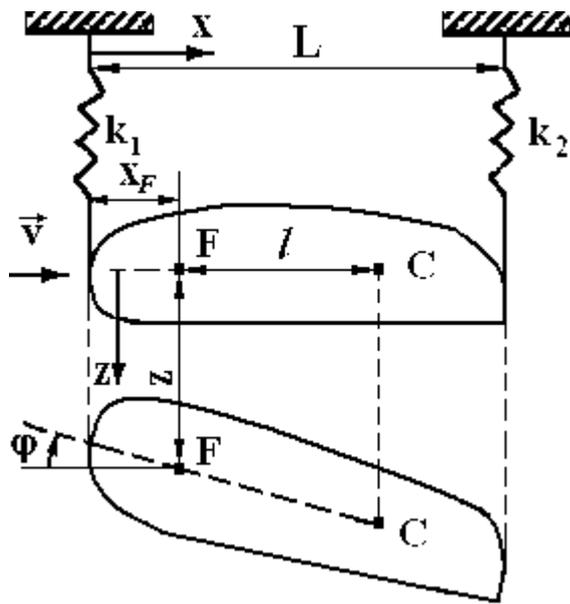
При изучении автоколебаний оказывается полезным предварительный энергетический анализ, основанный на том, что соблюдается баланс между энергией  $E_{plus}$ , поступающей от источника, и энергией  $E_{minus}$ , диссипируемой в автоколебательном процессе.

Обычно строятся зависимости этих энергий от характерной амплитуды  $A$  колебаний. Примеры таких зависимостей для двух систем, обладающих различными свойствами, представлены на рисунке. Невозмущенному поведению (движению или равновесию) соответствует амплитуда  $A=0$ , автоколебаниям – амплитуды  $A=A_1, A_2, A_3$  (при этих значениях амплитуд выполняется баланс энергий  $E_{plus} = E_{minus}$ ). В случае системы I невозмущенное поведение с  $A=0$  и автоколебание с амплитудой  $A=A_2$  – неустойчивы (отклонения от этих значений амплитуд ведут к их изменению в сторону отклонения). Небольшие возмущения невозмущенного поведения приведут к автоколебаниям с амплитудой  $A=A_1$ , достаточно сильное воздействие может реализовать переход к устойчивым автоколебаниям с  $A=A_3$ . Система II ведет себя совершенно иначе. Как видно из рисунка, для нее устойчивыми являются невозмущенное поведение и

автоколебание с  $A = A_2$ . Теперь уже небольшие возмущения невозмущенного поведения не приведут к качественному изменению ситуации, т.к. после воздействия система вернется к исходному поведению с  $A = 0$ . Только достаточно сильное возмущение может перевести систему к состоянию устойчивых автоколебаний с  $A = A_2$  (для этого ей необходимо, по крайней мере, иметь в результате возмущения амплитуду, превышающую  $A_1$ ).

#### 7.4. Неустойчивость типа флаттера

В качестве примера исследования на устойчивость потенциально автоколебательной системы рассмотрим явление флаттера, упростив расчетную модель насколько это возможно, чтобы еще остался сам автоколебательный механизм потери устойчивости равновесия крыла самолета в набегающем со скоростью  $\vec{V}$  потоке воздуха. Физическая суть флаттера имеет аэро – упруго – динамическую природу. Упругие колебания крыла являются по необходимости изгибно-крутильными, т.к. из-за несовпадения центров масс и жесткости (центром жесткости каждого сечения крыла называется точка приложения равнодействующей упругих сил) в сечениях крыла чисто изгибные или крутильные колебания не реализуются (детально этот вопрос рассматривается в курсах механики сплошных сред и выходит за рамки теоретической механики дискретных механических систем). Мы заменим изгибно-крутильные колебания упругого крыла плоским движением а.т.т. на упругих пружинах, совершающего поперечно-поворотные малые смещения, как это представлено на рисунке. Ширину крыла (размер сечения абсолютно твердого тела) примем равной  $L$ , а расстояние между центрами жесткости  $F$  и инерции  $C$  за  $l$ . Тогда координата центра жесткости  $x_F$  определяется из условия отсутствия относительно этой точки крутящего момента упругих сил при поперечном смещении



Тогда координата центра жесткости  $x_F$  определяется из условия отсутствия относительно этой точки крутящего момента упругих сил при поперечном смещении

$$k_1 x_F = k_2 (L - x_F). \quad (7.18)$$

Примем за обобщенные координаты показанные на рисунке смещение  $z$  центра жесткости  $F$  (этому смещению соответствует изгиб крыла) и угол поворота тела  $\varphi$  (он реализуется при закручивании крыла). При невозмущенном движении  $z \equiv 0, \varphi \equiv 0$  (это соответствует указанному на рисунке направлению потока и отсчету  $z$  от положения точки  $C$  при нерастянутом положении пружин). Для получения системы дифференциальных уравнений движения малых автомодельных колебаний найдем кинетическую и потенциальную энергии построенной модельной механической системы с двумя степенями свободы. Используя теорему Кенига (см. курс Механика-I), рассчитываем кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{z} + l \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + ml \dot{z} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2, \quad (7.19)$$

где  $I = I_C + ml^2$  – момент инерции тела относительно центра жесткости (согласно теореме Штененера). С учетом (7.18): потенциальная энергия пружин равняется:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2}k_1(z - x_F\varphi)^2 + \frac{1}{2}k_2(z + (L - x_F)\varphi)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)z^2 - k_1zx_F\varphi + \\
 &\quad + \frac{1}{2}k_1(x_F\varphi)^2 + k_2z(L - x_F)\varphi + \frac{1}{2}k_2(L - x_F)^2\varphi^2 = \\
 &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)z^2 + \frac{1}{2}(k_1x_F^2 + k_2(L - x_F)^2)\varphi^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)z^2 + \frac{1}{2}k\varphi^2, \\
 &\quad k = k_1x_F^2 + k_2(L - x_F)^2 = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}L^2,
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

где  $k$  – жесткость системы на кручение.

Обобщенными силами в нашем случае будут подъемная аэродинамическая сила  $Q_z$  и аэродинамический момент  $Q_\varphi$ , которые пропорциональны скоростному напору, и эффективному углу атаки  $\varphi + z/V$  (слагаемое  $\dot{z}/V$  добавляется к углу атаки вследствие приращения по оси  $z$  относительной скорости крыла и потока; знак минус в выражении для  $Q_z$  соответствует противоположности направлений подъемной силы и оси  $z$ ):

$$\begin{aligned}
 Q_z &= -C_z \frac{\rho V^2}{2} S(\varphi + \dot{z}/V) = -A_z\varphi - \frac{A_z}{V}\dot{z}, \\
 Q_\varphi &= C_\varphi \frac{\rho V^2}{2} S L(\varphi + \dot{z}/V) = A_\varphi L\varphi + \frac{A_\varphi L}{V}\dot{z}, \\
 A_z &= C_z \frac{\rho V^2}{2} S, \quad A_\varphi = C_\varphi \frac{\rho V^2}{2} S,
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

где  $\rho$  – плотность набегающего газа;  $C_z, C_\varphi$  – безразмерные аэродинамические коэффициенты пропорциональности;  $A_z = A_z(V), A_\varphi = A_\varphi(V)$  – заданные квадратичные функции скорости.

Подставляя (7.19)-(7.21) в уравнения Лагранжа (3.14), получаем линейную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка каждое:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + ml\ddot{\varphi} + \frac{A_z}{V}\dot{z} + (k_1 + k_2)z + A_z\varphi = 0, \\ ml\ddot{z} + I\ddot{\varphi} - \frac{A_\varphi L}{V}\dot{z} + (k - A_\varphi L)\varphi = 0. \end{cases} \tag{7.22}$$

Для исследования на устойчивость (получения характеристического уравнения) подставляем в (7.22) решение в виде (7.12) и получаем однородную линейную систему:

$$\begin{cases} \left( m\lambda^2 + \frac{A_z}{V}\lambda + (k_1 + k_2) \right) C_1 + (ml\lambda^2 + A_z)C_2 = 0, \\ (ml\lambda^2 - \frac{A_\varphi L}{V}\lambda) C_1 + (I\lambda^2 + (k - A_\varphi L))C_2 = 0, \end{cases}$$

у которой имеется ненулевое решение лишь при равном нулю определителе

$$\left\| \begin{pmatrix} m\lambda^2 + \frac{A_z}{V}\lambda + (k_1 + k_2) & (ml\lambda^2 + A_z) \\ (ml\lambda^2 - \frac{A_\varphi L}{V}\lambda) & (I\lambda^2 + (k - A_\varphi L)) \end{pmatrix} \right\| = 0. \tag{7.23}$$

Раскрывая полученный определитель, находим характеристическое уравнение четвертой степени в виде (7.14) с коэффициентами (обе части характеристического уравнения

поделены на  $m^2 L^2 ((k_1 + k_2) / m)^2$  и собственные значения сделаны безразмерными по формуле  $\lambda = \sqrt{(k_1 + k_2) / m} \tilde{\lambda}$ , тогда, очевидно, и коэффициенты будут безразмерными):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{I - ml^2}{mL^2} = \frac{I_c}{mL^2} = \tilde{I}, \\
 a_1 &= \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \frac{1}{mV} \left( \frac{I}{mL^2} A_z(V) + \frac{l}{L} A_\varphi(V) \right) = \frac{\tilde{A}_z(V)}{\tilde{V}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2), \\
 a_2 &= \frac{m}{k_1 + k_2} \frac{1}{mL} \left( \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} L + (k_1 + k_2) \frac{I_c + ml^2}{mL} - (A_z(V) \frac{l}{L} + A_\varphi(V)) \right) = \\
 &= \tilde{I} + \frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{l}^2 - (\gamma + \tilde{l}) \tilde{A}_z, \\
 a_3 &= \left( \frac{m}{k_1 + k_2} \right)^{3/2} \frac{k A_z(V)}{Vm^2 L^2} = \frac{1}{\tilde{V}} \frac{1}{\tilde{k}} \tilde{A}_z(V), \\
 a_4 &= \left( \frac{m}{k_1 + k_2} \right)^2 \frac{(k_1 + k_2)(k - A_\varphi(V)L)}{m^2 L^2} = \frac{1}{\tilde{k}} - \gamma A_z,
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

где введены безразмерные параметры

$$\begin{aligned}
 \tilde{V} &= V \sqrt{m / (k_1 + k_2)} / L, \quad \tilde{A}_z = A_z / (k_1 + k_2) / L, \\
 \gamma &= A_\varphi / A_z = C_\varphi / C_z, \quad \tilde{l} = l / L, \quad \tilde{I} = I_c / mL^2, \quad \tilde{k} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2}.
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

Для асимптотической устойчивости, согласно критерию Гурвица, все коэффициенты и определитель (третий диагональный минор матрицы Гурвица)

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4$$

должны быть положительны:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \Delta_3 > 0.$$

Из выражений (7.24) для коэффициентов характеристического уравнения, очевидно, что для всех значений скорости (как следует из (7.21) функции  $A_z(V)$ ,  $A_\varphi(V)$  – всегда положительны):

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0$$

и условия устойчивости сводятся к трем неравенствам

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \Delta_3 > 0.$$

Рассмотрим условие  $\Delta_3 > 0$ , которое записывается в виде

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$$

или

$$\frac{\tilde{A}_z^2(V)}{\tilde{V}^2 \tilde{k}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \left( \tilde{I} + \frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{l}^2 - (\gamma + \tilde{l}) \tilde{A}_z \right) - \frac{\tilde{A}_z^2(V) \tilde{I}}{\tilde{V}^2 \tilde{k}^2} - \frac{\tilde{A}_z^2(V)}{\tilde{V}^2 \tilde{k}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)^2 (1 - \gamma \tilde{k} A_z) > 0.$$

Сокращаем обе части неравенства на положительное выражение  $\tilde{A}_z^2 / \tilde{V}^2 / \tilde{k}$  и преобразуем получившееся для  $\tilde{A}_z$  неравенство:

$$\begin{aligned}
 & (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \left( \tilde{I} + \frac{1}{\tilde{k}} + \tilde{l}^2 - (\gamma + \tilde{l}) \tilde{A}_z \right) - \frac{\tilde{I}}{\tilde{k}} - (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)^2 (1 - \gamma \tilde{k} \tilde{A}_z) > 0, \\
 & (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \left( \frac{1}{\tilde{k}} - \gamma \tilde{l} - (\gamma + \tilde{l}) \tilde{A}_z \right) - \frac{\tilde{I}}{\tilde{k}} + \gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)^2 \tilde{A}_z > 0, \\
 & (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \left( \frac{1}{\tilde{k}} - \gamma \tilde{l} \right) - \frac{\tilde{I}}{\tilde{k}} + (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) (\gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) - \gamma - \tilde{l}) \tilde{A}_z > 0, \\
 & \frac{1}{\tilde{k}} (\gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) - \gamma \tilde{l} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) + (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) (\gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) - \gamma - \tilde{l}) \tilde{A}_z > 0, \\
 & (\gamma + \tilde{l} - \gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)) - \frac{\tilde{k}}{\tilde{l}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) (\gamma + \tilde{l} - \gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)) \tilde{A}_z > 0, \\
 & (\gamma + \tilde{l} - \gamma \tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)) \left( 1 - \frac{\tilde{k}}{\tilde{l}} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2) \tilde{A}_z \right) > 0, \\
 & (\gamma + \tilde{l} - \gamma \tilde{k} (\tilde{l}^2 + \tilde{I} + \gamma \tilde{l})) \left( \tilde{A}_z - \frac{\tilde{l}}{\tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)} \right) < 0. \tag{7.26}
 \end{aligned}$$

При  $\tilde{k} \tilde{I} < 1$  и достаточно малом  $\gamma$  первый множитель левой части неравенства (7.26) положителен и, следовательно,

$$\tilde{A}_z < \frac{\tilde{l}}{\tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)}. \tag{7.27}$$

Для условий  $a_2 > 0$ ,  $a_4 > 0$  получаем неравенства

$$\tilde{A}_z < \frac{\tilde{I} + 1/\tilde{k} + \tilde{l}^2}{\gamma + \tilde{l}}, \quad \tilde{A}_z < \frac{1}{\gamma \tilde{k}},$$

которые, как легко видеть, выполняются, если выполняется (7.27). Следовательно, условие  $\Delta_3 > 0$  нарушается при меньших скоростях, чем становятся отрицательными коэффициенты  $a_2, a_4$ .

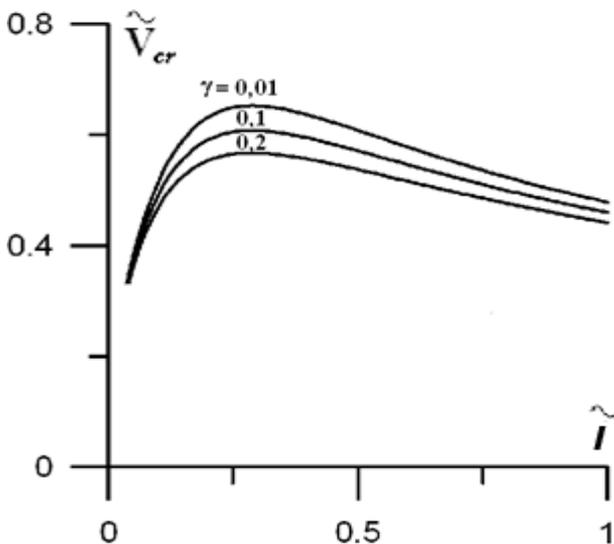
Используя выражение (7.21) для функции  $A_z = A_z(V)$ , из (7.27) получаем ограничение на скорость, при выполнении которого автоколебания будут затухать, т.е. потеря устойчивости (флаттер) не реализуется

$$V < V_{cr} = \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)L}{C_z \rho S}} \sqrt{\frac{\tilde{l}}{\tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)}}. \tag{7.28}$$

Таким образом, безразмерная критическая скорость  $\tilde{V}_{cr}$  определяется четырьмя безразмерными параметрами  $\gamma, \tilde{l}, \tilde{I}, \tilde{k}$  по формуле

$$\tilde{V}_{cr} = \frac{V_{cr}}{\sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)L}{C_z \rho S}}} = \sqrt{\frac{\tilde{l}}{\tilde{k} (\tilde{I} + \gamma \tilde{l} + \tilde{l}^2)}}. \tag{7.29}$$

Зависимости безразмерной критической скорости от параметра  $\tilde{l}$  при различных значениях  $\gamma = C_\phi / C_z$  представлены на рисунке. Эти зависимости построены по формуле (7.29), в которой безразмерные пара-



метры  $\tilde{k}$ ,  $\tilde{I}$  задавались для случая равных жесткостей пружин  $k_1 = k_2$  и оценки момента инерции  $I_C$  в предположении, что крыло – стержень:

$$\tilde{I} = I_C / mL^2 = \frac{1}{12}, \quad \tilde{k} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2} = 4.$$

Из представленных на рисунке результатов следует, что с ростом расстояния между центрами инерции и жесткости критическая скорость, пройдя через максимум, уменьшается, т.к. автоколебания реализуются лишь при наличии взаимосвязи между поперечными (изгибными в крыле) и поворотными (крутильными в крыле) колебаниями. Также наблюдается уменьшение критической скорости с ростом параметра  $\gamma$ , поскольку, как это видно из системы уравнений движения (7.22), именно крутящий аэродинамический момент (он пропорционален  $\gamma$ ) играет дестабилизирующую роль, обусловленную слагаемым  $-\frac{A_\phi L \cdot}{V} z$  во втором уравнении этой системы.

### **ВОПРОСЫ**

1. Дайте определение асимптотической устойчивости Ляпунова.
2. При каких условиях справедливы три теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению?
3. Сформулируйте критерий Гурвица. По каким правилам формируется матрица Гурвица?
4. В чем заключается метод исследования устойчивости Ляпунова? Какая принципиальная трудность может возникнуть при его использовании?
5. Сформулируйте теорему Лагранжа об устойчивости равновесия консервативных систем.
6. Могут ли силы диссипации сделать неустойчивые положения равновесия консервативных систем устойчивыми?
7. В каком случае силы трения делают устойчивые положения равновесия консервативных систем асимптотически устойчивыми?
8. В чем физическая суть флаттера?