ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать пятый

№ 4 (100), часть I

октябрь - декабрь 2021 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (100), 2021 г., часть I

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2021 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 17.01.2022 г.
Стиль верстки разработан С. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 6 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (100), октябрь – декабрь 2021 г., часть I

Содержание

25 лет и 100 выпусков третьей серии журнала “Математическое образование”

От редакции

Прошло 25 лет с начала выпуска в 1997 г. третьей серии журнала “Математическое образование”. Представляем вниманию читателей юбилейный 100-й выпуск журнала.

Поздравляем с этим знаменательным событием всех сотрудников редакционной коллегии, технический персонал, обеспечивающий набор, корректуру, верстку, изготовление тиража, транспортировку, хранение и распространение экземпляров журнала, поддержку Интернет-страницы журнала и загрузку в Научную электронную библиотеку и базы РИНЦ и Math-net, а также всех авторов и читателей!

Особая благодарность учредителю и издателю журнала — Фонду математического образования и просвещения — в лице Генерального директора Комарова Станислава Игоревича за обеспечение материальных и организационных возможностей выпуска журнала в течение 25 лет, за неослабное внимание к нуждам персонала, запросам и пожеланиям авторов и читателей.

Юбилейный номер журнала впервые выходит в 2-х частях. Эту возможность дает большой запас материалов в редакционном портфеле, что говорит о заметной популярности издания среди работников в области математического образования.

В первой части приведены некоторые сравнительные статистические данные по трем периодам выпуска журнала: 1912–1917 гг., 1928–1930 гг. и 1997–2021 гг.

Даны краткие сведения обо всех действующих членах редколлегии по состоянию на данный момент. Все они предоставили материалы для публикации в первой части юбилейного номера.

Далее идут статьи авторов, специально приглашенных редакцией напечатать свои материалы в юбилейном номере. В основном это самые активные авторы третьей серии журнала, имеющие наибольшее число публикаций за прошедшие 25 лет.

Во второй части выпуска напечатаны материалы, принятые к публикации в обычном порядке[1].

В этой части данного выпуска мы постарались представить возможно более широкий спектр тем в области математического образования, освещаемых нашим изданием.

Желаем всем сотрудникам и читателям журнала здоровья, благополучия, творческих и жизненных успехов и надеемся на дальнейшее плодотворное сотрудничество!

От имени редакционной коллегии
журнала “Математическое образование”
главный редактор
Имайкин Валерий Марсович.

[1]Поступающие в редакцию материалы регистрируются хронологически и, в случае принятия к публикации, обычно в той же последовательности и печатаются, за редкими исключениями.

Некоторые статистические данные по трем периодам выпуска журнала

От редакции

Предлагаем некоторые статистические данные по трем периодам выпуска журнала “Математическое образование”: 1912 – 1917 гг., 1928 – 1930 гг., 1997 – 2021 гг. Представлены три группы данных.

1. Организационные данные

Первая группа представляет данные организационного (производственного) характера: периодичность, общее количество выпусков, авторов и статей, состав редколлегии, список наиболее активных авторов.

Периоды	**1912 – 1917 гг.**	**1928 – 1930 гг.**	**1997 – 2021 гг.**
Периодичность (выпусков в год)	8	8	4
Всего выпусков	41	21	95
Количество авторов	86	84	326
Количество статей, включая перепечатки и продолжения	299	187	815
Редколлегия	Чистяков И.И.	Чистяков И.И.	Бондал А.И., Дориченко С.А. (по 2010), Дубовицкий А.В., Дубовицкая Н.В., Имайкин В.М., Комаров С.И., Константинов Н.Н. (по 2021), Саблин А.И., Костенко И.П. (с 2007), Канель-Белов А.Я. (с 2012)
Первые 10 наиболее публикуемых авторов (в скобках количество статей)	Чистяков И.И. (21), Бобынин В.В. (18), Агрономов Н.А. (17), Лебединцев К.Ф. (16), Синцов Д.М. (15), Александров И.И. (11), Волков А.А. (11), Извольский Н.А. (10), Добровольский В.В. (9), Некрасов П.А. (9)	Лодыженский Л.Н. (10), Четверухин Н.Ф. (10), Брадис В.М. (8), Добровольский В.В. (8), Агрономов Н.А. (6), Адамович С.В. (6), Колмогоров Н.А. (6), Романовский П. (6), Чистяков И.И. (6), Васильев А.В. (5)	Костенко И.П. (26), Дроздов В.Б. (24), Эвнин А.Ю. (23), Дворянинов С.В. (21), Щетников А.И. (18), Гушель Р.З. (17), Мякишев А.Г. (16), Ивлев В.В. (15), Шведенко С.В. (14), Ляхов А.Ф. (13)

Примечание. За третий период указано всего 95 выпусков — это с учетом нескольких сдвоенных выпусков. Сквозной номер текущего юбилейного выпуска — 100.

2. Географические данные

Вторая группа включает географические данные: количество городов, где проживали авторы, список и количество стран, представленных авторами.

Периоды	**1912 – 1917 гг.**	**1928 – 1930 гг.**	**1997 – 2021 гг.**
Количество городов	25 (3 зарубежных, 22 российских)	36 (1 зарубежный, 35 СССР)	85 (32 зарубежных, 53 российских)
Количество стран (в скобках — авторов)	Австрия (1), Великобритания (1), Германия (2), Россия (80) Италия (2), **Итого**: 86 авторов из 5 стран	Германия (1), СССР (83) **Итого**: 84 автора из 2 стран	Австрия (1), Армения (2), Беларусь (7), Германия (2), Израиль (12), Казахстан (5), Канада (1), Кыргызстан (2), Нигер (1), Нидерланды (1), Россия (277), США (3), Украина (7), Финляндия (1), Франция (4) **Итого**: 326 авторов из 15 стран

3. Распределение статей по основным темам

Третья группа данных представляет распределение статей по основным темам: перечисляет темы выпусков за каждый период и показывает количество статей по каждой теме. Некоторые не слишком существенные темы (например, сообщения о заседаниях математического кружка в первом периоде, информационные редакционные сообщения в третьем периоде и т.п.) не учитывались, поэтому сумма статей в следующей таблице за период меньше общего числа публикаций за тот же период из первой таблицы.

Периоды	**1912 – 1917 гг.**	**1928 – 1930 гг.**	**1997 – 2021 гг.**
Тема	Статей по теме	Статей по теме	Статей по теме
Алгебра	20	26	68
Арифметика	36	22	11
Геометрия	61	65	142
Логика	1	—	7
Математический анализ	11	13	83
Математические олимпиады	—	—	36
Приложения математики	1	4	33
Теория вероятностей	4	2	23
Теория чисел	—	—	1
Библиография	1	12	—
Биографические материалы	24	9	39
Вопросы математического образования	54	6	81
Даты математических событий	—	—	8
История математики	20	10	32
История образования	1	—	35
Общие вопросы математики	5	—	6
Рецензии	38	14	2

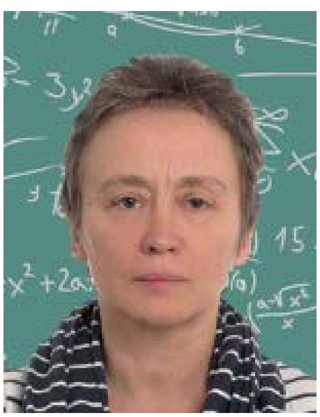
Редакция выражает глубокую благодарность администрации электронной библиотеки mathedu.ru за подготовку таблиц статистических данных по трем периодам выпуска журнала. Подробные таблицы доступны на странице matob.ru/supplement.html

Действующие члены редакционной коллегии

Представляем краткие сведения о действующих членах редколлегии журнала "Математическое образование" по состоянию на текущий момент. Все члены редколлегии представили материалы для публикации в юбилейном номере журнала.

Имайкин Валерий Марсович, главный редактор журнала. Учитель математики ГБОУ "Школа № 179", г. Москва; доктор физико-математических наук.

Бондал Алексей Игоревич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института имени Стеклова РАН, заведующий Лабораторией Алгебраической Геометрии и Гомологической Алгебры МФТИ.



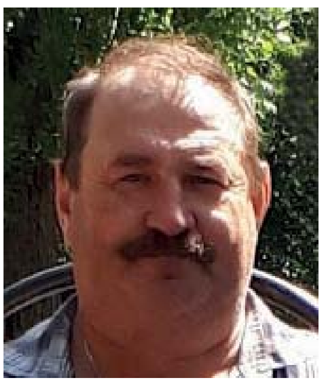
Дубовицкая Наталья Викторовна, ответственный секретарь редакции. Учитель математики ГБОУ "Школа № 179", г. Москва; кандидат физико-математических наук.

Дубовицкий Александр Викторович, Генеральный директор Фонда Свят. Блгв. князя Александра Невского.

Канель-Белов Алексей Яковлевич, доктор физико-математических наук. Российский и израильский математик, педагог и составитель олимпиадных задач. Профессор Бар-Иланского университета.

Комаров Станислав Игоревич, Генеральный директор Фонда математического образования и просвещения — издателя и учредителя журнала. Первый заместитель директора ГБОУ Школа № 179, г. Москва.

Костенко Игорь Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент. Член экспертного совета Конгресса работников образования и науки (КРОН), член попечительского совета фонда «Достояние Отечества». Старейший активный автор нашего журнала.



Саблин Александр Иванович, кандидат физико-математических наук, член Московского математического общества, г. Мытищи.

Об интегрировании уравнений Максвелла-Лоренца

В. М. Имайкин, О. В. Никишкина

В статье на уровне, доступном для студентов физико-математических специальностей, изложены некоторые строгие математические результаты теории уравнений Максвелла. Это явное интегрирование линейной системы Максвелла с заданными током и плотностью заряда, а также построение решения задачи Коши для системы Максвелла-Лоренца, описывающей взаимодействие электромагнитного поля с движущейся и вращающейся заряженной частицей.

1. Введение

Уравнения Максвелла являются одними из важнейших уравнений математической физики, трудно переоценить их значение для построения теории электромагнитных волн. Достаточно сказать, что они лежат в основе расчетов всех технических устройств, использующих электромагнитные излучения, например, современных смартфонов.

В физической литературе уравнением Максвелла уделено большое внимание. Мы не ставим целью дать ее обзор, можно обратиться к таким источникам, как [1, 2].

С другой стороны, имеется не очень много работ, в которых исследование уравнений Максвелла рассматривается как *математическая задача* с целью формулировок и доказательств строгих теорем, в частности, теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Отметим одну из первых работ в этом направлении [3], а также фундаментальную монографию [4], в которой ряд таких задач инициирован.

Целью настоящей статьи является изложение некоторых вопросов интегрирования уравнений Максвелла и Максвелла-Лоренца на уровне, доступном студентам физико-математических факультетов вузов. Для понимания работы достаточно знания стандартных курсов функционального анализа и уравнений в частных производных. Ниже мы перечислим основные компоненты математического аппарата, который используется в работе. Отметим, что в цели работы не входит изложение представления уравнений Максвелла в потенциальной форме, соответственно, тензорный язык не используется.

Часть материала представлена в виде упражнений, которые читателю предлагается выполнить самостоятельно.

2. Математический аппарат

Интегрирование ниже понимается в смысле интеграла Лебега. Если пределы интегрирования явно не указаны, интеграл берется по всему пространству, на котором определена функция. Пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ — пространство определенных на $\mathbb{R}^3$ вещественнозначных функций с суммируемым квадратом, с обычной нормой

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \left(\int dx |f(x)|^2\right)^{1/2}, \ \ x \in \mathbb{R}^3.$$

Через $L^2 = L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ обозначим пространство вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, каждая компонента которых принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$; норма в этом пространстве имеет вид

$$\|f\|_{L^2} = \left(\sum_{i=1}^{3} \|f_i(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{1/2}.$$

В теории уравнений с частными производными очень плодотворной оказалась идея рассматривать функции от переменных x, t; $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ как функции от t с значениями в том или ином пространстве функций от x. Мы тоже будем придерживаться этого подхода. Основными пространствами в наших рассмотрениях являются пространства $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^3))$ и $C(\mathbb{R}; L^2)$ непрерывных функций, определенных на всей числовой прямой, с значениями соответственно в пространствах $L^2(\mathbb{R}^3)$ и L^2, а также аналогичные пространства $C(I; L^2(\mathbb{R}^3))$ и $C(I; L^2)$, где I — конечный отрезок числовой прямой, с нормами

$$\|f\|_{C(I;L^2(\mathbb{R}^3))} = \max_{t\in I} \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad \|f\|_{C(I;L^2)} = \max_{t\in I} \|f(t)\|_{L^2}.$$

Производную, в том числе частную, по t будем обозначать точкой над знаком соответствующей функции. Если такое обозначение неудобно по разным причинам (например, “многоэтажность”, когда точку надо ставить над значком преобразования Фурье, или когда надо явно указать переменную дифференцирования в случае нескольких равноправных переменных), используем символ $\frac{d}{dt}$.

Через ∇ обозначим оператор взятия градиента скалярной функции, оператор взятия ротора от векторной функции обозначим $\nabla\wedge$, где $\wedge$ обозначает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Мы будем пользоваться стандартными формулами векторного анализа, наиболее часто эксплуатируется формула

$$a \wedge (b \wedge c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b), \tag{1}$$

где a, b, c — трехмерные векторы, точка обозначает скалярное произведение[1].

Применение дифференциальных операторов по переменной x к функциям из пространств $L^2(\mathbb{R}^3)$ и L^2, а также по переменным t и x к функциям из пространств $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^3))$ и $C(\mathbb{R}; L^2)$ надо понимать в смысле *теории обобщенных функций.* Именно так понимаются основные системы уравнений начиная с (5) и далее. Знания основ теории обобщенных функций достаточно в объеме книги В.С. Владимирова [5][2].

Применяется *теорема Фубини* для изменения порядка интегрирования в двойном интеграле.

Преобразование Фурье $F[f](k) = \hat{f}(k)$ (комплекснозначной) функции $f(x)$ имеет вид

$$\hat{f}(k) := (2\pi)^{-3/2} \int e^{-ikx} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Тогда в результате преобразования Фурье имеем переходы:

$$xf(x) \mapsto i\nabla_k \hat{f}(k), \quad \nabla f(x) \mapsto ik\hat{f}(k). \tag{3}$$

Также выполняется *равенство Парсеваля*

$$\int f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}\, dk; \tag{4}$$

черта обозначает комплексное сопряжение.

[1] В студенческом фольклоре формулу (1) называют “бац минус цаб”, что является мнемоническим правилом для ее запоминания.

[2] Заметим, что многие конкретные вычисления в данной работе проводятся с достаточно гладкими функциями от x, t, когда дифференцирование в смысле обобщенных функций и в обычном смысле совпадают.

Замечания. 1. Часто в формуле для преобразования Фурье в экспоненте пишут знак "плюс" вместо "минус", как например это сделано в важной для нас работе [6], которой мы в основном следуем при изложении. Мы будем использовать "минус", чтобы согласовать обозначения с фундаментальной монографией [4], которая дала импульс многим современным исследованиям математических свойств системы Максвелла-Лоренца, см., например, работы [6]-[11]. Эти работы написаны на английском языке, изложения большинства их результатов на русском языке можно найти в обзоре [12].

2. Для упрощения записи уравнений при построении математической теории принимается система единиц, в которой все основные физические константы, входящие в уравнения, равны 1, см. ниже уравнения (5) и далее.

3. Линейные уравнения Максвелла с заданными током и плотностью заряда

Линейные уравнения Максвелла с заданными током и плотностью заряда имеют вид:

$$\begin{aligned} &\dot E(x,t)=\nabla\wedge B(x,t)-j(x,t), && \dot B(x,t)=-\nabla\wedge E(x,t),\\ &\nabla\cdot E(x,t)=\rho(x,t), && \nabla\cdot B(x,t)=0,\\ &E(x,0)=E^0(x), && B(x,0)=B^0(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}$; $E(x,t)$, $B(x,t)$ — терхмерные векторные поля напряженности соответственно электрического и магнитного полей; $j(x,t)$, $\rho(x,t)$ — заданные ток и плотность распределения зарядов; $E^0(x), B^0(x)$ — электрическое и магнитное поля в начальный момент времени.

Первая строчка системы (5) представляет собой дифференциальные уравнения эволюции электромагнитного поля. Условие $\nabla\cdot E(x,t)=\rho(x,t)$ означает, что $\rho(x,t)$ — плотность источника электрического поля, условие $\nabla\cdot B(x,t)=0$ говорит об отсутствии источников магнитного поля. Вследствие этих условий и уравнений эволюции плотность заряда и ток не могут быть полностью произвольными.

Упражнение 1. Докажите, что если $\rho\in C(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3))$, $j\in C(\mathbb{R},L^2)$, то из системы (5) следуют условия

$$\nabla\cdot E^0(x)=\rho(x,0),\ \ \nabla\cdot B^0(x)=0, \tag{6}$$

а также *уравнение непрерывности*

$$\dot\rho(x,t)+\nabla\cdot j(x,t)=0. \tag{7}$$

Оказывается, что условия (6), (7) являются также достаточными для существования решения системы (5), как показывает следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть*

$$E^0\in L^2,\ \ B^0\in L^2,\ \ \rho\in C(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^3)),\ \ j\in C(\mathbb{R},L^2) \tag{8}$$

и выполнены условия (6), (7). Тогда:

1) задача Коши (5) имеет единственное решение $(E,B)\in C(\mathbb{R},L^2\times L^2)$*;*

2) для любого $T>0$ *отображение* $L:(E^0,B^0,\rho,j)\mapsto(E,B)|_{[0.T]}$ *является линейным непрерывным оператором* $D_T\to\overline{C}_T\times\overline{C}_T$ *с нормой порядка* $\mathcal{O}(T)$*;*

3) имеет место представление решения в виде свертки

$$\begin{pmatrix} E(x,t)\\ B(x,t)\end{pmatrix}=m_t*\begin{pmatrix} E^0(x)\\ B^0(x)\end{pmatrix}+\int\limits_0^t ds\, g_{t-s}*\begin{pmatrix}\rho(x,s)\\ j(x,s)\,,\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где m_t *и* g_t *— обобщенные функции с значениями-матрицами размеров соответственно* 6×6 *и* 6×4*, с носителем на сфере* $\{|x| = |t|\}$*,*

$$m_t(x) = 0, \quad \textit{и} \quad g_t(x) = 0 \quad \textit{при} \quad |x| \neq |t|. \tag{10}$$

Мы приведем **эскиз доказательства** из работы [6]. Идея заключается в рассмотрении *комплексного поля* $C(x,t) := E(x,t) + iB(x,t)$, для которого система (5) запишется в виде

$$\dot{C}(x,t) = -i\nabla \wedge C(x,t) - j(x,t), \quad C(x,0) = C^0(x) := E^0(x) + iB^0(x), \tag{11}$$

$$\nabla \cdot C(x,t) = \rho(x,t). \tag{12}$$

Применив к уравнениям (11), (12) преобразование Фурье, получим в пространстве Фурье уравнения

$$\frac{d}{dt}\hat{C}(k,t) = k \wedge \hat{C}(k,t) - \hat{j}(k,t), \quad \hat{C}(k,0) = \hat{C}^0(k), \tag{13}$$

$$ik \cdot \hat{C}(k,t) = \hat{\rho}(k,t). \tag{14}$$

Условия (6), (7) преобразуются в

$$ik \cdot \hat{C}^0(k) = \hat{\rho}(k,0), \quad k \in \mathbb{R}^3, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(k,t) + ik \cdot \hat{j}(k,t) = 0, \quad k \in \mathbb{R}^3, \ t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Пусть $m = m(k)$ обозначает кососимметрическую матрицу размера 3×3 линейного оператора $k\wedge$ в линейном пространстве $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (13) представляется *интегралом Дюгамеля*

$$\hat{C}(k,t) = e^{mt}\hat{C}^0(k) - \int_0^t ds\, e^{m(t-s)}\hat{j}(k,s), \quad k \in \mathbb{R}^3, \ t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Здесь e^{mt} — экспонента матрицы mt, определяемая стандартным образом.

Упражнение 2. Проверьте, что формула (17) действительно определяет решение уравнения (13).

Подсказка. Матрица e^{mt} является решением дифференциального уравнения $\frac{d}{dt}e^{mt} = me^{mt}$, причем $e^0 = E$ — единичная матрица.

То, что для решения (17) выполнено также условие (14), надо проверить отдельно.

Упражнение 3. Проверьте, что $ik \cdot \hat{C}(k,t) = \hat{\rho}(k,t)$.

Подсказка. Обозначим $d(k,t) = ik \cdot \hat{C}(k,t)$. Используя условие (15) и уравнения (13), (16) убедитесь, что $d(k,0) = \hat{\rho}(k,0)$ и $\dot{d}(k,t) = \frac{d}{dt}\hat{\rho}(k,t)$. Тогда получим тождественное равенство $d(k,t) = \hat{\rho}(k,t)$.

Лемма 1.

$$e^{mt} = \begin{cases} \cos|k|tE + \frac{\sin|k|t}{|k|}m + \frac{1-\cos|k|t}{k^2}k \otimes k\,, & k \neq 0, \\ E\,, & k = 0. \end{cases} \tag{18}$$

где $k \otimes k(y) := (k \cdot y)k$, $y \in \mathbb{R}^3$.

В работе [6] матрица e^{mt} вычислена непосредственно как сумма бесконечного ряда, но когда ответ уже известен, можно просто его проверить. Действительно, e^{mt} — единственное решение задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}A(t) = mA(t), \quad A(0) = E. \tag{19}$$

Упражнение 4. Проверьте, что правая часть $A(t)$ формулы (18) является решением задачи (19). *Подсказка.* Для этого докажите и примените формулу $m^2 = -k^2E + k \otimes k$.
Тем самым лемма доказана.

Подставим (18) в (17) и получим, с учетом условий (15) и (16):

$$\hat{C}(k,t) = (\cos|k|t + \frac{\sin|k|t}{|k|}m)\hat{C}^0(k) - i\frac{1-\cos|k|t}{k^2}k\hat{\rho}(0) \tag{20}$$

$$-\int\limits_0^t ds\,\left[(\cos|k|(t-s) + \frac{\sin|k|(t-s)}{|k|}m)\hat{j}(k,s) + i\frac{1-\cos|k|(t-s)}{k^2}k\frac{d}{ds}\hat{\rho}(s)\right]. \tag{21}$$

Далее, в (21) в последнем подынтегральном слагаемом выполним интегрирование по частям и получим:

$$\hat{C}(k,t) = (\cos|k|t + \frac{\sin|k|t}{|k|}m)\hat{C}^0(k) \tag{22}$$

$$-\int\limits_0^t ds\,\left[\left(\cos|k|(t-s) + \frac{\sin|k|(t-s)}{|k|}m\right)\hat{j}(k,s) + i\frac{\sin|k|(t-s)}{|k|}k\hat{\rho}(s)\right]. \tag{23}$$

Здесь первое слагаемое (22) зависит только от начальных полей, а второе (23) — только от тока и плотности заряда. Из формул (22), (22) следуют утверждения 1) и 2) Предложения 1.

Чтобы отделить действительную и мнимую части комплексного поля C, вернемся в x-представление. Обозначим $K_t(x) = F^{-1}[\frac{\sin|k|t}{|k|}]$ (обратное преобразование Фурье). Известно, см., например, [5, §9, формула (40)][3], что

$$K_t(x) = -\frac{1}{4\pi t}\delta(|x|-|t|) \tag{24}$$

— так называемое *ядро Кирхгофа*; здесь $\delta(|x|-|t|)$ — δ-функция на сфере $S_t := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = |t|\}$. Заметим, что $\frac{d}{dt}\frac{\sin|k|t}{|k|} = \cos|k|t$, а значит, $F^{-1}[\cos|k|t] = \dot{K}_t(x)$. Применив обратное преобразование Фурье к (22), (23), мы можем отделить действительную и мнимую части поля C, т.е. написать отдельные формулы для электрического и магнитного полей. Эти формулы имеют вид

$$E = E_{(0)}(x,t) + E_{(r)}(x,t), \quad B = B_{(0)}(x,t) + B_{(r)}(x,t)\,, \tag{25}$$

где

$$\begin{pmatrix} E_{(0)}(x,t) \\ B_{(0)}(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{K}_t(x) & \nabla\wedge K_t(x) \\ -\nabla\wedge K_t(x) & \dot{K}_t(x) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} E^0(x) \\ B^0(x)\,, \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{pmatrix} E_{(r)}(x,t) \\ B_{(r)}(x,t) \end{pmatrix} = \int\limits_0^t ds\,\begin{pmatrix} -\nabla K_{t-s}(x) & -\dot{K}_{t-s}(x) \\ 0 & \nabla\wedge K_{t-s}(x) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \rho(x,s) \\ j(x,s) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

[3] В этой книге в преобразовании Фурье в показателе экспоненты используется знак “плюс”, поэтому наш результат (24) отличается знаком от результата книги.

Поясним обозначения в формулах (26) и (27) более подробно. $\dot{K}_t$ — короткое обозначение для $\dot{K}_t E$, где E — единичная матрица размера 3×3. Оператор $\nabla \wedge K_t$ действует на 3-мерный вектор A по формуле $\nabla \wedge (K_t E A)$ и, таким образом, представляется матрицей размера 3×3. Те же пояснения относятся к K_{t-s}. Наконец, ∇K_{t-s} — 3-мерный оператор-столбец, который действует на скалярную функцию ρ. Звездочка обозначает операцию *свертки функций*; как известно, прямое или обратное преобразование Фурье переводит произведение в свертку и наоборот. Поскольку (обобщенные) функции в матрице в формуле (26) имеют компактный носитель на сфере S_t, а в формуле (27) — компактный носитель на сфере S_{t-s}, свертки в этих формулах корректно определены, см. [5]. Из формул (25) – (27) следует утверждение 3) Предложения 1.

Заметим, что в формулах (A.24) и (A.25) работы [6], которые соответствуют нашим формулам (26), (27), допущены опечатки.

Выпишем также отдельные формулы для электрического и магнитного полей в представлении Фурье. В [6] эти формулы не написаны, поскольку не требовались для целей работы, но мы сделаем из них некоторые полезные выводы. Итак, из (26), (27), снова переходя в пространство Фурье, получаем:

$$\hat{E} = \hat{E}_{(0)}(k,t) + \hat{E}_{(r)}(k,t), \quad \hat{B} = \hat{B}_{(0)}(k,t) + \hat{B}_{(r)}(k,t); \tag{28}$$

$$\hat{E}_{(0)}(k,t) = \cos|k|t\hat{E}^0(k) + i\frac{\sin|k|t}{|k|}(k \wedge \hat{B}^0(k)), \tag{29}$$

$$\hat{E}_{(r)}(k,t) = -\int_0^t ds\,\left[\cos|k|(t-s)\hat{j}(k,s) + i\frac{\sin|k|(t-s)}{|k|}k\hat{\rho}(s)\right], \tag{30}$$

$$\hat{B}_{(0)}(k,t) = -i\frac{\sin|k|t}{|k|}(k \wedge \hat{E}^0(k)) + \cos|k|t\hat{B}^0(k), \tag{31}$$

$$\hat{B}_{(r)}(k,t) = i\int_0^t ds\,\frac{\sin|k|(t-s)}{|k|}(k \wedge \hat{j}(s)). \tag{32}$$

Слагаемые $E_{(0)}(x,t)$ и $B_{(0)}(x,t)$ зависят только от начальных полей. Проверим, что норма пары полей $(E_{(0)}(\cdot,t), B_{(0)}(\cdot,t))$ в пространстве $L^2 \times L^2$ ограничена равномерно по t. Для этого надо вычислить $\int dx(|E_{(0)}(x,t)|^2 + |B_{(0)}(x,t)|^2)$. Согласно равенству Парсеваля он равен

$$\int dk(|\hat{E}_{(0)}(k,t)|^2 + |\hat{B}_{(0)}(k,t)|^2) = \int dk(\hat{E}_{(0)}(k,t)\cdot\overline{\hat{E}_{(0)}(k,t)} + \hat{B}_{(0)}(k,t)\cdot\overline{\hat{B}_{(0)}(k,t)}).$$

Упражнение 5. Проверьте непосредственным вычислением при помощи формул (29), (31), что

$$\int dk(\hat{E}_{(0)}(k,t)\cdot\overline{\hat{E}_{(0)}(k,t)} + \hat{B}_{(0)}(k,t)\cdot\overline{\hat{B}_{(0)}(k,t)}) =$$

$$\int dk(\hat{E}^0(k)\cdot\overline{\hat{E}^0(k)} + \hat{B}^0(k)\cdot\overline{\hat{B}^0(k)}) + \int dk\frac{\sin|k|t}{k^2}|\hat{\rho}(k,0)|^2. \tag{33}$$

Последний интеграл в этой формуле равномерно по t ограничен интегралом $\int dk\frac{|\hat{\rho}(k,0)|^2}{k^2}$, это конечная величина, поскольку особенность $1/k^2$ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ суммируема — это нетрудно проверить переходом к полярным координатам.

Замечание о свободных уравнениях Максвелла

Может создаться впечатление, что

1) поля $E_{(0)}$ и $B_{(0)}$ представляют собой решение уравнений Максвелла в случае нулевых тока и плотности заряда: $j=0$, $\rho=0$ при заданных начальных полях $E^0(x)$, $B^0(x)$;

2) поля $E_{(r)}$ и $B_{(r)}$ представляют собой решение уравнений Максвелла в случае нулевых начальных полей $E^0=0$, $B^0=0$ и заданных токе и плотности заряда: $j(x,t)$, $\rho(x,t)$.

В общем случае оба эти утверждения неверны. Разберемся подробней в этом вопросе, начав с утверждения 2).

Из формулы (27) для $E_{(r)}$ следует, что $E_{(r)}(x,0)=0$. Поэтому условие $\nabla\cdot E_{(r)}(x,0)=\rho(x,0)$ в общем случае не выполнено, и $E_{(r)}$, $B_{(r)}$ не могут быть решениями системы Максвелла.

Упражнение 6. Пусть $\rho(x,0)=0$ и выполнено уравнение непрерывности (7). Верно ли, что тогда $E_{(r)}$ и $B_{(r)}$ — решение уравнений Максвелла при $E^0=0$, $B^0=0$ и заданных токе и плотности заряда: $j(x,t)$, $\rho(x,t)$?

Ответ: верно.

Подсказка. Вычисления проще проводить а пространстве Фурье, используя формулы (30), (32).

Теперь вернемся к утверждению 1). Из формулы (26) для $E_{(0)}$ следует, что $E_{(0)}(x,0)=E^0(x)$. Поэтому, если $\nabla\cdot E^0\neq 0$, поля $E_{(0)}$, $B_{(0)}$ не могут быть решениями системы Максвелла с нулевыми током и плотностью заряда.

Упражнение 7. Пусть $\nabla\cdot E^0=0$. Верно ли, что тогда $E_{(0)}$ и $B_{(0)}$ — решение уравнений Максвелла при заданных E^0, B^0 и нулевых токе и плотности заряда?

Ответ: верно; воспользуйтесь формулами (29), (31).

Итак, если $\nabla\cdot E^0=0$, то формулы (26) (или (29), (31) в пространстве Фурье) задают решение уравнений Максвелла при заданных E^0, B^0 и нулевых токе и плотности заряда. Говоря, что они задают *группу свободных уравнений Максвелла* или, более коротко, *свободную группу Максвелла.*

Из (33) следует, что

$$\int dx(|E_{(0)}(x,t)|^2+|B_{(0)}(x,t)|^2)=\int dx(|E^0(x)|^2+|B^0(x)|^2), \tag{34}$$

т.е. $L^2\times L^2$-норма пары полей $(E_{(0)}(\cdot,t),B_{(0)}(\cdot,t))$ остается постоянной независимо от t. Это означает, что свободная группа Максвелла *унитарна* в пространстве $L^2\times L^2$.

4. Уравнение Максвелла-Лоренца для движущейся вращающейся частицы

Пусть в поле Максвелла находится заряженная частица с плотностью распределения заряда $\rho(x)$. Плотность распределения массы частицы будем считать пропорциональной плотности распределения заряда, а полную массу частицы — равной 1. Функцию ρ будем считать гладкой, сферически симметричной с компактным носителем:

$$\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),\ \ \rho(x)=\rho_r(|x|),\ \ \rho(x)=0 \text{ при } |x|>R_\rho>0. \tag{35}$$

Физически это означает, что частица несет не точечный, а распределенный в шаре $\{|x|\le R_\rho\}$ заряд — это так называемая *модель Абрагама*, [13].

Допустим, частица перемещается по траектории центра масс $q(t)$ со скоростью $\dot q(t)$, а также вращается вокруг центра масс с угловой скоростью $\omega(t)$. Тогда она определяет для уравнений Максвелла следующие плотность и ток:

$$\rho(x,t)=\rho(x-q(t)),\quad j(x,t)=\dot q(t)+\omega(t)\wedge(x-q(t)))\rho(x-q(t)). \tag{36}$$

Упражнение 8. Проверьте, что для плотности и тока, определенных формулой (36) выполняется уравнение непрерывности (7).

В свою очередь, электромагнитное поле побуждает частицу перемещаться посредством силы Лоренца

$$E(x,t)+(\dot q(t)+\omega(t)\wedge(x-q(t)))\wedge(B(x,t), \tag{37}$$

а также вращаться посредством вращательного момента Лоренца

$$(x-q(t))\wedge[E(x,t)+(\dot q(t)+\omega\wedge(x-q(t)))\wedge(B(x,t))]\rho(x-q(t)). \tag{38}$$

В формулы силы Лоренца и вращательного момента Лоренца можно добавить заданные внешние электрическое и магнитное поля; мы в целях упрощения работы ограничимся формулами без внешних полей.

В итоге, система Максвелла-Лоренца для движущейся вращающейся частицы имеет вид [4]:

$$\dot E(x,t)=\nabla\wedge B(x,t)-(\dot q(t)+\omega(t)\wedge(x-q(t)))\rho(x-q(t)),\quad \dot B(x,t)=-\nabla\wedge E(x,t), \tag{39}$$

$$\nabla\cdot E(x,t)=\rho(x-q(t)),\quad \nabla\cdot B(x,t)=0, \tag{40}$$

$$\dot q(t)=\frac{p(t)}{\sqrt{1+p^2(t)}},\quad \dot p(t)=\int[E(x,t)+(\dot q(t)+\omega(t)\wedge(x-q(t)))\wedge(B(x,t))]\rho(x-q(t))\,dx, \tag{41}$$

$$I\,\dot\omega(t)=\int(x-q(t))\wedge[E(x,t)+(\dot q(t)+\omega\wedge(x-q(t)))\wedge(B(x,t))]\rho(x-q(t))\,dx. \tag{42}$$

Здесь I — момент инерции частицы, который в случае сферически симметричного распределения заряда равен

$$I=\frac{2}{3}\int x^2\rho(x)d\,x. \tag{43}$$

Поясним уравнения движения (41). В них участвуют скорость частицы $\dot q(t)$, а также импульс $p(t)$. Их связь такова, что абсолютная величина скорости $|\dot q(t)|$ всегда меньше 1 — скорости распространения электромагнитного поля, т.е. скорости света в даннной модели. Это означает, что частица *релятивистская*, т.е. движется со скоростью, всегда меньшей скорости света. С другой стороны, на угловую скорость не накладывается априорных ограничений, поэтому в целом эту модель называют *полу-релятивистской*.

У системы (39) – (42) есть некоторые величины, сохраняющиеся при эволюции, т.е. на зависящие от времени t, — так называемые *интегралы движения*.

Упражнение 9. Предположим, что решения системы (39) – (42) достаточно гладкие по x,t и достаточно быстро убывают по x, так что можно применять формулу интегрирования по частям в пространстве $\mathbb{R}^3$. Напомним, что для достаточно гладких и быстро убывающих на бесконечности функций формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int dx\, f(x)\frac{\partial}{\partial x_j}g(x)=-\int dx\,\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)g(x),\quad j=1,2,3.$$

Докажите, что тогда сохраняются следующие величины:

1. Заряд $Q(t):=\int dx\,\rho(x,t)$;
2. Энергия

$$H(E(\cdot,t),B(\cdot,t),q(t),p(t),\omega(t))=\frac{I\omega(t)^2}{2}+\sqrt{1+p(t)^2}+\frac{1}{2}\int\Big(|E(x,t)|^2+|B(x,t)|^2\Big)\,dx; \tag{44}$$

3. Полный импульс

$$P(t):=\int E(x,t)\wedge B(x,t)\,dx \tag{45}$$

4. Момент вращения

$$M(t):=\int x\wedge(E(x,t)\wedge B(x,t))\,dx. \tag{46}$$

Подсказка. Вычислите производную указанных величин по t и убедитесь, что она равна нулю. Для заряда это проверяется непосредственно, а в остальных трех случаях производная равна нулю в силу системы (39) – (42) .

Далее естественно поставить вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для системы (39) – (42). Сформулируем соответствующее утверждение и прокомментируем его доказательство.

Заметим, что интеграл энергии (44) подсказывает определить фазовое пространство системы как пространство состояний конечной энергии. Рассмотрим пространство $L := (L^2, L^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ с нормой

$$\|(E, B, q, p, \omega)\|_L := \|E\|_{L^2} + \|B\|_{L^2} + |q| + |p| + |\omega| \,.$$

Определение 1. *Фазовым пространством системы* (39)-(42) назовем нелинейное подмногообразие $\mathcal{M}$ состояний $(E, B, q, p, \omega) \in L$, для которых E, B удовлетворяют условиям $\nabla \cdot E = \rho(x-q), \nabla \cdot B = 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (35) на плотность распределения заряда. Тогда*

1) для любого $(E_0, B_0, q_0, p_0, \omega_0) \in \mathcal{M}$ задача Коши для системы (39)-(42) имеет единственное решение $(E(x,t), B(x,t), q(t), p(t), \omega(t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ с начальными условиями $E(x,0) = E^0(x), B(x,0) = B^0(x), q(0) = q^0, p(0) = p^0, \omega(0) = \omega^0$;

2) для любого $T \in \mathbb{R}$ отображение $U_T : (E^0, B^0, q^0, p^0, \omega^0) \mapsto (E(\cdot, T), B(\cdot, T), q(T), p(t), \omega(T))$ непрерывно в $\mathcal{M}$;

3) $|\dot{q}(t)| \le q_1 < 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$

4) энергия $H(t) := H(E(\cdot, t), B(\cdot, t), q(t), p(t), \omega(t))$ сохраняется вдоль решений системы:

$$H(t) \equiv H(0), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{47}$$

5) полный момент $P(t) := P(E(\cdot, t), B(\cdot, t), q(t), p(t), \omega(t))$ сохраняется вдоль решений системы:

$$P(t) \equiv P(0), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

Заметим, что на данный момент в литературе нет доказательства этой теоремы с зарядом и током, определяемыми формулой (36). В работе [6] имеется доказательство для движущейся частицы без вращения, т.е. когда $\omega(t) = 0$. В общем случае доказательство аналогично, поэтому приведем краткий **эскиз доказательства** из [6].

Фактически, нам надо доказать существование и единственность, при заданных начальных условиях, решения уравнений

$$\dot{q}(t) = \frac{p(t)}{\sqrt{1 + p^2(t)}}, \quad \dot{p}(t) = \int [E(x,t) + (\dot{q}(t)) \wedge (B(x,t))] \rho(x - q(t))\, dx \tag{49}$$

(это уравнения (41) при $\omega(t) = 0$), где поля $E(x,t), B(x,t)$ выражены по формулам (26) и (27) с плотностью и током $\rho(x,t) = \rho(x - q(t))$, $j(x,t) = \dot{q}(t)\rho(x - q(t))$. Мы можем записать эти уравнения в виде

$$\dot{u}(t) = f_t(u_t(t)), \;\; u(0) = u^0, \tag{50}$$

где $u(t) = (q(t), p(t))$, $u^0 = (q^0, p^0)$; $u_t(t)$ — ограничение функции $u(t)$ на промежуток $[0; t]$.

Заметим, что уравнение (50) **не является обыкновенным дифференциальным уравнением**, поскольку формулы для $E_{(r)}$, $B_{(r)}$ включают интегралы $\int\limits_0^t ds$ от траекторий $\rho(s) = \rho(\cdot - q(s))$, $j(s) = \dot{q}(s)\rho(\cdot - q(s))$, т.е. уравнение (50) оказывается *интегро-дифференциальным уравнением* относительно $u(t) = (q(t), p(t))$. Однако дальнейшие рассуждения относятся не к самому уравнению (50), а к равносильному ему интегральному уравнению

$$u(t) = F_t(u) := u^0 + \int\limits_0^t f_s(u_s)\,ds, \ \ t \in [0,T] \tag{51}$$

и совершенно аналогичны соответствующим рассуждениям теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ключевым моментом является следующее утверждение, которые мы вынесем в очередное упражнение:

Упражнение 10. Для любого $t > 0$ отображение $f_t : C(-t,t;\mathbb{R}^6) \to C(-t,t;\mathbb{R}^6)$ является локально липшицевым. Это значит, что для любого $R > 0$ и u_{1t}, u_{2t} с $\|u_{1t}\|_{C(0,t;\mathbb{R}^6)} < R$, $\|u_{2t}\|_{C(0,t;\mathbb{R}^6)} < R$ выполняется неравенство

$$\|f_t(u_{1t}) - f_t(u_{2t})\|_{C(0,t;\mathbb{R}^6)} \le C(R)\|u_{1t} - u_{2t}\|_{C(0,t;\mathbb{R}^6)}. \tag{52}$$

Подсказка. Формулы (49), (26) и (27) дают явный вид отображения f_t, по которому, с учетом условий (35) на ρ, можно установить свойство (52).

Из локальной липшицевости вытекают два важных следствия:

Упражнение 11. Докажите, что существует такое $R > 0$, что при достаточно малом $t > 0$:

1) отображение $F_t : C([-t,t];\mathbb{R}^6) \to C([-t,t];\mathbb{R}^6)$ переводит цилиндрическое множество $\{u_t : \|u_t\|_{C([-t,t];\mathbb{R}^6)} < R\}$ в себя;

2) отображение F_t является *сжимающим* на этом множестве, т.е.

$$\|F_t(u_{1t}) - F_t(u_{2t})\|_{C([-t,t];\mathbb{R}^6)} \le \lambda \|u_{1t} - u_{2t}\|_{C([-t,t];\mathbb{R}^6)}, \ \ 0 < \lambda < 1.$$

Тогда, по принципу сжимающих отображений, отображение $F_t(u)$ имеет единственную неподвижную точку в пространстве $C(0,t;\mathbb{R}^6)$, которая является единственным решением интегрального уравнения (51), а значит, и исходного интегро-дифференциального уравнения (50).

Далее, для решения на малом промежутке $[-t,t]$, для достаточно гладких и быстро убывающих начальных полей E, B выполнено сохранение энергии

$$H(E(\cdot,t), B(\cdot,t), q(t), p(t)) = \sqrt{1+p(t)^2} + \frac{1}{2}\int \Big(|E(x,t)|^2 + |B(x,t)|^2\Big)\,dx. \tag{53}$$

Поскольку множество гладких быстро убывающих начальных полей плотно в пространстве всех начальных полей $L^2 \times L^2$, а функционал энергии непрерывен на $L^2 \times L^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, получаем сохранение энергии для решения u с произвольными начальными полями $E, B \in L^2 \times L^2$ на малом промежутке $[-t,t]$ (аналогично получаем на $[-t,t]$ сохранение заряда и полного импульса). Из (53) следует, что $q(t), p(t)$ ограничены на $[-t,t]$. Тогда по теореме о продолжении решений получаем, что решение существует при всех $t \in \mathbb{R}$, причем заряд, энергия и импульс сохраняются.

5. Вращающаяся частица с неподвижным центром масс

Рассмотрим также другой частный случай общей системы (39)-(42), когда частица вращается, не меняя положения центра масс. Возможность такого решения связана с интересным свойством уравнений Максвелла — сохранением нечетности электрического и четности магнитного поля.

Упражнение 12. Пусть $E(x,t)$, $B(x,t)$ — решения уравнений (39), в которых положено $q(t) \equiv 0$. Проверьте, что тогда функции $-E(-x,t)$, $B(-x,t)$ также являются решениями этих уравнений.

Возьмем теперь нечетное начальное поле $E^0(x)$ и четное начальное поле $B^0(x)$. Положим $q(t) \equiv 0$. Поля $E(x,t)$, $B(x,t)$, а также $-E(-x,t)$, $B(-x,t)$ будут являться решениями уравнений (39), совпадая при $t = 0$. Тогда по теореме единственности они совпадают при всех $t \in \mathbb{R}$ и мы будем иметь решение с нечетным электрическим и четным магнитным полями:

$$E(-x,t) = -E(x,t), \;\; B(-x,t) = B(x,t). \tag{54}$$

В силу этой симметрии $q(t) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (41). В итоге мы получим упрощенную систему (54)–(57) для частицы с неподвижным центром масс, вращающейся с угловой скоростью $\omega(t)$:

$$\dot{E}(x,t) = \nabla \wedge B(x,t) - (\omega(t) \wedge x)\rho(x), \quad \dot{B}(x,t) = -\nabla \wedge E(x,t), \tag{55}$$

$$\nabla \cdot E(x,t) = \rho(x), \;\; \nabla \cdot B(x,t) = 0, \tag{56}$$

$$I\dot{\omega}(t) = \int x \wedge [E(x,t) + (\omega(t) \wedge x) \wedge B(x,t)]\rho(x)\,dx. \tag{57}$$

Фазовым пространством системы (54)-(57) является нелинейное подмногообразие $\mathcal{M}$ состояний $(\omega, E, B) \in L$, для которых E, B удовлетворяют условиям $E(-x) = -E(x)$, $B(-x) = B(x)$ и $\nabla \cdot E(x) = \rho(x)$, $\nabla \cdot B(x) = 0$; здесь $L = (\mathbb{R}^3, L^2, L^2)$ с нормой

$$\|(\omega, E, B)\|_L := |\omega| + \|E\|_{L^2} + \|B\|_{L^2}.$$

Энергия имеет вид

$$H(\omega, E, B) = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2}\int \left(|E(x)|^2 + |B(x)|^2\right) dx. \tag{58}$$

Полный импульс в силу симметрии (54) тождественно равен нулю:

$$P := \int E(x,t) \wedge B(x,t)\,dx \equiv 0. \tag{59}$$

По Теореме 1 получаем существование и единственность решения задачи Коши для системы (54)-(57):

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (C) на плотность. Тогда*

1) для любого $(\omega_0, E_0, B_0) \in \mathcal{M}$ задача Коши для системы (54)-(57) имеет единственное решение $(\omega(t), E(x,t), B(x,t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ с начальными условиями $\omega(0) = \omega_0, E(x,0) = E_0, B(x,0) = B_0$;

2) для любого $T \in \mathbb{R}$ отображение $U_T : (\omega_0, E_0, B_0) \mapsto (\omega(T), E(\cdot,T), B(\cdot,T))$ непрерывно в $\mathcal{M}$;

3) энергия $H(t) := H(\omega(t), E(\cdot,t), B(\cdot,t))$ сохраняется вдоль решений системы:

$$H(t) \equiv H(0), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{60}$$

Интегрирование системы (54)-(57)

Решения уравнений Максвелла для системы (54)-(57) в пространстве Фурье представляются формулами (28)-(32) с соответствующими плотностью заряда и током. В данном случае плотность и ток равны

$$\rho(x,t) \equiv \rho(x), \quad j(x,t) = (\omega(t) \wedge x)\rho(x). \tag{61}$$

тогда

$$\hat{\rho}(k,t) \equiv \hat{\rho}(k), \quad \hat{j}(k,t) = i(\omega(t) \wedge \nabla_k)\hat{\rho}(k). \tag{62}$$

Свойство (33) примет в нашем случае вид

$$\int dk(\hat{E}_{(0)}(k,t) \cdot \overline{\hat{E}_{(0)}(k,t)} + \hat{B}_{(0)}(k,t) \cdot \overline{\hat{B}_{(0)}(k,t)}) = \int dk(\hat{E}^0(k) \cdot \overline{\hat{E}^0(k)} + \hat{B}^0(k) \cdot \overline{\hat{B}^0(k)}) + \int dk \frac{\sin|k|t}{k^2}|\hat{\rho}(k)|^2. \tag{63}$$

Далее, подставим поля (25)–(27) в уравнение (57) и получим следующее уравнение:

$$I\dot{\omega}(t) = T_1(t) + T_2(t), \tag{64}$$

где

$$T_1(t) := \int dx\, x \wedge (E_{(0)}(x,t) + E_{(r)}(x,t))\rho(x),\ \ T_2(t) := \int dx\, x \wedge [(\omega(t) \wedge x) \wedge (B_{(0)}(x,t) + B_{(r)}(x,t)]\rho(x)\,.$$

Выражение для $T_2(t)$ можно упростить по формуле (1):

$$T_2(t) = \int dx\, [(\omega(t) \wedge x)(x \cdot (B_{(0)}(x,t) + B_{(r)}(x,t)) - (B_{(0)}(x,t) + B_{(r)}(x,t))(x \cdot (\omega(t) \wedge x))]\rho(x) =$$

$$\int dx\, (\omega(t) \wedge x)(x \cdot (B_{(0)}(x,t) + B_{(r)}(x,t)))\rho(x) = \omega(t) \wedge \int dx\, (x \cdot (B_{(0)}(x,t) + B_{(r)}(x,t)))x\, \rho(x)\,. \tag{65}$$

Замечание об ограниченности решений

Из сохранения энергии (58), (60) следует равномерная по $t \in \mathbb{R}$ ограниченность решения $(\omega(t), E(t), B(t))$ в пространстве L. В частности, $|\omega(t)|$ равномерно ограничен. С другой стороны, уравнение (64) замкнуто относительно ω — траектория $\omega(t)$ определяется из этого уравнения однозначно при заданных начальных условиях (ω^0, E^0, B^0). Таким образом, мы имеем косвенное доказательство ограниченности решения уравнения (64). Видимо, можно обосновать ограниченность решения $\omega(t)$, опираясь только на само уравнение (64), но как это сделать, авторам на данный момент не известно.

Более того, если подставить в ток (62), а затем в формулы (28)–(32) произвольную ограниченную функцию $\omega(t)$, может оказаться, что нормы полей $E(t)$ и $B(t)$ в L^2 растут[4]! Таким образом, ограниченность решения $(\omega(t), E(t), B(t))$ обеспечивается именно всей системой уравнений (54)–(57) в целом.

Литература

[1] Джексон Дж. Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965.

[2] Сивухин Д.В. Общий курс физики. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М.: Наука, 1996. - Т. III. Электричество. - 320 с.

[3] Bambusi D., Galgani L. Some rigorous results on the Pauli-Fierz model of classical electrodynamics // Annales de l'I. H.P., section A. - V. 58. - no 2. - 1993. - p. 155-171.

[4] Spohn H. Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field. - Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики, изд. 4-е. - М.: Наука, 1981. - 512 с.

[6] Komech A., Spohn H. Long time asymptotics for the coupled Maxwell-Lorentz equations // Comm. Partial Diff. Eqs. - Vol. 25. - No. 3/4. - 2000. - P. 559-584.

[7] Imaikin V., Komech A., Spohn H. Soliton-like asymptotics and scattering for a particle coupled to Maxwell field // Russian Journal of Mathematical Physics. - Vol. 9. - No. 4. - 2002. - P. 428-436.

[4]Положим $\omega(t) = \cos(t)\omega_0$, где ω_0 — постоянный трехмерный вектор. Подставим в ток, а затем в формулы для полей. Тогда можно выполнить явное интегрирование и убедиться, что L^2-нормы полей растут, как $\sqrt{t}$.

[8] Imaikin V., Komech A., Spohn H. Rotating charge coupled to the Maxwell field: scattering theory and adiabatic limit // Monatshefte für Mathematik. - 142. - No. 1-2. - 2004. - P. 143-156.

[9] Imaikin V., Komech A., Mauser N. Soliton-type asymptotics for the coupled Maxwell-Lorentz equations // Ann. Inst. Poincaré, Phys. Theor. - Vol. 5. - 2004. - P. 1117-1135.

[10] Imaykin V., Komech A., Spohn H. Scattering asymptotics for a charged particle coupled to the Maxwell field // J. Math. Phys. - Vol. 52. - No. 4. - 2011. - P. 042701-042733.

[11] Imaykin V., Komech A., Spohn H. On the Lagrangian Theory for a Rotating Charge Coupled to the Maxwell Field // Physics Letters A. - Vol. 379. -20115. - P. 5-10.

[12] Имайкин В.М. Солитонные асимптотики решений гиперболических уравнений с конечномерными нелинейными возмущениями // Труды МФТИ. - Т. 8. - № 4. - 2016. - С. 35-70.

[13] Abraham M. Theorie der Elektrizitat, Band 2: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. - Leipzig, Teubner, 1905.

Имайкин Валерий Марсович,
учитель математики ГБОУ Школа № 179, г. Москва,
доктор физико-математических наук.

E-mail: ivm61@mail.ru

Никишкина Ольга Вениаминовна,
преподаватель математики Колледжа
космического машиностроения и технологий
ГБОУ ВО МО "Технологический университет",
г. Королев Московской обл., выпускница кафедры
дифференциальных уравнений механико-математического
факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

E-mail: nikishkina.ov@ut-mo.ru

Нервущиеся связи в городе НН

А. И. Бондал

Эссе написано к 85-летию Николая Николаевича Константинова. Ранее опубликовано в Константиновском сборнике № 1, см. matob.ru/files/nn_sbornik_01_final.pdf

«Мудрее замужних —
В дождях и бездонном труде,
В речах и одежде —
Изящней бессмысленно-юных»

И. Ратушинская, Киев 1982 г.

Это человек со встроенным невидимым моторчиком механического происхождения. Откуда взялся этот моторчик, как он выжил на лютом морозе и почему никогда не останавливается — всегда было для меня загадкой. Там была тайна константа, которая держалась в сокрытии благодаря нечеловеческой физической и умственной дисциплине.

Он делал и делал, и никогда не хвастался тем, что делал. Но это не был человек того ограниченного типа, который постоянно работает потому что боится, что если остановиться, то придется задуматься зачем и правильно ли то, что он делает, а думать на такие темы он органически неспособен. Нет, этот человек все время думал, думал о самых разнообразных вещах. Там где типичному русскому требуется улечься на диван, как Обломову, и ничего не делать, чтобы стало приятно и мысли сами потекли «под небом голубым» да «в город золотой», там ему требовалось делать какую-то работу и тогда он мог думать о вещах, совершенно несвязанных с окружающей обстановкой — о том как устроена жизнь и что в ней надо сделать.

В подростковом возрасте я был крайне нетерпим к тому, чтобы мне указывали, что я бездельничаю. В советское время этот укор звучал постоянным рефреном в любой деятельности. Это было обратной стороной неуважения к труду и работающему человеку, если эта работа не была простейшим физическим трудом. Любой другой труд всегда рассматривался как недостаточный. Этот же человек-инопланетянин никогда не поддерживал разговор о чьем-то безделии, но он единственный, кто умел вызвать у меня чувство стыда за мою недостаточную трудолюбивость. Он просто делал что-то, что должны были делать мы вместе — скажем, рыть яму — и когда он уже сделал в 10 раз больше всех остальных, и любой советский человек уже давно попенял остальным, что они бездельники, он продолжал рыть эту яму и рассказывать какие-нибудь увлекательные и иногда поучительные истории, так что все стояли открыв рот у кромки ямы и слушали, вместо того, чтобы хоть чем-нибудь ему помочь. И вот тут моя совесть просыпалась — я начинал суетиться и усиленно ему помогать. Но проходило минут 10, и я уже опять стоял и слушал его, открыв рот. И это при моем крайне критическом отношении ко всяческим словоблудам!

Мне всегда было свойственно наблюдать за людьми, классифицировать их по типам, думать о том, какие есть недостатки в их характере и мышлении, что ими руководит. Он никак не классифицировался. Он не был мягкотел, и порою был вполне жЕсток в каких-то суждениях, а иногда поражал меня тем, что высказывал негативные суждения о вещах, которые люди его круга предпочитают либо не замечать, либо обходить молчанием. Я сначала думал, что он меня проверяет, но потом понял, что он просто видит, что я не зашорен и полагался на мое чувство собственного достоинства, и поэтому бывал откровенным. Но он совершенно не был жестким человеком, и его жесткие суждения не были потребностью кого-то обругать и тем самым почувствовать себя выше, а необходимостью зафиксировать некую объективную реальность, как очередное из многих невидимых человеческих препятствий, с которыми ему постоянно приходилось сталкиваться в его деятельности, и которые надо было принимать такими как они есть, но четко представлять их суть и уровень сопротивления. Как человеку, выросшему в вязкое брежневское время, мне было нетрудно его понять.

Он не был пламенным борцом за правду, который настаивает на своей правоте и идет до конца. Он говорил мне, что если сопротивление среды превосходит разумные пределы, то надо отступить, потому что жизнь дана одна и потратить ее всю на то, чтобы стучаться головой о стену бессмысленно. Лучше зайти с другого конца, сдать одну школу, но прийти в 3 других. И ровно так и появились 179-я, 91-я и 57-я вместо одной «сданной» 7-й. Такие мысли мне, выросшему в среде непримиримых матшкольников, которые еще ничего не сделали сами, и студентов-преподавателей, которые принимали систему матшкол как данное, было удивительно слышать от человека, который все эти матшколы и создал. Не могу сказать, что я полностью следую этому совету, увы. Но это уже скорее проблема моего жестоковыйного упрямства, мало заметного окружающим.

Я навсегда останусь ему благодарен за то письмо из потустороннего мира, где мне предлагалось прийти на собеседования, попытаться решить задачи и поступить в математическую школу. Я был восьмикласник из обычной школы на окраине Москвы, в Кузьминском парке, где чтобы выйти из школы и не быть побитым местной шпаной уже было целым искусством, предполагавшим сложное сочитание находчивости и силы воли. Эта рощица у выхода, где районные блатные короли руководили тусовкой приблатненных подростков, была настоящим испытанием для каждого школьника. Там вас проверяли на вшивость, и с каждой неделей экзамен становился все жестче.

Кузьминки — новый район, который вырос с моим поколением. Я учился в классе Е, в следующем году классы уже доходили до З, хотя изначально предполагалось, что в одной параллели будет не далее буквы Г. Это был наш локальный кузьминский бэби-бум, который привел к резкому росту преступности, когда я стал подростком. Мама меня с детства отправляла в магазин купить еды. Вначале никакой проблемы не было. Но с годами обстановка ухудшилась до того, что я уже мозжечком чувствовал где ходить опасно и где у меня попытаются отобрать деньги. Не быть вписанным в воровскую иерархию ни на правах приблатненного, ни шестерки, ни опущенного было психологически очень тяжело.

Мама всегда говорила мне, что я должен поступить в математическую школу, но на уроках математики было скучно, и я понятия не имел что решать математические задачи может быть увлекательно. Районные олимпиады я посещал только потому, что об этом меня просила школьная учительница математики, — там тоже было скучно. Но имеено хороший результат на районной олимпиаде и вызвал к жизни это письмо, которое я вертел в руках и вспоминал рощицу у входа в мою школу.

Письмо было подписано им, просто безо всяких регалий, что уже само по себе было очень странно (гораздо позже я с удивлением узнал от него, что просто никаких регалий у него и не было). Он обращался ко мне не как к школьнику, а как к равному. Это уже было удивительно. Это письмо радикально изменило мою жизнь. Я поехал, решил достаточное количество задач, и поступил. Уже там, во время приема решений задач, мы общались первый раз. Он запомнил какой-то эпизод этой сдачи, который я уже забыл, и напоминал мне потом о нем много лет. Думаю, что он и сейчас его помнит.

Он, конечно, не был со мной совершенно откровенным. У него была тайна, в которую он не спешил меня посвящать, потому что видел, что я держу расстояние. Вероятно, он был масоном, так как его деятельность на протяжении всей жизни — это типично масонское мессианство. Оставьте себе свои досужие представления о масонстве, основанные на полном незнании предмета. Я не буду убеждать вас — жителей постсоветского мира, — что это не теория заговора, и что без масонской поддержки вы не получите руководящий пост в полиции Британии и не станете президентом французского университета. Даже если по какой-то причине он отказался быть членом масонской ложи, они точно научили его как это делать, и он делал. По целям его деятельность также была чисто масонского свойства. Но несомненно у него была и другая тайна. Мне не надо было ее знать, и вам не стоит.

Он нечасто просил меня что-то сделать, хотя отлично знал, что я чувствую себя обязанным ему. Вероятно, ему не хотелось, чтобы я испытывал неприятные ощущения от всей этой образовательной деятельности, так как понимал, что передо мной стоят другие задачи. Но когда он просил, то я всегда делал (или так мне кажется теперь :-)). Пожалуй, главное — это когда он попросил меня, десятикласника, вести кружок для восьмиклассников в Университете. В принципе, это дело было мне не по чину, но он не мог найти подходящего студента для этой работы. Я согласился, хотя попинать футбольный мяч во дворе рядом с 57-й было веселей. Но вести кружок в Университете было тоже интересно. Даже подходить весной 78-го года к этому огромному нависающему зданию , которое однозначно воспринималось как храм науки и поначалу вызывало трепет, уже было сладостно. К тому времени я уже решил, что сделаю все возможное, чтобы поступить на мехмат, поэтому побывать там заранее и даже почувствовать себя преподавателем было очень приятно. Но я понимал, что играю не свою роль, и даже почувствовал себя неловко, когда выяснялось что восьмикласники воспринимают меня за студента, несмотря на мою школьную форму...

В конечном счете все просто — люди разные, есть такие, которые прут как танки армии Гейнца Вильгельма Гудериана, а есть такие, которым нужен он, чтобы помог вовремя реализоваться. Вот только эта помощь человека человеку кроме непосредственной метафизической составляющей должна нести в себе еще и благую весть, которую трудно бывает передать ввиду неблагоприятной общей обстановки или неготовности объекта к восприятию. Я думал раньше, что весть сама дойдет со временем, а с годами убеждаюсь, что нет, может дойти далеко не полнотью или частично затеряться в наслоениях времени. Он же всегда точно знал кому и как ее можно донести.

Но как творцу системы ему неизбежно приходилось иногда что-то упрощать и усреднять, чтобы сделать ее работающей. Думаю, понимание иной раз мешало ему действовать, и он намеренно отодвигал его на задний план. Однако постоянное обдумывание того как надо сделать, и чем, в частности, пренебречь помогало ему контролировать намечавшиеся перекосы и избегать вырождения еще не подступах. Со временем система выросла до таких размеров, что ни он, ни какой другой человек единолично уже не мог контролировать ее саморазвитие. Она институализировалась и стала независимой. В результате, как мы знаем, встал вопрос о правомерности ее существования, но это уже другая история...

И да, уже до конца жизни мне будет стыдно перед ним за один эпизод. Перед защитой докторской я раздумывал кого я должен пригласить. Это должны были быть люди, которые оказали влияние на то, что я дошел до жизни такой. Естественно, я пригласил и его. Но там с устатку или много выпивши, я крайне глупо пошутил и обидел его. Остается надеяться, что он все понял и простил меня. Эти заметки — моя просьба о прощении и благодарность за все.

Бондал Алексей Игоревич,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Математического
института имени Стеклова РАН, заведующий
Лабораторией Алгебраической Геометрии
и Гомологической Алгебры МФТИ.

E-mail: bondal@mi.ras.ru

Кружок геометрии для 4-7 классов

М. А. Дубовицкая, Н. В. Дубовицкая

В статье описан опыт проведения занятий кружка по геометрии для учащихся 4-7 классов, с указанием педагогических принципов, которыми руководствуются преподаватели.

Несколько раз столкнувшись с необходимостью вести школьный курс геометрии в обычном седьмом классе, мы стали размышлять, почему же это вызывает у школьников огромное количество затруднений. Курс дается тяжело и идет настолько со скрипом, что уже к середине 7 класса геометрия пополняет список нелюбимых предметов, а к концу девятого класса заметной части детей трудно решить даже необходимый минимум из двух примитивных геометрических задач, чтобы сдать ОГЭ хотя бы на тройку.

Если мы откроем «Избранные главы алгебры» И.Р. Шафаревича, то в предисловии прочитаем: «В школьном математическом образовании алгебре выпала доля Золушки, а геометрии — Любимой Дочки». Автор подчеркивает красоту стройного здания здания геометрии со строгим выводом утверждений, начиная от самых простых и постепенно идя в сторону все более нетривиальных, в то время как школьный курс алгебры представляется странной смесью полезных правил, рассуждений и упражнений, выхваченных из собственно алгебры, теории чисел, комбинаторики и теории вероятностей. Но заметим: это точка зрения профессионального математика, чья глубина знаний позволяет видеть красоту стройной теории.

Как же так? Как Любимая Дочка стала объектом ненависти и областью тотального непонимания для огромного количества школьников? Причин тут множество, некоторые лежат прямо на поверхности.

Так уж устроен наш мозг, что визуальную информацию он воспринимает быстрее текстовой: чем доступнее и проще, тем привлекательнее. Это в целом большая проблема современного школьного образования, учитель не может конкурировать с Instagram, но именно это ему и приходится ежедневно делать. Откройте самый распространенный в России учебник под редакцией Л.С. Атанасяна: много мелкого шрифта, невыразительные картинки, минимум цветов, сложное содержание. Семикласснику требуется прикладывать большое количество усилий, чтобы пройти путь «прочитать текст — понять, что в задаче происходит — сделать чертеж, соответствующий условию, — понять, как задачу решать, — записать свое решение полно и последовательно». А уж какое количество усилий приходится прикладывать учителю... Поэтому стали набирать популярность всевозможные сборники задач на готовых чертежах: не надо напрягаться и самому визуализировать условие, можно работать с уже сделанной за тебя картинкой. Можно пойти дальше и подключить программы вроде GeoGebra или Desmos, позволяющие делать движущиеся чертежи, поэтому ситуация «сделал неудачный чертеж, надо перечертить под другим углом» тоже отмирает, достаточно просто покрутить картинку на экране.

На самом деле и готовые чертежи, и эти программы прекрасны, и мы сами их любим и используем, но помним, что они не только помощники, но и костыли. Сначала сложно сделать чертеж по тексту, потом просто сложно сделать чертеж. Пальчики, которые привыкли скользить по тачпаду и с бешеной скоростью клацать по клавиатуре, отказываются слушаться, когда в руках оказываются карандаш, циркуль и линейка. Заметим, что традиционных уроков труда и черчения в большинстве школ тоже нет, с чего бы пальчикам быть послушными?

Далее, учебники геометрии выстроены логично, строго, последовательно... и неестественно. Аксиоматический подход — это то, к чему ученые приходят после столетий мытарств и бесплодных попыток, после решений на ощупь и наугад, после того как опытным путем были набиты все шишки. Никакая теория не родилась из задания аксиом. Было бы естественным в познании геометрии пройти путь, похожий на тот, который уже прошло человечество, хотя бы кратко. Совершенно точно — большинство теорем ученые сначала "видели", а потом уже доказывали. Для успешного освоения геометрии очень важно сформировать ту самую насмотренность, а также дать возможность набить шишки в процессе.

Кроме того, перед школьной математикой стоят разные задачи: и показать, как устроена доказательная наука, и показать, как эта наука применяется в реальной жизни. Наша программа мало уделяет этому внимания, но не будем ограничиваться исключительно российскими стандартами. Международный бакалавриат (IB) в своей системе оценивания выделяет четыре критерия, один из которых — "Applying mathematics in real-life contexts". Известно, что древние египтяне умели точно вычислять площадь трапеции, однако также точно известно, что доказать верность этой формулы они не могли: они пришли к ней опытным путем. У детей на школьных уроках геометрии такой опыт отсутствует.

В монографии И.П. Костенко "Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы» подробно рассматриваются выверенные жизнью законы понятного обучения: «Преподавание любого предмета должно быть постепенным и подробным, идти от знакомого к незнакомому, от конкретного к абстрактному, от простого к сложному». К сожалению, внедрение идей «высокого теоретического уровня» (ВТУ) существенно потеснило эти законы в методике преподавания как в школе, так и в ВУЗах. Ситуация со школьной геометрией — один из многочисленных примеров этого. Нам ближе позиция И.П. Костенко: «Логическая систематизация — это систематизация дедуктивная, при которой последовательность изложения идет «от общего к частному»... В педагогике же закономерность обратная. Только от «частного» можно **понятно** перейти к «общему»."

Программа математики в 1-6 классах отлично готовит детей к алгебре. Уравнения они решают прямо с первого класса, с буквенными выражениями знакомы не понаслышке, с координатной плоскостью успели подружиться. Что с геометрией? Конечно, какие-то задачи геометрического характера им тоже попадались, например, посчитать площадь прямоугольника или объем прямоугольного параллелепипеда, правда, это про вычисления, а не про построения, можно просто выучить формулу и подставлять числа. Еще в начальной школе дети проходят разные виды углов и учатся пользоваться транспортиром, в шестом классе даже площадь круга изучается, только почему-то никто ее к восьмому классу не помнит. Все задачи вроде «два треугольника пересеклись так, что их пересечение — четырехугольник, как это могло быть?» идут как задача со звездочкой, то есть идут мимо. На самом деле это проблема глубже, чем кажется на первый взгляд. За пространственное мышление отвечают нервные клетки неокортекса. Биологи доказали, что молодые нейроны, сидящие без работы и не налаживающие коммуникацию с другими нейронами, умирают. Например, хорошо известен факт, что если ребенка не научить говорить до пяти лет, он уже никогда не заговорит. Применительно к геометрии это означает буквально следующее: если шесть лет заниматься развитием пространственного воображения постольку-поскольку, а потом в седьмом классе обрушить на детей аксиоматический подход, то... выживут только сильнейшие.

После того, как мы раскритиковали всех и вся, возник вопрос, а что же с этим делать? Из этих размышлений родилась идея организовать кружок по геометрии, он существует всего полтора года, и далее мы немного расскажем о том, как он устроен, и что мы успели увидеть за это время.

Кружок был организован в формате часового занятия раз в неделю и велся для двух групп: 4-5 классов и 6-7 классов. Как выяснилось позже, деление на группы было сделано скорее ради нашего удобства, потому что очень быстро стало понятно, что нет никакой необходимости делать двухуровневую программу, дети справлялись с задачами одинаково, часто младшие решали быстрее старших. Кстати, поставить руку и научить уверенно пользоваться циркулем и линейкой младших было проще. Размышляя, почему разновозрастные дети справлялись одинаково хорошо, мы пришли к выводу, что причина кроется в наглядности геометрии. Если убрать из геометрии аксиоматические «занудства» и строгие записи доказательств, то ее объекты становится очень понятными и допускающими использование большого количества наглядных материалов: макеты из бумаги, из скульптурного пластилина и деревянных шпажек, пластиковые модели, кубики лего, вращающиеся чертежи из GeoGebra... Когда предмет можно "пощупать", изучать его становится проще и интереснее.

В целом появление геометрии именно в седьмом классе вызвано вовсе не тем, что раньше дети не в состоянии ее понять. Нет, они не в состоянии до этого возраста понять алгебру, поскольку в ней появляется много работы с буквенными выражениями, за которыми уже не прячутся никакие конкретные задачи, а это — следующий шажок в абстрактном мышлении, и до него нужно дорасти в прямом смысле. Примерно к 12-13 годам завершается третий этап развития лобных долей, после чего можно содержательно изучать абстрактные объекты, все эти буковки и переменные. То есть геометрия появляется просто как дополнение к алгебре, и в целом никто не мешает вводить ее на пару лет раньше.

Практически на каждом занятии мы около половины времени обсуждали задачи и вторую половину времени чертили.

Темы занятий шли небольшими блоками, не слишком сильно зависящими друг от друга. Мы старались чередовать планиметрию и стереометрию, задачи на черчение с задачами на макетирование, чисто математические задачи и задачи прикладного и даже декоративного характера.

Первый блок был посвящен базовым геометрическим объектам: прямая, луч, отрезок, угол. Здесь было много классических несложных задач на черчение: разделить отрезок пополам; провести перпендикуляр к прямой через произвольную точку; провести параллельную прямую через точку; отложить угол, равный данному; разделить угол пополам; построить равносторонний треугольник и правильный шестиугольник; построить квадрат; построить треугольник, равный данному. На этом этапе мы еще ничего строго не могли доказать, и не доказывали, а формировали насмотренность, старались, чтобы алгоритм построения крепко усвоился, и просили делать проверку равенства отрезков с помощью циркуля.

От детских чертежей мы не требовали аккуратности и отслеживания толщины линий, как это было когда-то на уроках черчения, но мы следили, чтобы дети использовали линейку в древнегреческом смысле: исключительно как возможность прочертить прямую. Через некоторое время мы завели покрашенные краской линейки, на которых не видно делений, чтобы соблазна что-то измерить не было.

Заметим, что вышеперечисленные задачи есть в школьном курсе геометрии 7 класса, но зачастую для их качественного освоения и осмысления не остается времени. Классический курс подразумевает сначала теорию, потом практику; на практику часто не хватает времени. Получается, что даже если ребенок выучил признаки равенства треугольников и может доказать, что на такой-то картинке такие-то треугольники равны, это вовсе не означает, что тот же серединный перпендикуляр он сам начертит.

Мы же пошли от обратного: от практики к теории.

Те же признаки равенства треугольников — одна из основных тем в 7 классе — не выглядят естественными, они спускаются сверху, а дальше идет натаскивание на поиск нужных компонент. Мы же выдавали детям различные двойки/тройки/четверки компонент и просили начертить треугольник с помощью циркуля и линейки. Постепенно у них формировалось понимание, когда это сделать нельзя, когда можно однозначно, а когда есть несколько вариантов построения треугольника. Тем самым мы подменили признаки равенства треугольников на однозначность построения треугольника по имеющимся данным. После этого и равные треугольники, и подобные стали видеться намного лучше, и было совсем несложно вернуться к первым задачами на построение и уже доказать, почему они были решены верно.

Какие еще темы отлично ложатся в качестве продолжения?

Подобие треугольников, отношение площадей подобных фигур (здесь можно и чертить, умея увеличивать стороны в целое число раз, и клеить большие фигуры, составляя их из подобных маленьких), окружности вписанные и описанные, четыре замечательные точки треугольника и их свойства, развертки платоновых тел, а также доказательство, что пятью платоновыми телами правильные многогранники исчерпываются. Разумеется, при черчении развертки додекаэдра нам пришлось немного слукавить, поскольку начертить правильный пятиугольник без знания тригонометрии и иррациональных чисел можно только по инструкции, но без понимания, почему действовать надо именно так. Мы обсуждали интересные задачи, связанные с окружностями, например, подобрать для треугольника с известными сторонами три окружности с центрами в его вершинах, чтобы они попарно касались друг друга. Были и разнообразные задачи на клетчатой бумаге (тут нам помогли геодоски и мы даже подобрались с пониманию формулы Пика), и треугольник Серпинского. Мы бережно храним все работы наших учеников и можем проследить за ростом их навыков, хотя за красотой картинки совершенно не гонимся.

Кроме этого, мы старались научить детей понимать текстовые геометрические задачи и делать чертежи в соответствии с условием. Это отдельный навык, не так просто вырабатываемый, потому что он требует критического подхода к своим действиям и постоянных вопросов типа "а можно ли начертить иначе?". Кстати, если вы заглянете в типовой вариант ОГЭ или ЕГЭ по математике, то обнаружите, что в тестовой части все геометрические задачи сопровождаются чертежом, и только задачи второй части требуют от школьника умения построить чертеж в соответствии с условием. Мы постарались сделать это красиво, например, читали тексты Альбрехта Дюрера по построению геометрических узоров.

Еще одна важная тема нашего кружка — теорема Пифагора. В школьной программе она появляется только в 8 классе, хотя понять ее может и третьеклассник. Но считается, что надо сначала рассказать на алгебре про иррациональные числа и квадратные корни, а то вдруг дети найдут самостоятельно корень из 2 и испугаются. (Заметим, что для доказательства теоремы числа вообще не нужны.) В итоге в восьмом классе на детей навешиваются практически одновременно и теорема, и ее применение, и иррациональности, и квадратные уравнения на уроках алгебры.

Мы разделили эти задачи и снова пошли от практики к теории. Поработали с египетским треугольником, потом дали детям возможность самим отыскать парочку Пифагоровых троек, потрогать их руками на верёвочке, заметить трюки с подобием, порешать задачи с целыми ответами.

После этого все иррациональности в 8 классе лягут у них на очень знакомый материал и затруднений не вызовут.

Блоков по стереометрии было несколько. Изображения многогранников, видимые и невидимые ребра и грани. В нашей школьной практике были случаи, когда некоторые десятиклассники запоминали, как изображать, пирамиду, заучивая количество клеточек. Звучит совершенно дико, но на самом деле у детей нет времени сделать макет, повертеть его, сделать наброски макета под разными углами, размышляя, какой удобнее. Построения сечений куба и пирамиды по трем точкам методом следов; объем и площадь поверхности фигур, составленных из единичных кубов; построение трех проекций сложносоставных многогранников и, наоборот, восстановление многогранника по его проекциям.

Мы много времени обсуждали различные многогранники и их сечения. Какие многоугольники могут получиться в сечении куба или четырехугольной пирамиды? Сколькими способами можно получить в сечении куба квадрат? Здесь была возможность и собрать макет нужной фигуры, и потренироваться с черчением эскизов на бумаге.

Традиционный педагогический трюк, который мы постоянно используем, — время от времени возвращаться к уже решенным задачам, повторять их и показывать, а как теперь их можно развить дальше. От деления отрезка пополам — к свойствам медианы, от удвоения отрезка — к подобным треугольникам, от площади прямоугольника — к площади многоугольников.

Отдельно хочется поделиться основными источниками для вдохновения и поиска задач:

1. Перельман Я.И. Занимательная геометрия. - М., Римис, 2016.
2. Сопрунова Н.А., Посицельская М.А., Посецельский С.Е. Математика и информатика, учебники для начальной школы. - М., МЦНМО, 2018.
3. Истомина Н.Б., Редько З.Б. Наглядная геометрия. - М., Просвещение, 2018.
4. Учебники MYP IB (1-3). - Haese & Harris Publications, 2008.
5. Игра “Пифагория”. URL:
https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hil_hk.pythagorea&hl=ru&gl=US
6. Игра GeoCon. URL:
https://apps.apple.com/us/app/разблокировать-все-уровни/id919438593?l=ru

Заключение. Наш кружок работает всего второй год, поэтому делать глобальные выводы, конечно, рано. Он не самый популярный из математических кружков, отчасти потому что результаты работы на нем трудно измерить. То ли дело олимпиадные кружки и поступления в топовые матшколы. Про некоторых наших учеников 6 класса в прошлом году сразу было понятно, что они проявляют заметные способности к математике, некоторые из них в конце года поступили в математические школы. Но были и дети, которые ярких способностей не проявляли, но методично весь год работали и заметно выросли. Сейчас эти дети пошли в седьмой класс, у них началась обычная школьная геометрия, и, к счастью, у нас есть возможность узнать у их учителей и родителей, как обстоят дела. Было приятно узнать, что эти дети — не самые сильные и яркие на алгебре — на геометрии просто заблистали. Кажется, эти слова — лучшая оценка нашей работы.

Иллюстрации. Рис. 1-2 — занятия кружка.

Рис. 1.

Рис. 2.

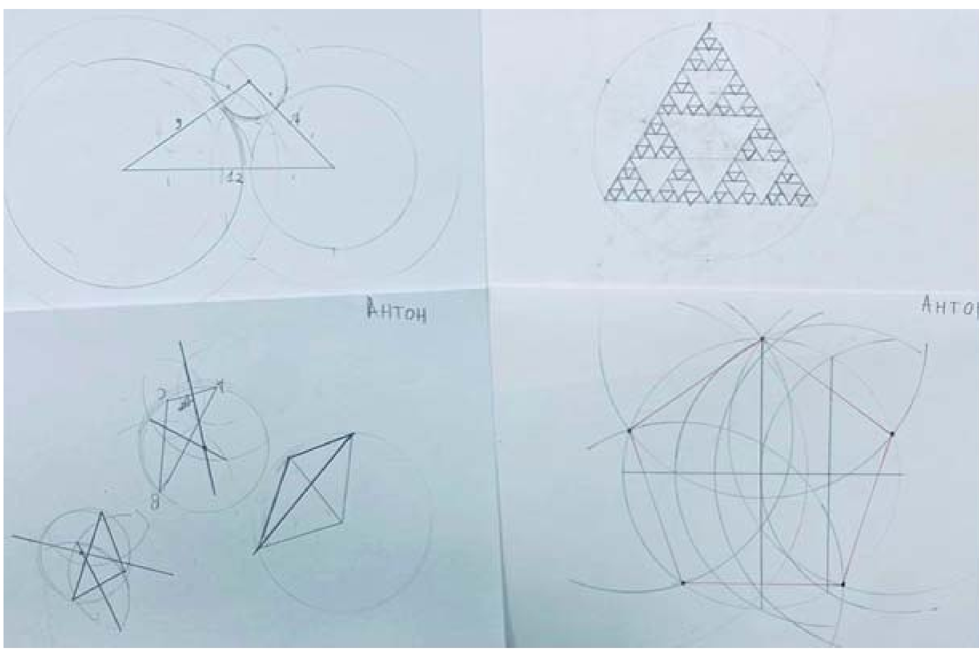


Рис. 3. Работы одного из учеников, динамика на протяжении трех месяцев.

Дубовицкая Мария Александровна,
учитель математики ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.

E-mail: dubovitskayam@mail.ru

Дубовицкая Наталья Викторовна,
учитель математики ГБОУ Школа № 179 г. Москвы,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: doubov_nat@mail.ru

Асимптотическое распределение простых чисел и дзета-функция Римана. Исторический обзор (XVIII—XX века)

А. В. Дубовицкий, С. И. Комаров

В статье дан обзор математических идей и методов, связанных с задачей о распределении простых чисел на числовой прямой и применением дзета-функции Римана к исследованию этой задачи. Элементарное введение включает задачи, с одной стороны, приводящие к важному понятию бесконечного ряда, а с другой — доступные учащимся средней школы.

1. Небольшое элементарное введение

На математических кружках, в профильных классах дают арифметические задачи, ведущие к важным математическим понятиям.

Задача 1. Найдите суммы

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$;

б) $\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\dfrac{2}{5\cdot 7}+\dots+\dfrac{2}{99\cdot 101}$.

Задача 2. Докажите, что

а) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dots+\dfrac{1}{100^2}<2$;

б) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{98}-\dfrac{1}{99}+\dfrac{1}{100}>\dfrac{1}{5}$;

в) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{97}-\dfrac{1}{99}<\dfrac{13}{15}$.

Задача 3. Найдется ли такое количество слагаемых, что сумма $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\ldots$ будет больше 10?

Эти задачи ведут к понятию *ряда* — алгебраической суммы бесконечного числа слагаемых. Так, задачи 2, 3, а также геометрическая прогрессия из стандартного курса математики приводят к рядам, сыгравшим выдающуюся роль в истории развития математики:

(1) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$ — *гармонический ряд*;

(2) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$ — сумма *бесконечной геометрической прогрессии*;

(3) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}+\ldots$ — бесконечная *сумма обратных квадратов*;

(4) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\ldots+\dfrac{(-1)^n}{n}+\ldots$ — *знакопеременный гармонический ряд*;

(5) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\ldots+\dfrac{(-1)^k}{2k+1}+\ldots$ — *ряд Лейбница.*

Оказывается, что гармонический ряд (1), хотя и медленно, но бесконечно растет, то есть с ростом числа слагаемых сумма $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ становится больше любого наперед заданного числа.

Задача 4. Докажите сформулированное утверждение про гармонический ряд.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии (2), наоборот, ограничена, то есть с ростом числа слагаемых сумма $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$ остается меньше некоторого фиксированного числа. Более того, с ростом n эта сумма все меньше и меньше отличается от числа 2. В этом случае говорят, что ряд *сходится к числу* 2 или *сумма ряда равна* 2, а сам ряд называют *сходящимся*.

Задача 5. Докажите сформулированные утверждения про бесконечную геометрическую прогрессию.

Похожий ряд $\frac{1}{1}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+...+\frac{1}{10^n}+...$ связан с известной апорией древнегреческого философа Зенона о том, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит неторопливую черепаху. А Лев Толстой в романе "Война и мир" (начало 3-й части III тома) пересказывает парадокс про Ахиллеса и черепаху.

Бесконечная сумма обратных квадратов (3), знакопеременный гармонический ряд (4), ряд Лейбница (5) (см. об этих рядах далее в этой статье) тоже оказываются сходящимися: ряд (3) сходится к $\pi^2/6$, ряд (4) — к $\ln 2 = \log_e 2$, ряд (5) — к $\pi/4$. Появление в этих суммах чисел π и e вызывало удивление и восторг в конце XVII века. Методы работы с рядами разрабатывали математики второй половины XVII и XVIII веков. Среди них Ньютон, Лейбниц и Эйлер.

Закончим это небольшое введение цитатой из "Войны и мира":

> "Только допустив бесконечно-малую величину и восходящую от нее прогрессию до одной десятой и взяв сумму этой геометрической прогрессии, мы достигаем решения вопроса. Новая отрасль математики, достигнув искусства обращаться с бесконечно-малыми величинами, и в других более сложных вопросах движения дает теперь ответы на вопросы, казавшиеся неразрешимыми".

2. Функции $\zeta(s)$ и $\pi(x)$

Гармонический ряд (1) расходится, а ряд (3) сходится. Оказывается, что сходится любой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\delta}=\frac{1}{1^\delta}+\frac{1}{2^\delta}+\frac{1}{3^\delta}+...,\ \text{если}\ \delta>1.$$

Например, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[100]{n}}$. Тогда мы для $\delta>1$ можем рассмотреть функцию $\zeta(\delta):=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\delta}$, где $\zeta(\delta)$ — сумма ряда, стоящего справа (дзета-функция).

Идея Эйлера состояла в том, чтобы расширить область определения функции ζ на область комплексных чисел. Эйлер ввел в рассмотрение дзета-функцию на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$: $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, где $s=\delta+it\in\mathbb{C}$, $\delta=\operatorname{Re}s>1$.

В силу того, что $|n^{-s}|=n^{-\delta}$, по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости рядов аналитических функций, $\zeta(s)$ будет аналитической функцией при $\operatorname{Re}s>1$. (См [7], гл. 2, параграф 1).

Одним из первых, кто начал исследовать дзета-функцию, был Леонард Эйлер (1707–1783), который был учеником Иоганна Бернулли (1667–1748), брата Якова Бернулли (1654–1705). Якову удалось вычислить суммы нескольких бесконечных рядов, но ему не удалось найти $\zeta(2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Он писал: "Если кому-либо удастся найти то, что до сих не подавалось нашим усилиям, и если он сообщит это нам, то мы будет очень ему обязаны".

Эйлер вычислил не только $\zeta(2)$, но и вообще $\zeta(2k)$, хотя его рассуждения были столь же гениальны, сколь и не строги при современном ему развитии аппарата математического анализа и теории функций комплексной переменной. Лишь позже научились раскладывать функции, дифференцируемые при любом $s \in \mathbb{C}$, по своим нулям в бесконечное произведение. Приведем рассуждение Эйлера (см [1], гл. II).

Предположим, что уравнение степени $2n$ имеет вид:

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - ... + (-1)^n b_n x^{2n} = 0$$

и $2n$ различных корней $\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2 ... \beta_n, -\beta_n$.

Тогда

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - ... + (-1)^n b_n x^{2n} = b_0 \left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right) ... \left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$$

и по формуле Виета $b_1 = b_0 \left(\frac{1}{\beta_1^2} + ... + \frac{1}{\beta_n^2}\right)$.

Эйлер рассматривает бесконечный многочлен (степенной ряд)

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... \qquad \text{(формула Тейлора)},$$

который, очевидно, имеет следующие корни: π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, -3π, ... и, по аналогии с обычными многочленами, заключает, что

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... = \left(1 - \frac{x^2}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) ... ,$$

откуда,

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ... ,$$

то есть $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Рассматривая уравнение $\sin x = 1$ аналогичным образом, Эйлер вычислил сумму

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}.$$

Это знаменитый результат Лейбница. Открыв его он (Лейбниц) записал: “Нечетные числа радуют Бога”.

Сравнивая следующие коэффициенты в степенном ряду $\frac{\sin x}{x}$, Эйлер вывел общую формулу:

$$\zeta(2k) = \pi^{2k}(-1)^{k-1}\left(\frac{B_{2k}}{(2k!)}\right)2^{2k-1},$$

где $k \in \mathbb{N}$, B_k — числа Бернулли, которые определяются, как коэффициенты степенного ряда

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

При изучении дзета-функций Эйлера также вывел знаменитое тождество:

При $\operatorname{Re} s > 1$, $\zeta(s) = \prod\limits_{p \in P}(1 - p^{-s})$

где p — множество всех простых чисел. Так как $|p^{-s}| < 1$, а значит $\frac{1}{1 - p^{-s}} = \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + ...\right)$, то доказательство формулы вытекает из **основной теоремы арифметики**:

Каждое натуральное число однозначно (с точностью до порядка сомножителей) раскладывается в произведение простых чисел.

Перейдем теперь к распределению простых чисел на числовой прямой, определив функцию $\pi(x)$ (количество простых чисел не превосходящих x): $\pi(x) := \sum\limits_{p \le x} 1$, где p — простое число.

Еще в древности было известно, что простых чисел бесконечно много, то есть $\pi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

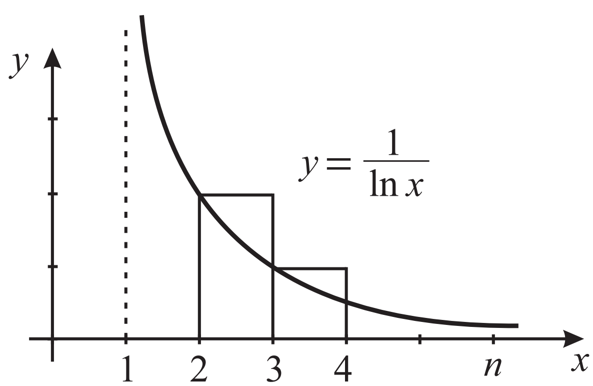
Но арифметикам всегда хотелось как можно точнее выяснить порядок роста $\pi(x)$. Эйлер сформулировал, а А. Лежандр доказал, что $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$.

Также А. Лежандр, пользуясь таблицами простых чисел, указал приближенную формулу для $\pi(x)$:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - B},$$

где B = 1,08366.

К.Ф. Гаусс (1777–1855) еще в 16-летнем возрасте предположил, что вероятность того, что $n \in \mathbb{N}$ — простое, равна $\frac{1}{\ln n}$ (см. [3], стр. 12-15). Вот как он это объясняет: $\pi(x)$ должно быть приближенно суммой вероятностей $\pi(x) = \sum\limits_{2 \le n \le x} \frac{1}{\ln n} + E_1(x)$, где $E_1(x) = o\left(\sum\right)$. Преобразуем эту сумму.



Легко показать, что

$$\left| \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t} - \sum_{2 \le n \le x} \frac{1}{\ln n} \right| \le 2. \quad \text{Значит,} \;\; \pi(x) = \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t} + E_2(x),$$

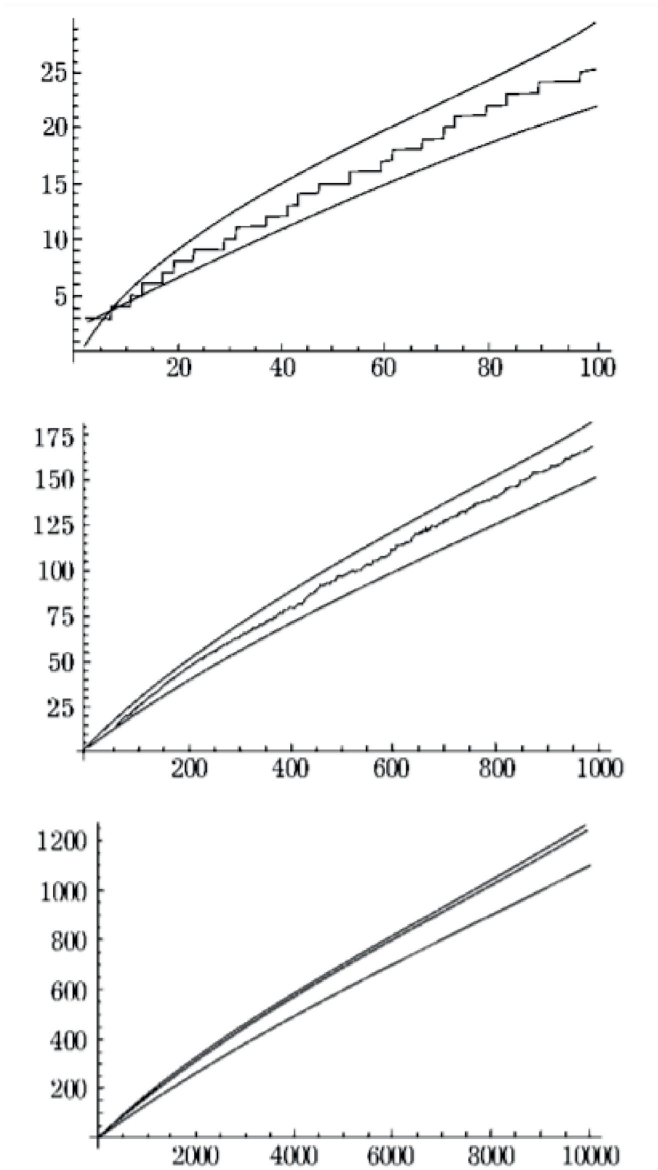
где $E_2(x)$ не слишком отличается от $E_1(x)$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \int\limits_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} - \frac{2}{\ln 2}, \quad \text{т.е.} \quad \pi(x) = \frac{x}{\ln x} + E_3(x),$$

где $E_3(x) = o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ при $x \to \infty$.

Это и есть *асимптотический закон распределения простых чисел*, доказанный только в 1896 г. Ж. Адамаром и Ш. Валие-Пуссеном; позже мы к нему еще вернемся.

Очевидно, что $Li(x) := \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t}$ лучше оценивает $\pi(x)$, чем $\frac{x}{\ln x}$. Если следовать соображениям вероятности, то $\frac{x}{\ln x}$ — это просто замена вычисления суммы, умножением наибольшей вероятности на общее количество слагаемых в сумме. Это хорошо видно на рисунке, который воспроизведен по книге [3, стр. 30]:



Графики $Li(x)$ (верхний), $\pi(x)$ (средний), $x/\ln x$ (нижний)

В 1850 г. русский математик П.Л. Чебышев (1821–1894) доказал, что существуют константы $a > 0$, $b > 0$ такие, что при всех $x \geq 2$ верно неравенство

$$a\frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq b\frac{x}{\ln(x)}.$$

Он также доказал, что если существует предел

$$\frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)} \quad \text{при} \quad x \to \infty\,,$$

то он равен 1 и независимо от Гаусса показал, что $Li(x)$ лучше приближает $\pi(x)$, чем $\frac{x}{\ln(x)}$. Работы Чебышева были фактически последними действенными попытками доказать не аналитическими методами асимптотический закон распределения простых чисел.

Перейдем теперь к рассмотрению единственной работы Б. Римана (1826–1866) по теории чисел, где он сформулировал свою знаменитую гипотезу, ставшую величайшей проблемой математики (до сих пор!). В этом мемуаре (1859 г.) он показал, что ключ к глубокому исследованию распределения простых чисел лежит в изучении дзета-функции $\zeta(s)$, $s \in \mathbb{C}$. Однако, прошло более 30 лет, прежде чем были доказаны некоторые из предположений Римана и получены первые результаты о распределении простых чисел (см. [2], гл. 8).

Два основных результата, доказанных Риманом, таковы:

1) $\zeta(s)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость; она является дифференцируемой везде, кроме $s = 1$, при этом $\zeta(s) \sim \dfrac{1}{s-1}$ при $s \to 1$. То есть $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ — целая функция (везде дифференцируемая).

2) $\zeta(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{(s-1)/2}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера и определяется таким образом (см. [4], гл. 3, параграф 1):

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

где γ — константа Эйлера: $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\Sigma\frac{1}{n} - \ln n\right)$, $\gamma = 0,5772156649\ldots$.

Отметим некоторые свойства $\Gamma(s)$:

а) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$,

б) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$,

в) $\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$,

г) Функция $\Gamma(s)$ дифференцируема везде, кроме точек $0, -1, -2, -3, \ldots$, где она имеет особенности вида $\dfrac{1}{s+n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Из функционального уравнения видно, что функция, стоящая слева, четна от $s - \frac{1}{2}$, что позволяет выводить свойства $\zeta(s)$ при $\delta = \operatorname{Re} s < 0$ из ее свойств при $\delta > 1$. В частности, единственными нулями $\zeta(s)$ при $\delta < 0$ являются особенности $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, т.е. точки $s = -2, -4, -6, \ldots$ — тривиальные нули $\zeta(s)$. Остальные нули $\zeta(s)$ лежат в области $0 \le \delta \le 1$ — критической полосе.

Кроме того, Риман высказал ряд замечательных предположений:

3) $\zeta(s)$ имеет бесконечно много нулей в критической полосе. Они расположены симметрично относительно прямых $t = 0$, $\delta = \frac{1}{2}$, $s = \delta + it$.

4) Число $N(T)$ нулей $\zeta(s)$ в критической полосе с $0 < t \le T$ удовлетворяет асимптотическому соотношению $N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + o(\ln t)$. Это было доказано Мангольдтом в 1905 г.

Пусть $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{если} \quad n = p^k, \quad p \in \mathrm{P}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$

Определим *функцию Чебышева* как $\psi(x) := \sum\limits_{n \le x} \Lambda(n)$.

Асимптотика функции Чебышева тесно связана с асимптотикой $\pi(x)$ и поэтому некоторые теоремы удобнее формулировать в терминах $\psi(x)$. Итак

5) $\psi(x) = x - \sum\limits_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho} - \dfrac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1-x^{-2})$, где ρ — комплексные нули $\zeta(s)$, причем в члены с сопряженными корнями стоят вместе.

Это было доказано Мангольдтом в 1895 г.

6) Определим функцию

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Мы видим, что она четна относительно $s - \frac{1}{2}$, и у нее нет особенностей при $\delta \geq \frac{1}{2}$, то есть она — целая. Риман предположил, а Адамар доказал в 1893 г., что $\xi(s) = e^{A+Bs} \prod\limits_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$, где A, B — константы, а ρ — нули $\zeta(s)$ в критической полосе.

Для доказательства этого равенства и, в дальнейшем, асимптотического закона распределения простых чисел (1896 г.) Адамару пришлось развить теорию целых функций конечного порядка. То есть, исследование $\pi(x)$ стимулировало развитие других областей математики, например теория функции комплексной переменной.

7) Собственно, сама знаменитая *гипотеза Римана*. Он исследовал $\xi(s)$. Естественно, что нули $\zeta(s)$ лежащие на прямой $\delta = 1/2$, переходят в нули $\xi(s)$ на вещественной прямой. Оценивая количество нулей в критической полосе, и количество нулей на прямой $\delta = 1/2$, он пишет о нулях $\xi(s)$: “На самом деле мы находим приблизительно столько же вещественных корней между этими пределами, и очень вероятно, что все корни вещественны”.

В мемуаре следует дальше: “Желательно было бы строгое доказательство. Однако после нескольких беглых напрасных попыток я пока отложил исследование, так как доказательство этого показалось мне ненужным для непосредственной цели моего исследования (точная формула для $\pi(x)$ и $\psi(x)$)”. (См. выше.) ([8], гл. III, параграф 1.)

Приведем график $\xi(1/2 + it)$ — функции от $t \in \mathbb{R}$, принимающий действительные значения в силу функционального уравнения, это рисунок из [3, стр. 29].

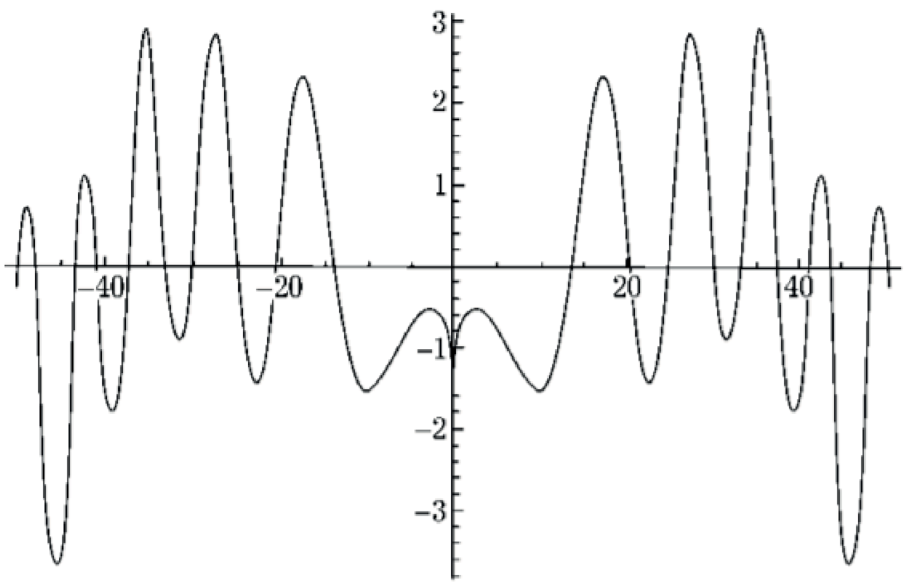


График $\xi(1/2 + it)$, $-50 < t < 50$

Гипотеза Римана породила целый цикл исследований по следующим направлениям:
а) следствия, при предположении ее истинности;
б) эквивалентные ей формулировки.

Приведем некоторые из этих формулировок

1. Рассмотрим функцию Мёбиуса $\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad n = 1, \\ (-1)^k & \text{если} \quad n = p_1 ... p_k, \\ 0 & \text{если} \quad n \text{ делится на } p^2, \end{cases}$

где p_i — различные простые числа.

Легко установить, что при $\delta > 1$ $\quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.

Следующие утверждения эквивалентны гипотезе Римана:

A) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$ при $\operatorname{Re} s > \dfrac{1}{2}$ сходится.

B) $\sum\limits_{n\le x} \mu(n) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \forall\varepsilon > 0.$

C) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{(k-1)!\zeta(2k)} = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\forall\varepsilon > 0.$

D) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(x)^k}{k!\zeta(2k+1)} = O\left(x^{-1/4}\right).$

Условия C) и D) внешне привлекательны тем, что зависят только от значения $\zeta(s)$ при $\delta > 1$ (см. [10], гл. XIV, параграф 30).

И, наконец, связь между гипотезой Римана и оценкой $\pi(x)$:

E) $|\pi(x) - Li(x)| \le C(x^{1/2} \cdot \ln x)$. См. [3], стр. 15-17.

Отметим также следствие из гипотезы Римана, интересное нам (см. [7], доп. 1):

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),\ \pi(x) = Li(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),\ \forall\varepsilon > 0.$$

В 1914 г. Д. Литтлвуд (1885–1957) доказал, что разность $\pi(x)-Li(x)$ бесконечное число раз меняет знак. Более того, было доказано, что для $\forall\varepsilon > 0$ разность $\pi(x)-Li(x)-x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ тоже бесконечное число раз меняет знак. Значит, в E) константу $1/2$ в остаточном члене нельзя заменить на меньшую.

В заключение отметим, что элементарное доказательство (без использования свойств $\zeta(s)$) асимптотического закона распределения простых чисел было получено лишь в 1949 г. А. Сельберном и П. Эрдешем (см. [5], [6]). Также отметим результаты, в некоторой стерени подтверждающие гипотезу Римана:

а) по крайней мере $1/3$ нулей $\zeta(s)$ лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

б) на компьютерах были найдены первые несколько миллионов нулей $\zeta(s)$. Все они удовлетворяют условию $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Вообще, арифметики и алгебраисты в XX веке активно использовали идею дзета-функции. Были построены дзета-функция Гурвица, Деденкинда, p-адическая ζ-функция, ζ-функция алгебраических кривых и абелевых многообразий, ζ-функция модулярных форм и др. См. [11-14].

Для некоторых из них был доказан аналог гипотезы Римана, для других еще нет. Так что, мы видим: “Идеи дзеты живут и побеждают” (Л. Эйлер).

Литература

[1] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. - М.: Наука, 1975. - 464 с.

[2] Девенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. - М.: Наука, 1971.

[3] Ленг С. Математические беседы для студентов. - Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

[4] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. - М.: Наука, 1983. - 40 с.

[5] Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. - М.: Мир, 1974.

[6] Прахар К. Распределение простых чисел. - М.: Мир, 1967.

[7] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. - М.: Изд. МГУ, 1984. - 148 с.

[8] Титчмарш Е. Дзета-функция Римана. - М.: Изд. иностранной литературы, 1947.

[9] Шафаревич И.Р. Избранные главы алгебры. - М.: Изд. журнала “Математическое образование”, 2000.

[10] Титчмарш Е. Теория дзета-функции Римана. - М.: Изд. иностранной литературы, 1953.

[11] Шимура Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. - М.: Мир, 1973.

[12] Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. - М.: Наука, 1985. - 504 с.

[13] Ленг С. Введение в теорию модулярных форм. - М.: Мир, 1979. - 256 с.

[14] Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. - М.: Мир, 1982. - 192 с.

Дубовицкий Александр Викторович,
Генеральный директор Фонда Свят. Блгв. князя
Александра Невского, г. Москва, выпускник аспирантуры
кафедры алгебры механико-математического
факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

E-mail: matob.yandex.ru

Комаров Станислав Игоревич,
первый заместитель директора ГБОУ
Школа № 179, г. Москва, выпускник
кафедры алгебры механико-математического
факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

E-mail: ksiedu@yandex.ru

Памяти Валерия Анатольевича Сендерова

А. Я. Канель-Белов

Предлагаем воспоминания Алексея Яковлевича Канель-Белова о ярком педагоге-математике, общественном деятеле, правозащитнике, политзаключенном 80-х годов Валерии Анатольевиче Сендерове. Ранее воспоминания напечатаны в сборнике “Памяти Валерия Анатольевича Сендерова”, приложение к журналу “Математическое образование”, Выпуск 1 (05), 2021 г., см. matob.ru/files/senderov_final.pdf

Я знал Валерия Анатольевича будучи школьником, он постоянно организовывал математические бои, а я был их постоянным участником. Помнятся несколько матбоев, где Саша Разборов был капитаном команды Второй школы, я заместителем, а капитаном команды 91-й школы был Максим Концевич.

Сендеров научил меня одной важной вещи. Говоря о решении задач, он показывал идейное ядро, где всё и происходит. Оно маленькое – это как жало станка, и именно это – главное, что надо увидеть. Станок состоит из большой станины, приводных ремней, таблички с указанием производителя, и т.п., а жало маленькое. Так же и задача: важно выделять, где всё происходит и почему происходит.

Выделению ядра или “жала” он научил не только меня. Привожу воспоминание одного математика:

> “Мне тоже вспомнилось что-то из моего небольшого опыта общения с В.А. Так случилось, что вышел он из тюрьмы в 1987 году, когда я был в выпускном классе. И возникла активность по натаскиванию всех желающих из Второй и 57-й школ на мехматские “гробы”, с тем чтобы поступить на мехмат, точнее поступать. Я на мехмат поступать не стал, в чем ни на минуту не раскаиваюсь, но вот сами эти занятия... Их было несколько. Разбирались реально сложные задачи, вполне олимпиадные, но в олимпиадных предполагается элемент красоты, что для мехматских “гробов” необязательно. И вот, хоть я никогда олимпиады особо не любил, эти занятия имели какую-то особую красоту. Действительно, как Лёша пишет, В.А. показывал некоторое “ядро” и “всё остальное”, и делал это так мастерски, как никто другой в контексте олимпиадных задач. Я первый раз в жизни ощутил какую-то красоту олимпиадных задач, и мне хотелось ходить на эти занятия независимо от мехмата и т.п. И это была даже красота не самих задач, а красота раскладывания на “ядро” и “всё остальное”. Ну и, конечно, было ощущение, что ты общаешься с совершенно героическим человеком, просидевшим 5 лет в тюрьмах, значительную часть этого в карцере. В.А. несомненно обладал некоторым гипнотизмом, исходившим из его могучей внутренней силы. Людям, окружавшим меня, от родителей до Гриши К., потребовалось немало усилий, чтобы заставить меня рассмотреть незамутнённым сознанием слова В.А. “ну если вас завалят, что наверняка и будет, то по вашим костям пройдут другие”. Когда я находился рядом с ним, критическое мышление (типа “а завалюсь так заберут в армию” и проч.) совсем отшибало. Этот человек пошел на намного бо́льшие лишения, и думать о

собственном комфорте рядом с ним было невозможно. Я слышал от разных людей, особенно старшего поколения, с которыми В.А. общался до тюрьмы, что так реагировали очень многие[1]."

Валерий Анатольевич Сендеров вместе с Борисом Ильичом Каневским заложили традицию олимпиад и математических боев во Второй школе, продолжающуюся и по сей день. Очень часто эти матбои Вторая Школа выигрывала. Такая традиция принесла плоды не только во Второй школе. В последующем покойный Митя Дерягин (выпускник 1981 года, победитель Всесоюзной олимпиады) начал кодификацию правил. Более-менее окончательную форму матбои приняли в начале 90-х, после синтеза московской и питерской версии правил, большая в этом заслуга Саши Ковальджи (ныне – зам. директора по науке лицея "Вторая Школа")[2]. Упомянем Московские Турниры математических боев.

В.А. Сендеров был активным общественным деятелем, участвовал в работе университета Б.А. Суботовской, борьбе за интересы абитуриентов. Говорить о нем нельзы, не упомянув политику. Чтобы не создалось искажённого представления об общественных взглядах Валерия Анатольевича, следует отметить, что он был государственник. Его последнее интервью можно найти по ссылке

http://www.russ.ru/pole/Kak-byvshij-dissident-i-politzaklyuchionnyj-stanovitsya-ohranitelem

Заголовок и манера, в которой было взято интервью, автору совсем не нравятся – в конце концов, интервьюер не должен давать ярлыки, тем более в заголовке. Я привожу эту ссылку только потому, что это интервью – последнее. Вот выдержка из интервью: "Поймите, я не о том, что власть хороша. Я о том, что вы, господа, – много хуже. И лучше иметь дело с циничным квалифицированным юристом Путиным, чем с воем толпы: «Навальный вас любит!»"

Вот последняя статья Валерия Анатольевича (совместно с Ю. Кублановским и Ф. Разумовским):

http://www.rg.ru/2014/03/12/pismo.html

Ее первый абзац таков: "Тревожно за Родину. Складывается впечатление, что оппозиционная новая интеллигенция ведет Россию к новому Февралю, а значит, к очередному крушению. Мы уже давно не видим нормальной конструктивной критики правительства и власти. Слышны только пораженческие вопли и оскорбительные, совершенно невыполнимые требования. И все это делается ради одной плохо скрываемой цели - капитуляции. Российская власть и государство снова должны капитулировать – перед очередным «освободительным полем»."

Он высоко ценил "Вехи" – сборник статей о русской интеллигенции, созданный деятелями Серебрянного Века. Этот сборник перевернул моё сознание, дал мне порцию свободы и понимания, в том числе того слоя людей, с которым часто приходится иметь дело. Одна из мыслей ему и мне, как человеку, занимающемуся классификацией идей решения олимпиадных задач, оказалась близка. Давайте разберемся, что такое "правые" и что такое "левые". Для этого выпишем типичные "правые" и типичные "левые" взгляды и заметим, что люди мыслят "пакетно". (Вспоминается остроумное высказывание Валерия Анатольевича о характере дискуссий: "они каются в грехах друг друга"). Эти взгляды надо объяснять, но не исходя из их "истинности" или "ложности", а исходя из эмоционального строя. И такая попытка, пусть весьма не полная, в сборнике была дана. Я бы добавил, что анализ должен использовать технику, в частности, З. Фрейда и К. Юнга, находивших "смысл" в симптомах. И в этом есть родство с книгой В. Проппа "Исторические корни волшебной сказки" (в первой части классифицируются сюжеты и элементы сказки, дается структурный анализ, во второй даются объяснения).

Моя личная эволюция взглядов была во многом схожа. До начала 90-х у меня были либеральные взгляды (в том числе связанные с проблемами при поступлении), потом они стали эволюционировать.

[1]Автор не одобряет вовлечение молодежи, особенно несовершеннолетних, в политику.

[2]См. Дерягин Д.В., Канель А.Я., Ковальджи А.К., Кондаков Г.В., Рубанов И.С., Финашин С.М., Фомин Д.В., Шапиро А.А., Яценко А.Д, "Математический бой двух команд: Правила, комментарии, опыт проведения", Математика в школе, 1990, № 4, 20–25.

Началось с крамольной для меня тогдашнего мысли. Если великие квантовские деятели появились в начале 70-х, а в течение более 20 лет не появлялись – то означает ли это что они, подавляя других создавали выжженую землю? Я изучал *структуры подавления людей и скрытые мотивы* – и мысль, бывшая крамольной, стала очевидной. Как поломать это – не только для себя, но и для других (и самому не стать ревнивцем) – и я осуществил несколько шагов. Осознание структуры подавления и принципиальной позиции – помогать в реализации – стало очень важным фактором того, что я стал одним из немногих достаточно сильных математиков, возникших из олимпиадных деятелей. Размышление над скрытыми мотивами срезонировало с "Вехами" (а также с работой Гротендика "Урожаи и Посевы"). Я долгое время дружил с покойным А.В. Гладким – а он был близок к так называемой "Хельсинской группе". Общался я и с Пигуро С.С. Довелось в доме у Е.Г. Глаголевой встретиться с С.А. Ковалевым в начале 90-х. Меня поразила "литературность" мышления – люди мыслили не реальностью, а литературными образами – в первую очередь из антисоветской литературы, во вторую – из русских классиков (подобное свойство в одобрительной (противоположной моей) – коннотации отмечал Ю. Лотман). Многие из них, искренне думая что борятся за права человека, на подсознательном уровне – т.е. на деле – реализовывали свою агрессию к стране. Интеллигенция не изменилась, ничему не научилась за 150 лет, осталась враждебной стране, и я перестал быть интеллигентом. Интересно, что моя лекция об идеологических искажениях и подсознательных мотивов, влияющих на научные теории, в особенности в гуманитарной сфере, при том что в ней не обсуждалась политика, вызвала куда более резкое неприятие

http://usdp.ru/files/kanel1.pdf

(с заменой аргументов острыми эмоциональными высказываниями) у представителей либеральной интеллигенции чем прямая полемика. См. также

https://www.youtube.com/watch?v=lhRH1BAFSoI

Один из либеральных деятелей говорил мне, что я по его мнению человек "имперский", потому что заинтересован не в ценностях простой жизни для людей но в ценности сверхрезультатов. С гордостью посвященного, получившего тайные знания от тайных жрецов, он сказал, что Европу держат вместе (во избежание войн) подавляя национализм, изводя крайне левые и правые партии, навязывая простые мещанские ценности (т.е. кастрируя нацинальный дух (интересно, какая это демократия?) – ясно что Россия не исключение – ее хотят уничтожить как цивилизацию). Приведу еще отзыв о Валерии Анатольвеиче от деятеля 90-х – достаточно крупного, чтобы видеть верхушку – отзыв пристрастный, совершенно несправедливый, но говорящий много как о собеседнике, так и о Валерии Анатольевиче.

> "В связи со ссылками на Валеру Сендерова и цитатами, приведенными Алексеем, подумал, что Валера, при все уважении и симпатии к его могучему (хотя и очень специфическому) интеллекту и мужеству политзека, был абсолютно внечеловечен. Живые, реальные люди, их жизни, их судьбы, их радости и их беды не интересовали его совершенно – он оперировал лишь процессами и идеями, в которых все эти люди были лишь объектами, но не субъектами Кстати, к себе самому как к живому человеку он относился столь же равнодушно – интеллект (рацио) был единственным, что он считал для себя ценным. В некотором смысле это был худший вариант "человека-математика". И большая удача, как ни дико это звучит, что тупость советского режима сделала его честным политзеком – в иных условиях из него мог бы, вероятно, получиться комиксовый mad scientist. Как-то, году, кажется, в 72-м или 73-м по дороге от Второй[3] до редакции "Кванта" он изложил мне свою модель общественного переустройства (названную им "аристократическим радикализмом"), основная идея которой состояла в механическом разделении общества на социальне группы по критерию "уровня интеллекта" (он предлагал для его измерения

[3] школы

пресловутый IQ). Каждой группе предписывался определенный “обобщенный” вид деятельности – от простейших низкоквалифицированных работ до наук, искусств и управления. Измерения интеллекта проводились несколько раз за жизнь человека – в детстве, юности и еще пару раз во взрослом состоянии (кажется, в 35 и в 45 лет). Соответственно, “социальный лифт” определялся в пределах социальных групп, соответствующих очередному измерению IQ. Никакие (очевидные даже мне тогдашнему) проблемы в реализации этой системы (не говоря уже о ее отвратительной бесчеловечности, о десубъективации человека, низведении его до уровня и роли муравья или робота) Валеру совершенно не беспокоили и не интересовали. Мы тогда крепко поругались... Собственно, уже из-за этих своих особенностей Валера не мог не быть государственником. И никак не мог быть либералом, поскольку в центре и основе либерализма – именно свободный живой человек, автономная самостоятельная личность.”

На деле проповедь такой истеричной автономизации моим собеседником приводит к деградации личности, уничтожении успехов и прекращении цивилизации, если только для избранного слоя не проповедовать обратного. Об издержках индивидуализма говорил еще Токвиль в своей работе “Демократия в Америке”, прочитанной мной по совету А.В. Гладкого (и пассаж моего собеседника хорошо иллюстрирует начало вырождения).

Есть люди, с которыми не во всём соглашаешься, но с их уходом возникает некая пустота (такими, например, для автора были Н. Б. Васильев и И. Ф. Шарыгин). Я хотел обсудить с В.А. ряд вещей, собирался позвонить – но как-то всё откладывалось...

Канель-Белов Алексей Яковлевич,
профессор Bar-Ilan University, Израиль,
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: kanelster@gmail.com

Дробные итерации функций

А. Я. Канель-Белов и др.

Заметка представляет собой изложение проекта — набора задач, рассмотренного на 23-й Летней Конференции Турнира Городов 2011 г., см. https://www.turgor.ru/lktg/2011/3/index.php Проект представили А. Канель-Белов, В. Бугаенко, С. Григорьев, Н. Кудык, И. Митрофанов, А. Петухов, Б. Френкин. Решения задач будут напечатаны в одном из следующих выпусков журнала. Решения задач 1-2, 1-3, 1-4 содержатся в статье [1].

Всем известно обозначение $f^{(n)}(x) = f(f(\ldots x)\ldots)$ (n раз). Такие функции называются *итерациями* функции f. Если f обратима, то можно определить ее *целые итерации*, положив $f^{(-n)} = (f^{(-1)})^{(n)}$. Легко убедиться в том, что $(f^{(n)})^{(m)} = f^{(nm)}$, и $f^{(n)} \circ f^{(m)} = f^{(n+m)}$.

А вот как определить *дробные итерации*? Что такое, скажем, $f^{(1/2)}(x)$? Естественно это определить как функцию g такую, что $g^{(2)} = f$. Определив *функциональные корни* $f^{(1/n)}$, затем можно естественно определить рациональные степени $f^{(m/n)} = (f^{(1/n)})^{(m)}$, и, как предельный переход, вещественные итерации. (Далее хочется понять и что такое комплексные итерации! И даже – p-адические!)

Разумеется, на этом пути есть трудности. Не все так просто даже с обратимостью. Ситуация с функциональным корнем еще хитрее.

Чтобы провести полное исследование, надо изучить для начала обычные итерации функций и функциональные корни, в том числе и с чисто теоретико-множественной точки зрения. Кроме того, следует рассмотреть частные случаи, когда задача легко решается.

1. Функциональные корни

1. а) Существует ли функция g, такая что $g^{(2)}(x) = \cos x$?

   б) Существует ли функция g, такая что $g^{(2)}(x) = \sin x$?

   в) Те же вопросы, если потребовать непрерывность функции g.

   г) Те же вопросы, если потребовать конечность числа точек разрыва функции g.

2. а) Существует ли функция g, такая что $g^{(3)}(x) = e^{-x}$?

   б) Тот же вопрос, если потребовать конечность числа точек разрыва функции g.

3. а) Существует ли функция f, определенная на интервале $(-1; 1)$, такая что $f(f(x)) = -x$?

   б) Существует ли функция $f : (-1; 1) \to (-1; 1)$, определенная на интервале $(-1; 1)$, с конечным числом точек разрыва, такая что $f(f(x)) = -x$?

   в) Существует ли функция $f : [-1; 1] \to [-1; 1]$, определенная на отрезке $[-1; 1]$, с конечным числом точек разрыва, такая что $f(f(x)) = -x$?

4. * Существует ли всюду определенная функция f, с конечным числом точек разрыва, такая что $f(f(x))$ есть монотонно убывающая функция?

5. а) Сколько перестановок из 4 элементов являются квадратом некоторой перестановки?

   б) Опишите все перестановки из 9 элементов, являющиеся кубом некоторой перестановки.

2. Дробные итерации некоторых элементарных функций

1. Определите дробные итерации функции f, если

   а) $f(x) = x + c$,

   б) $f(x) = \alpha x$,

   в) $f(x) = \alpha x + c$,

   г) $f(x) = \alpha x^n$.

2. $f(x) = x^2 - 2$.

3. а) $z_0 \notin \mathbb{R}$, $f(z) = z^2 - 2$. Докажите, что $|f^{(n)}(z_0)| \to \infty$ при $n \to \infty$. При каких z_0 $|f^{(n)}(z_0)| = 2$?

   б) Все корни многочлена с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 по модулю не превосходят 1. Докажите, что они являются корнями из единицы.

   в) Все корни z_i многочлена P с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 различны. Они принадлежат отрезку $[-1,99; +1,99]$. Докажите, что множество таких многочленов конечно.

3. Немного пределов

1. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой обе карты так, чтобы точка прокола изображала в обеих картах одну и ту же точку на местности.

2. Найдите предел последовательности

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \ldots$$

3. (Задача Арнольда). Найдите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg}(x)) - \operatorname{tg}(\sin(x))}{\arcsin(\operatorname{arctg}(x)) - \operatorname{arctg}(\arcsin(x))}$$

4. Итерации функций. Поведение при больших n

1. Дан $\triangle ABC$ и точка x_0. На каждом шаге разрешается выбрать одну из вершин $\triangle ABC$, соединить точку x_n, полученную на n-ом шаге, с этой вершиной и заменить ее на точку x_{n+1}, являющуюся серединой соответствующего отрезка. Докажите, что существует фигура площади $0,0001$, в которую мы рано или поздно попадем вне зависимости от выбора точки x_0.

2. $f(x) = x^2 - 10$. Докажите, что множество точек x, таких что

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) \neq \infty$$

   можно покрыть конечным набором интервалов суммарной длины $0,0001$.

5. Локальный анализ итераций вблизи неподвижных точек и циклов

1. Решите уравнение в вещественных числах: $f^{(n)}(x) = x$ для всех n, если $f(x) = \cos(x)$.

2. Решите уравнение в вещественных числах: $f^{(n)}(x) = x$ для всех n, если $f(x) = 1 - x^2$.

3. а) Докажите, что $\sin^{(n)}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. б) Найдите предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sin^{(n)}(x_0)$.

4. Проведите исследования, аналогичные предыдущему пункту, для поведения функции $f(x) = x - ax^k, k > 1$ в окрестности нуля.

5. Проведите исследования, аналогичные предыдущему пункту, для поведения функции $f(x) = x - \exp(-1/x^2)$ в окрестности нуля.

6. Коммутирующие функции

Определения. $f \circ g(x) = f(g(x))$. Функции f и g *коммутируют*, если $f \circ g = g \circ f$.

Естественно ожидать, что дробные итерации функций коммутируют между собой, и в ряде случаев, наоборот, коммутирующие функции являются дробными итерациями друг друга.

1. Найдите все дифференцируемые функции, коммутирующие с функцией $y = 2x$.

2. Существует ли недифференцируемая непрерывная функция, коммутирующая с функцией $y = 2x$?

3. Дифференцируемая функция $f(x)$ коммутирует с функцией $\frac{\sin(x)}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{1024}$. Найдите все такие функции.

4. Существует ли недифференцируемая непрерывная функция $f : (-0,1; 0,1) \to (-0,1; 0,1)$, коммутирующая с $\frac{\sin(x)}{2}$?

5. Дифференцируемая функция $f(x) : (-0,1; 0,1) \to (-0,1; 0,1)$, коммутирует с функцией $\frac{\sin(x)}{2}$. Докажите, что f однозначно определяется значением ее производной в 0.

6. Существуют ли а) непрерывные б) дифференцируемые в*) четырежды дифференцируемые функции $f, g : (-0,1; 0,1) \to (-0,1; 0,1) \to (-0,1; 0,1)$, коммутирующие с функцией $\sin(x)$, но не коммутирующие друг с другом?

7. Функция $f : (-0,1; 0,1) \to (-0,1; 0,1)$, коммутирует с $\sin(x)$ и четырежды дифференцируема. Доказать, что $f'(0) = 1, f''(0) = 0$.

8. Докажите, что две четырежды дифференцируемые функции, из $(-0,1; 0,1)$ в $(-0,1; 0,1)$, коммутирующие с $\sin(x)$ с равными третьими производными в точке 0 совпадают.

9. Проведите аналогичные исследования для функции $g(x) = x - ax^k$ вместо функции $\sin(x)$.

7. Итерации и сопряжения

Определение. Функции f и g *сопряжены*, если $f = R \circ g \circ R^{-1}$.

Упражнение. Покажите, что тогда $f^{(n)} = R \circ g^{(n)} \circ R^{-1}$.

Здесь и далее $f \sim g$ означает, что $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ при $x \to 0$.

1. а) Докажите, что функции вида $\cos(n \arccos(x))$ при $n \in \mathbb{Z}$ являются многочленами и коммутируют между собой.
   б) Докажите, что функции вида $\sin((2n+1)\cdot \arcsin(x))$ при $n \in \mathbb{Z}$ являются многочленами и коммутируют между собой.
   в) Докажите, что функции вида $\mathrm{tg}(n \,\mathrm{arctg}(x))$ при $n \in \mathbb{Z}$ являются рациональными функциями (т.е. частными двух многочленов) и коммутируют между собой.

   Замечание. Пункты а) и б) дают примеры нетривиальных семейств коммутирующих многочленов. Имеется глубокая теорема Рита, показывающая что других нетривиальных семейств нет.

2. Докажите, что функция $\sin x$ не сопряжена никакому многочлену.

3. Найдите дробные итерации функции $\frac{ax+b}{cx+d} \neq \mathrm{const}$.

   Дробные итерации линейных функций нам известны. Поэтому мы хотим свести вычисление дробных итераций возможно большего числа функций к дробным итерациям функций линейных. На самом деле, мы будем искать *сопрягающее отображение* R, то есть такое отображение, что функция $R\circ f\circ R^{(-1)}$ линейна. Иногда мы будем искать сопрягающую функцию локально, т. е. в некоторой окрестности неподвижной точки.

4. Пусть для линейной функции f выполнено $f(0)=0, f'(0)=k$. Найдите $(f^{(n)})'(0)$. Пусть f сопряжена гладкой функцией R функции lx. Покажите что $l=k$. Покажите, что если $|k|<1$, то $f^{(n)} \to 0$ для всякого x в некоторой окрестности нуля. В этом случае 0 называется *притягивающей точкой* f. Если $|k|>1$, то 0 называется *отталкивающей точкой* f.

5. а) Пусть 0 есть притягивающая точка непрерывно дифференцируемой функции f. Докажите существование предела
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{k^n} =: G(x_0)$$
   для всех x_0 из некоторой окрестности 0, непрерывность функции G и что $G(k\cdot G^{(-1)}(x)) = f(x)$.
   б) Докажите непрерывную дифференцируемость G.
   в*) Докажите, что если f бесконечно дифференцируема, то и G тоже бесконечно дифференцируема.

6. Докажите тождество
   $$\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}{2}\cdots = \frac{4-x^2}{\sqrt{2\ln(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2})}}.$$

   Определение. Точка x называется *предельной точкой* множества M если в любой ее окрестности найдется бесконечно много точек из M. *Орбитой* точки x под действием функции f называется множество $\{f^{(n)}(x)\}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

7. Пусть f, g — бесконечно дифференцируемые коммутирующие функции при $x \neq 0$, $f(x) \sim x^\lambda, g(x) \sim x^\delta$ при $x \to 0$. Тогда $f = g^{(\log_\delta \lambda)}$.

8. Пусть x_0 и x_1 есть две «соседние» неподвижные точки коммутирующих непрерывно дифференцируемых функций f и g, т.е. для некоторой точки x точки x_0 и x_1 будут предельными для каждой из орбит $\{f^{(n)}(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{g^{(n)}(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Пусть x_0 – притягивающая, x_1 – отталкивающая точки для f. Докажите, что тогда
   $$\log_{|g'(x_0)|}|f'(x_0)| = \log_{|g'(x_1)|}|f'(x_1)|.$$

9. Докажите, что функции в задачах 6.1, 6.3, 6.5, 6.7 являются дробными итерациями соответствующих функций.

10. Пусть f – монотонно возрастающая бесконечно дифференцируемая функция, $f(0) = 0$, и $f(x) \neq x$ при $x \neq 0$. Существует ли бесконечное семейство попарно некоммутирующих бесконечно дифференцируемых функций, коммутирующих с f?

8. Немного о многочленах

1. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$. Тогда для каждого m существует конечное число многочленов степени m, коммутирующих с P.

2. Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n > 1$, $Q(x)$ – многочлен степени $m > 1$, $P \circ Q = Q \circ P$, $P(x_0) = Q(x_0) = x_0$, $P'(x_0) > 1$, и в любой проколотой окрестности x_0 есть точка x_i такая что $P^{(k)}(x_i) \to \infty$ при $k \to \infty$. Докажите, что $P'(x_0)^{\log_n(m)} = Q'(x_0)$.

Замечание. Важно, что условие коммутируемости многочленов – *алгебраично*, т.е. представляет собой систему полиномиальных уравнений на коэффициенты. Поэтому значение производной в любой неподвижной или циклической точке можно считать алгебраическим числом. В предположении трансцендентности степеней вида $\alpha^{\log_n(m)}$, где α – алгебраическое число, не являющееся рациональной степенью n, получаем, что тогда k есть рациональная степень n. Было бы интересно вывести из этого факта классификацию комутирующих многочленов. Это очень важно, так как указывает на связь динамических систем с теорией трансцендентных чисел, и теорией диофантовых приближений.

9. Линеаризация функции в окрестности неподвижной точки. Комплексная динамика

Для домашнего размышления

Пусть $f(0) = 0$, $f'(0) = k \neq 0$. Нас интересует, когда функцию $f(x)$ можно сопрячь с функцией $k \cdot x$ в окрестности нуля. Очень часто коммутирующие функции являются дробными итерациями друг друга.

1. Пусть f аналитична и $|k| \neq 1$. Тогда существует аналитическая G такая, что $f(x) = G(kG^{(-1)}(x))$. Пусть $k^n = 1$. Приведите пример аналитической функции f, не сопряженной с линейной в окрестности 0, для любого целого n.

2. Пусть k не есть корень из единицы. Тогда f сопряжена линейной как формальный степенной ряд.

3. Покажите, что при некотором k этот ряд может расходиться.

4. Докажите, что для некоторых k, таких что $|k| = 1$, функция f все же всегда сопряжена линейной, если она аналитична.

Литература

1. Викол В., Апостолов А. Функциональные корни // Математическое просвещение, серия 3. - Вып. 9. - 2005. - с. 194–202.

Главы из книги “Обречены ли русские?”

Н. Н. Константинов

Николай Николаевич Константинов (1932 – 2021) известен не только как выдающийся учитель математики и организатор математического образования школьников в СССР и РФ, но и глубокий мыслитель, оставивший материалы по различным вопросом образования, развития нашей страны, мемуары о своих предках и т.п. Часть материалов опубликована в “Константиновских сборниках”, которые вышли отдельными печатными изданиями, а также размещены на странице matob.ru/supplement.html

Небольшой сборник воспоминаний-размышлений “Обречены ли русские?” вышел отдельной книгой и в ближайшее время появится на той же странице. Его можно характеризовать как описание интересных форм организации труда, которые автор наблюдал или сам в них участвовал. По его мнению, подобные формы могут способствовать возрождению и подъему культуры труда в России.

В настоящую публикацию вошли главы из этого сборника, имеющие некоторое отношение к математике и математическому образованию. В конце приведено репринтное воспроизведения 4-х страниц из архива Н.Н. с соображениями об организации жизни в эстонском лагере, 1986 г.

Глава 2. Два академика

Я был свидетелем разговора двух академиков-математиков. Один из них — Христианович, кто был другой — забыл. Первый жаловался, что его сотрудники не могут того, не могут сего. А другой молча слушал коллегу с невыразимым удивлением. И наконец произнес: “Так ведь нужно поручать людям ту работу, которая у них получается”. Вот и весь рассказ.

Глава 3. Перфокарты

С 1961 года по 1968 я учился в аспирантуре, а затем работал в математической (шестой) лаборатории Института теоретической и экспериментальной физики. Руководил лабораторией Александр Семенович Кронрод. Я опишу только один эпизод, характеризующий его подход к организации труда.

Вычисления проводились на машине “М-20”. Она занимала целый зал, работала на лампах и часто давала сбои. Обслуживала ее бригада инженеров, которым то и дело приходилось восстанавливать ее жизнедеятельность. Время машины было весьма дефицитно, она считала круглые сутки, ни минуты не простаивая. В этих условиях каждая ошибка стоила очень дорого (и в деньгах, и в нервах).

Программы писались от руки в содержательных обозначениях. Затем лаборантка вручную переводила этот текст в коды машины, а другая лаборантка набивала перфокарты с этого нового текста. Всего в создании перфокарт участвовали четыре лаборантки, и на первоначальном тексте программы появлялись четыре подписи: “кодировала”, “проверила кодировку”, “набивала карты”, “проверила карты”. Программист, отлаживая программу, должен был вычищать ее, во-первых, от ошибок, происходивших от его собственного недомыслия (что неизбежно), и, во-вторых, из-за механических ошибок при кодировании и набивании карт. Казалось, что эти обидные накладки второго рода также неизбежны, но Кронрод придумал, как от них избавиться.

Надо заметить, что лаборантки в ИТЭФе оплачивались по тем временам весьма высоко. Кронрод ввел новый порядок взаимоотношений математиков с лаборантками: математик мог общаться только со старшей лаборанткой и не имел права торопить исполнительниц. Он ввел и новый порядок оплаты труда лаборанток, разделив выплаты на основной заработок и премию, причем эти две части были примерно равны. Если лаборантка делала в месяц одну ошибку, она лишалась половины премии, а две ошибки обрекали ее на лишение премии полностью.

Сотрудники лаборатории (я в том числе) пришли в ужас, когда услышали об этих новых порядках. Одни кипели и возмущались: Кронрод изверг! Другие, более спокойные и рассудительные, надеялись, что он образумится. Но “изверг” оказался прав — за первый месяц работы по-новому ошибок кодировки и набивки карт не случилось ни одной.

Несколько слов в заключение. Кронрод уделял очень большое внимание работе с лаборантками — проводил для них семинары, заботился о том, чтобы они заочно учились в пединституте и т.п. Он тщательно продумывал, как разделить работу над большой программой между несколькими исполнителями. И еще он не раз подчеркивал, что нужно делать именно то, что действительно нужно, более того, нужно заниматься тем, что ты считаешь самым важным и нужным для людей. Находясь в течение нескольких лет рядом с Кронродом, я понял, что работа только тогда бывает неинтересной, когда она никому не нужна и когда она плохо организована.

Способ организации набивки перфокарт, примененный Кронродом, я впоследствии успешно применил в нашем математическом лагере в Эстонии, где я добился того, что завтраки, обеды и ужины начинались без всяких опозданий, но об этом будет речь в главе об Эстонском лагере.

Глава 8. Студент Сергей в стройотряде

Примерно в 1973 году компания студентов мехмата МГУ собралась в стройотряд на Сахалин. Среди студентов были выпускники 7-й математической школы, и они пригласили меня поехать в стройотряд вместе с ними. Работали в поселке Быков на территории шахты и вблизи нее. Задание состояло в основном в укреплении водосточных канав (на Сахалине очень много дождей).

Эта работа — скорее всего, пример того, как делать не надо, тем не менее и там я чему-то научился. Я приехал с опозданием на пару недель, и к моему приезду почти все топоры были растеряны. Я походил по общежитию и вокруг него и нашел пять топоров. Поточив их в мастерской, спрятал под матрас и выдавал только надежным людям с обязательным возвратом мне. Надо было заострять колья для забивания в грунт. Кол толщиной 10 см можно было заострить четырьмя ударами топора при условии, что кол удобно установлен и топор острый. Но некоторые студенты рубили тупыми топорами, работая одной рукой, а другой держа кол вертикально, так как не было устроено специальное место для установки кола. И эти работники считались хорошими, так как все их руки были в ссадинах. А те студенты, которые работали острыми топорами с кольями, установленными в специальных местах, были под подозрением, так как они иногда отлучались в мастерскую для заточки топоров. Результатов же (количества заостренных колов) никто не учитывал.

Командир отряда сам не работал — он вел дипломатию с начальством, иногда должен был выпивать с ним, чтобы добиться хорошей оплаты нашей работы. В данных условиях он поступал, безусловно, правильно — это недостаток системы, а не нашей организации. Но стимулы были искажены, поэтому и организация дела страдала.

Другая работа состояла в том, чтобы обравнивать необрезанные доски. И в этом деле мне дал урок Сергей, упомянутый в названии главы. На меня произвела впечатление его идеология. “Я приехал заработать деньги, но не только. Я работаю, чтобы получать удовольствие от своей работы. Доски нужно обравнивать быстро, чтобы заработать, и красиво, чтобы получить удовольствие”. И он научил меня быстро и красиво выполнять это топором. Доска должна быть установлена на некоторой высоте над землей, чтобы топор не касался земли. Упор должен быть стойким, чтобы доска не ехала. На доске карандашом следует провести ровную линию, по которой пройдет топор. Длина топорища должна быть именно такой, чтобы можно было стоять над доской, расположив ноги по разные ее стороны, и чтобы можно было рубить позади себя с таким расчетом, чтобы топор, отскочив, не попал бы по ноге. И действительно, такая работа давала быстрые результаты и доставляла удовольствие.

Работали мы по 12 часов без выходных. Всего дважды удалось погулять — один раз по горам и один раз по берегу Японского моря. И еще поблизости от нас работала группа армян. Они строили мосты через речки и ручьи. Работали быстро и красиво, не больше 8-9 часов в день, и по воскресеньям отдыхали. В результате заработали больше нас. И сопоставляя все эти впечатления, я понял, как много выигрывает профессионализм перед ретивостью без разума. Армяне клали доски не поперек бревен, а под углом 45 градусов в два слоя, причем не сороковки, а двадцатки. При такой укладке каждое колесо машины давит не на одну точку, а не все доски сразу, и такой мост выдерживает большую нагрузку, даже если некоторые доски повреждены.

В Эстонии мы стали строить свои мосты этим методом. И высшая похвала колхозного главного инженера прозвучала в следующем диалоге. Инженер: “Что это за мост, я его раньше не видел. Его вы построили?” Я отвечаю: “Позавчера закончили”. Инженер: “Ну тогда я смело еду”.

Глава 9. Чернобыль

Про Чернобыль написано так много, что мне и добавить нечего. Но я прокомментирую высказывание Велихова — одного из организаторов ликвидации последствий Чернобыльской аварии. Он как-то сказал мимоходом, что время ликвидации было самыми счастливыми днями его жизни (или что-то в этом роде).

Я понимаю это так. В какой-то момент руководители ликвидации решили, что им необходим радиоуправляемый трактор с манипулятором. Такие трактора были в Нижнем Тагиле, а манипуляторы — в Норильске. Позвонили в Нижний Тагил и Норильск вечером, а наутро трактора были уже в Чернобыле. Вот о такой скорости реализации идей и мечтал всю жизнь Велихов.

Почему же в других случаях такая скорость реализации не получается? Вот моя гипотеза на этот счет.

В случае Чернобыльской аварии всем было понятно, что ликвидация последствий необходима, более того, было почти ясно, к чему следует стремиться. И в других случаях, когда цель всем ясна, реализация бывает быстрой. Германия после второй мировой войны была полностью разрушена, но восстановление шло быстро, и через несколько лет в Германии (не только в Западной) был достигнут высокий уровень жизни. В СССР восстановление тоже шло быстро, но был достигнут лишь довоенный уровень, не выше. То есть страна дошла лишь до того уровня, который уже был в головах людей. Дальше дело пошло медленно, и это согласуется с тем, что перестройка в сознании народа не происходит быстро.

Кстати, и Маркс со временем отошел от своей первоначальной мысли, что в основе базиса находятся машины и другие средства труда. Он пришел к пониманию того, что именно образ жизни, укоренившийся в сознании людей, есть базис для всего остального. Об этом я узнал из статьи философа Александра Ципко (не знаю, правильно ли я его понял). Но и В.И. Ленин говорил, что идеи становятся материальной силой, когда овладевают массами. А в нынешнее время образ образа жизни, находящийся в сознании россиян, быстро меняется от контактов с заграницей.

Это и есть базис нашего развития. И в духе идеи моей настоящей статьи я высказываю пожелание, чтобы не только заграница, но и примеры нашей собственной жизни влияли на наше сознание.

Глава 10. Беломорская биостанция МГУ им. Н.А. Перцова

Это теперь Беломорская биостанция носит имя Н.А. Перцова, а в то время, о котором я вспоминаю, Николай Андреевич был ее директором. Об этой станции и ее директоре написано еще недостаточно; я рекомендую главу 39 о Н.А. Перцове, ББС МГУ и В.Н. Вехове из книги С.Э. Шноля “Герои, злодеи, конформисты отечественной науки” (М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2010).

Здесь же расскажу немного о том, как Николай Андреевич работал и как чему-то научил меня и моих друзей. Казалось, Николай Андреевич Перцов умел все. Вот несколько эпизодов.

“А ну-ка, Юра, пододвинь-ка с твоими ребятами лебедку к краю пирса!” Юра: “Раз-два-взяли” — ни с места. “Еще взяли” — ни с места. Николай Андреевич: “А ну отойдите!"” Ломиком под основание — и лебедка подвинулась на несколько сантиметров. Еще раз — еще на несколько сантиметров, и т.д.

Сгружали дизельную электростанцию из железнодорожного вагона сначала на землю, затем в баржу. Стоим перед вагоном, где-то высоко над нами громада электростанции. Ума не приложим, что делать. “Чтобы тяжести перемещать, не сила нужна, а ум”, — уверенно произносит Николай Андреевич. Перекинули веревки через крышу вагона, и, медленно их отпуская, плавно опустили станцию на землю.

И еще научились убирать большие камни, которые мешали рыть ямы для столбов, научились вязать плоты, делать бетон, ловить рыбу, петь песни и многое другое.

Но речь в этой главе не об этом. В течение многих лет большую работу по созданию биостанции выполнял студенческий стройотряд. В отличие от других, этот стройотряд был, что называется, коммунистическим. Это значит, что работали “за харчи”, без учета выполненной работы. Обычно приезжали уже сплоченными группами: часто студент МГУ со своими учениками, которых он обучал в математическом классе. Так что значительную часть этих стройотрядов составляли школьники.

Очевидным следствием такой системы была низкая квалификация работников. Но Николай Андреевич приглашал профессионалов, рабочих из строительного управления МГУ, и умел так разделить работу, что стройотряд со своей частью справлялся. А те студенты, что приезжали на ББС несколько раз, становились профессионалами в некоторых видах работы. Какие же стимулы влекли этих работников?

Первое: возможность пожить и поработать в среде друзей и единомышленников.

Второе: песни (Николай Андреевич был отличный исполнитель песен и аккомпаниатор).

Третье: природа (море, тайга, белые ночи, тишина).

Четвертое: полный отрыв от привычной обстановки, свобода.

И, наконец, пятое: участие в создании чего-то очень хорошего, а именно Беломорской биостанции МГУ.

И никаких мыслей о зарплате.

Постепенно в стройотряде создалась обстановка: никто не курил, хотя запрета не было; никто не играл в карты и в шахматы — всегда находились более интересные занятия, например, просто сидеть на камнях и смотреть, воспринимая душой, фантастическое нагромождение сосен, озер, болот и выглаженных ледником скал. И слушать тишину — слышен стук колес далекого поезда, проходившего в пятнадцати километрах от ББС.

И еще один вывод из жизни этого стройотряда. Если компания небольшая, то в ней возможны (но не обязательно получаются) коммунистические отношения. В большой компании они невозможны.

Глава 11. Эстонский лагерь

С 1974 года и вплоть до распада СССР в Эстонии каждое лето (первый год в колхозе “Валгъярве”, а затем в колхозе “Калев”) проходил трудовой математический лагерь для школьников Москвы и отчасти других городов. Трудовая часть лагеря состояла из работы в колхозе и лесхозе и самообслуживания (обустройства лагеря и приготовления пищи).

Несмотря на неприспособленность большинства школьников к самостоятельной жизни и порой феноменальную беспомощность, руководителям лагеря удалось некоторые дела хорошо организовать, самим многому научиться, научить школьников и заслужить благодарность колхоза.

Вот какие черты наших хозяев-эстонцев произвели на нас самое сильное впечатление.

Первое — доброжелательность. Мы всегда получали от них больше, чем просили. К нашему лагерю на берегу озера Калматъярв колхоз протянул для нас линию электропередачи, о чем нам и в голову не пришло бы просить. Точно так же колхоз предоставил нам лошадь с телегой, о чем мы тоже не просили. Мясо мы покупали в колхозе по себестоимости. Это была льгота для членов колхоза, но ее распространили и на нас. И много других подобных случаев.

Временами в колхозе бывали танцы. Для жителей хуторов это большой праздник, когда они разом могут увидеть друг друга. Жители эстонской деревни пьют, надо сказать, крепко, но с другим, чем в нашей стране, настроением. На первом месте чувство праздника. “Приходите к нам на танцы. Наши девушки — ваши девушки”. Или приезжает к нам вечером водитель самосвальной тележки, в которой сидят девушки. “Я вам девушек привез” — и опрокидывает тележку.

Замечу, что особенно хорошо к нам, русским, относились те эстонцы, которые побывали в лагерях в Коми АССР и в Сибири. А таких среди пожилых эстонцев было, пожалуй, около трети. Они говорили, что они, конечно, умерли бы в ссылке, если бы не помощь местных крестьян, которые и сами-то были так бедны, что эстонцы этому не поверили бы, если бы не увидели своими глазами.

Второе — верность договоренностям, к которой мы в России не привыкли. Вот пример. Мы попросили для наших домиков бракованных досок с пилорамы (бракованных, чтобы не платить денег). Договорились, что к такому-то часу наши ребята ждут на таком-то перекрестке дорог (в чистом поле) грузовик, который пойдет на пилораму, где они должны будут эти доски погрузить. Наши ребята, как водится, на несколько минут опоздали. Ждали-ждали — видят, идет грузовик с другой стороны, уже загруженный досками для нас.

Третье — налаженное хозяйство. Одна из специальностей нашего колхоза было выращивание семян: картофеля, люцерны, льна и других культур.

Семена картофеля выращивались так (думаю, что это и сейчас продолжается). В хозяйстве “Юленурме” под Тарту находили под микроскопом здоровые клетки картофеля и из них получали здоровые растения. Такие растения (каждое в отдельном горшочке) продавались семеноводческим хозяйствам по рублю за штуку. Семеноводческое хозяйство выращивало из них семена первого поколения, затем уже из них — семена второго поколения, и только потом они шли на продажу для хозяйств, выращивавших продовольственный картофель. Наши ребята очищали плантацию от случайных примесей. Сертификацию готовой продукции проводила комиссия под председательством биолога Виллемса; с его женой — Анне Виллемс — я был хорошо знаком: она была программисткой, сотрудничавшей с Арлазаровым и компанией. Однажды мешок такой безукоризненно здоровой картошки я привез в Москву для дачного хозяйства моих родственников, и они несколько лет не видели никаких болезней (а потом зараза все же появилась).

Еще было бы интересно рассказать о поддержании породистости стада коров, но рассказ о технологиях не является сейчас моей целью. Я хочу обратить внимание на то, что дело делается не потому, что там социализм или капитализм, а потому, что есть люди, которые его делают. Наши сторонники рыночного хозяйства усвоили, что при рынке все постепенно само образуется, но они не догадались, что само ничего не образуется, все это люди делают, и если их нет, то ничего не образуется.

Четвертое — единство нации. Я понял, в чем важное различие между эстонской культурой и русской культурой. Русская литература — явление мировое. Ее знают во всем мире, но мало знают в России. Среди уборщиц, дежуривших в праздничную ночь в Москве в одном из институтов, мой приятель — тоже дежуривший научный сотрудник — выяснял у уборщиц, каких русских поэтов они знают. Назвали только Пушкина и Есенина, причем была уборщица, которая про Есенина не слыхала, но знала песню — “Письмо к матери”. А в Эстонии знают своих деятелей культуры. Шофер попутного грузовика в районе Антсла остановил машину, чтобы показать хутор, где родился дирижер первого в Эстонии мужского хора, положившего начало Праздникам песни. Но в мире эстонская культура не известна.

Каждый артист в течение года объезжает все сцены Эстонии. Раз в пять лет вся Эстония собирается на певческом поле в Таллинне (собирается сотня тысяч, дирижирует Эрнесакс. Учитывая, что все население — около миллиона, это значит, что практически каждая семья побывала на этих праздниках).

В России этого нет, но ведь было когда-то. На знаменитой Нижегородской ярмарке была выставка национальной русской одежды разных губерний, значит, была местная национальная жизнь. Где же она? Выставку раздали местным музеям, и она умерла. Умерла и сама местная жизнь. Но, может быть, она когда-нибудь оживет?

Чтобы не сложилось впечатления, что я вижу в Эстонии только хорошее, скажу и о плохом. Пришли к нам в лагерь эстонские националисты (когда нас там не было) и вылили в наш колодец солярку (нам потом удалось колодец очистить). Прекрасное строение в народном лесном стиле, выполненное Арменом Сарвазяном, националисты разрушили (а местные крестьяне восхищались им!). Одним словом, эстонские националисты — это твари тупые, как, я думаю, такие же твари и националисты из других наций. Есть русские, для которых “русский” — это уже не национальность, а профессия. Один мой украинский приятель (руководитель украинской команды на Международной математической олимпиаде) сказал мне, что для некоторых на Украине “украинец” — это, к сожалению, единственная их профессия. Я провожу Турнир городов, общаюсь с представителями десятков национальностей и могу с уверенностью сказать, что среди моих коллег по Турниру националистов нет (друзья мне говорят, что мало не любить националистов, а нужно искать корни этой беды, как и корни других бед. В этом направлении страшно и думать, хотя от таких дум, видимо, не уйти).

И, наконец, о том, как наш лагерь жил в Эстонии.

В первый год мы никак не могли соблюсти распорядок. Сначала опаздывал завтрак (“Зато вкусный!” — парировали наши упреки повара), затем на еще большее время — обед, затем ужин и т.д., пока очередной ужин не пришелся на утро, когда было впору завтракать. И тогда я вспомнил, как Кронрод избавился от ошибок при набивке перфокарт. И я постановил, что кухонная бригада (три человека на 30 едоков) получает за день работы по полтора трудодня зарплаты на каждого человека и столько же премии, если все смены еды в этот день приготовлены качественно и без опоздания. Сначала меня, как и в случае с Кронродом, посчитали чуть ли не сумасшедшим (Галя Дюдяева прошептала еле слышно успокаивающее: “Пусть перебесится, потом образумится”.) И я тоже — ещё больше других — беспокоился, что из этого выйдет.

Подошел к плите, на которой стояла большая кастрюля. Смотрю — еще не кипит, а до обеда уже не много времени. “Не опоздаете?” — спрашиваю. “Это щи на завтра” — ответили мне. И я понял, что все в порядке. Мы в лагерях и сейчас так живем, и опоздания — случаи исключительные.

Из сказанного видно, что отношения внутри нашей компании не были коммунистическими. В эпоху провозглашенного развитого социализма мы четко перешли к денежным отношениям. Это помогло многим нашим воспитанникам, да и воспитателям, выжить в новую, рыночную эпоху.

Работа на прополке была сдельная — получали пропорционально длине прополотых грядок. Но, хотя у нас все ребята хорошие, все же Россия не живет без приписок. Некоторые, записывая сделанное, прибавляли. В результате по записям поле получилось в два раза больше, чем оно было в действительности. На следующий год мы сделали так, как рекомендовал Худенко: поле разделили на полосы, а людей на звенья по пять человек (некоторые предпочли работать группой друзей, и такие группы могли содержать и другое количество людей). Велся учет, сколько сделало звено, а внутри звена учет не велся. В результате так весело дело пошло, что эстонцы нас показывали в пример своим работникам. А зарабатывали мы на этой работе неплохо. Работали всего два дня в пятидневку по 4 часа в день, а зарабатывали полностью на питание (на кормежку уходил 1 рубль в день на едока; напоминаю, батон белого хлеба стоил 20 копеек, кило мяса в магазине — 2 рубля с копейками, на рынке — 5 рублей).

12.08.86.
Калматъярв

Беспорядочные замечания по поводу лагеря 1986 года.

Самый младший возраст школьников – перешедшие в 9-й класс.

Если нет дисциплины, то нет и работы.

Отбой должен быть не позже XI часов, он должен быть фактическим. Если старшие настроены на отбой, то подчиняются и младшие. Привозить своих школьников могут только те, кто уже бывал в лагере и показал себя положительно со стороны дисциплины и стремления создавать правильный образ жизни в лагере. Основой дисциплины является отбой, затем подъём и своевременные завтрак, обед и ужин. В лагере должно быть достаточное количество часов. Должно быть всего не больше 25 человек, а лучше 20, так как на интервале от 18 до 30 человек все проблемы нарастают со страшной быстротой. При этом должно быть не меньше 5 людей, которые способны быть дежурными по лагерю, то-есть вставать во-время без напоминаний, самостоятельно вспоминать про отбой, знать про авральные работы /дрова, уборка,/ иметь авторитет чтобы разрешать или не разрешать что-либо школьникам /может быть, его нужно называть не просто дежурным, а дежурным преподавателем или бригадиром/. Нужно иметь завхоза на весь срок, он должен разбираться в ведении домашнего хозяйства и не быть ребёнком /не люблю какао и т.п./. На один лагерь должно приходиться не меньше пяти бригадиров по духу своему, то-есть они должны быть способными работать без понукания и затягивать в рабочее состояние остальных. Материальные проблемы в начальный период лагеря бывают очень серьёзными. Например, не хватает кружек, и это может затянуться до конца смены, так как кружек может не оказаться в ближайших городах. В Москве должны быть заготовлены пилы, топоры, чеснок, хмели-сунели, кинза и т.п. Лучше всего, если сильная соображающая группа приедет в лагерь за 10 дней до заезда и всё приготовит, а именно:

-2-

Развлекательные занятия должны быть подготовлены в таком количестве, чтобы полностью исключить вынужденное праздное болтание. Эти занятия: спевки с разучиванием, зарядка, обучение плаванию, обучение любому спорту, в том числе футболу, но просто игра в футбол – это не то. Занятия английским или эстонским языком, лекции об охране природы в Эстонии, занятия театром в духе Ершовой, ботаническая экскурсия, китайские чтения, вечер стихов, экскурсия по небу, экскурсия по семи озёрам, экскурсия в Канепи и т.п. Качество занятий должно быть заранее проверено. Все старшие должны быть готовы к тому, чтобы в любой момент устроить импровизацию, при этом качество также должно быть заранее проверено тем, как это человек делал прежде.

В лагере должно быть чёткое понятие старших. У них нет ни свободного времени, ни выходных, разве лишь по взаимной договорённости. Отдых они должны в основном проводить так, чтобы занимать школьников. Взрослые, которые то и дело звонят в Москву, не годятся. Не годятся те, которые занимаются заготовками в личных целях.

Должен быть завуч, который не забывает о занятиях. Должна быть программа, состоящая из нескольких очень которких тем с зачётом. Для усиления программы можео за месяц до лагеря выдать всем учащимся один – два листочка. Желательно наличие тем, от которых возможен переход к общечеловеческим интересам, поскольку в условиях лагеря легко поддерживаются разговоры на общие темы.

Младшие часто плохо понимают, что такое обязанности. Старшие понимают это часто ещё хуже. Начинаем со старших. Если здесь всё в порядке, то дальше необходимо, чтобы в каждом роде деятельности старший был бригадиром и учил своим примером. Если среди кухбоев нет старшего, то старшие не показывают хорошего примера, и их поведение рассматривается как барство. Отсюда лень кухбоев. Также и в любом другом деле.

-3-

С первого дня должен строго соблюдаться режим. Первые дней пять - - абсолютно строго. В пасих отбой сдвинут, но не отменён. В книжн подъём сдвинут, но не отменён. Все поездки и развлечения заранее, расписаны. Контроль снижается к концу и достигает минимума в Таллине.

К началу смены должно быть сделано следующее:
Вставлены окна и двери, включено электричество, налажен газ, взята лошадь с упряжкой, поставлена мебель, вымыта и доукомплектована посуда, куплены в достаточном для работы в лесу количестве пилы и топоры, сделан молочный заказ в магазине, есть договорёность про мясо, договорились о работе и ав обусах для встречи, починена доска объявлений. На ней должны быть вывешены с самого начала - календарь с тремя времяисчислениями - числа, дни христовой недели и дни нашей пятидневки. Список дежурных, список кухбоев, график подачи еды, распорядок дня, расписание занятий, в том числе свободных.

Править должен совет бригадиров, он же сенат. Совет бригадиров проводится в то время, когда один из преподавателей, или, может быть, двое, занимают всех школьников занятиями, но не тогда, когда школьники свободны, ибо это время для бригадиров знято общением со школьниками. Бригадиры должны быть достаточно сильной компанией, чтобы всех лишних приезжающих в лагерь людей либо изгнать, либо подчинить.

В лагере должны быть ответственные за чистоту разных участков. Каждая еда должна иметь конец. Старший кухбой открывает и закрывает столовую. В пасих после обеда весь лагерь проходит по всем участкам и проверяет чистоту и результаты работы по лагерю. Результаты заносятся в таблицу, выставляемую на доске объявлений. Трудодни на поле также выставляются туда же. Мой домик - штабной, в нём не желательны жильцы /но могут быть временные гости/. Желателен межлагерный телефон, человек должен продумать всё в Москве и приехать в числе квартирьеров, чтобы всё сделать.

-4-

Каждый делает в Москве табличку с фамилией иименем, которая в л лагере прикрепляется к палаткам и домикам.

В Москве /Ленинграде, Киеве и т.п./ должны быть регулярные собр ния в течение года, в которых моделируется обстановка лагеря. Это может быть лесхоз с очень строгими правилами, исключающими сачкование, подвал 57 школы, мастерская дома пионеров, монастырь в Тухи Ступине, мастерская художника и т.п. Основными моментами таких собр рани. должны быть выполнение обязанностей, отсутствие свободного времени, отсутствие праздно болтающихся, соблюдение распорядка, отсутствие опозданий, регламентация угощений, ограниченное время при. ёма пищи и т.п. Основными занятиями могут быть различные виды учёб. направленные на общее совершенствование человека: театр, рисование лепка, музыка, языки. Народу немного, а отношение к времени религиозно-строгое - модель лагеря. Выезды за город с различными объявлен ными целями, и никогда - с целью праздного болтания, даже в поезде. На предварительных собраниях в квартирах нужно исключить вседозволенность для гостя, диктуемую обязанностями хозяина. Поэтому лучше, чтобы собрания были не дома у кого-либо. Могут быть и специальные тренировки, направленные на ощущение времени. Можно собираться для цел типа надписывания конвертов с целью выработки организации.

Константинов Николай Николаевич,
член редакционной коллегии журнала
"Математическое образование", 1997 – 2021 гг.

Не ошибка, а целенаправленное многолетнее разрушение

И. П. Костенко

22 мая 2021 года в Москве состоялся Всероссийский Съезд-конференция «Пути преодоления кризиса в образовании. Консолидация родительских и научных сообществ России». Данная статья представляет расширенное изложение выступления И.П. Костенко на этом Съезде. В ней разъясняется и обосновывается мысль, выраженная в самом названии.

Очень важный Съезд. В борьбу за качественное образование, а в сущности, за достойное будущее России, вступает новая сила — РОДИТЕЛИ.

О ясном понимании родителями страшной угрозы говорит постановка вопросов повестки дня Съезда — кратких, точных и бескомпромиссных. Родители понимают, что образование уже почти полностью разрушено, и нас лишают всяких надежд на его восстановление, на человеческое будущее наших детей.

Хочу сделать два замечания относительно стандартной для многих конференций формулировки «пути преодоления кризиса в образовании». Термин «кризис» здесь неуместен. Кризис — это момент болезни организма. Но наше образование не больно, оно планомерно убивается внешними воздействиями.

Фраза «пути преодоления» тоже не точна. Она создаёт ложную иллюзию, будто есть какие-то новые «пути», которые надо только найти, представить их обществу и Правительству, и «кризис» разрешится выздоровлением. Но таких «путей» сегодня нет. Мы можем говорить не о «путях выхода», а о формах и методах сопротивления разрушительной политике и об образе будущего, о котором мы мечтаем.

Почему я откликнулся на приглашение и зачем приехал на Съезд? Я хочу поделиться тем, что я понял в результате более чем пятидесятилетней педагогической жизни и тридцатилетнего научного исследования «реформ» образования в России с 1918 по 2021 год. Я хочу расширить представление активной части общества о процессах, происходящих в нашем образовании в настоящем и происходивших в прошлом. Обращение к прошлому в его связи с настоящим поможет объёмнее, глубже и правильнее понять нынешнюю ситуацию в образовании и найти ответ на вопрос «что делать?».

Сейчас крайне актуальна борьба против жестко навязываемой нам цифровизации образования. Здесь всё ясно: есть много научных данных о недопустимо вредном влиянии цифровых технологий на психическое и физическое здоровье детей [1]. Современные технические возможности позволяют учёным воочию видеть, что происходит внутри мозга под влиянием этих технологий. Их единодушное заключение: **электронное обучение тормозит развитие когнитивных структур мозга, атрофирует некоторые его участки (разрушаются нейронные связи и сокращается объем серого вещества — ключевого элемента в мыслительном процессе), что ведёт детей к «цифровому слабоумию»** (термин ввёл, по-видимому, М. Шпитцер).

На только что проведённом в 2020 г. массовом опыте дистанционного обучения мы непосредственно увидели всю вредоносность и педагогическую неадекватность этих технологий и ужаснулись результатам эксперимента, проявившимся на наших детях.

Об этом говорят и будут говорить многие. Я буду говорить о другом, не менее важном, — о связи нынешних «реформ» с предыдущими, о преемственности их целей, методов и результатов. И постараюсь ответить на три взаимосвязанных вопроса:

1) в чём коренная причина деградации образования?

2) почему дети «плохо учатся»?

3) что надо сделать, чтобы они учились хорошо?

Одна из целей Съезда — получить обоснованный ответ на первый вопрос повестки дня: «деградация системы образования — результат ошибок государственной политики или целенаправленное уничтожение?»

Мой ответ однозначен и обоснован фактами: сознательное, давно спланированное, последовательное многолетнее разрушение российского образования[1] с конечной целью его полного уничтожения и замены кастовым (эта цель отчётливо проявилась в последние 3 года в процессе цифровизации образования).

Перечислю кратко вехи разрушения (подробную историю см. в [2]).

Началось разрушение с 1918 г. В 1930-х оно было пресечено твёрдой государственной Волей: советская школа повернулась к Традиции, и качество обучения и знаний стало быстро расти. В 1949 году 74% выпускников школ знали математику на 4 и 5!

1957 год: первое резкое падение качества. Причина — в учебный процесс вломились «реформаторы». В частности, в 1949 г. они подорвали развитие содержательного мышления детей, разрушив методику обучения решению типовых арифметических задач. В 1956 г. из неполной средней школы (5-7-е классы) вывели замечательные учебники математики А.П. Киселёва, и сразу же, в 1957 г., все проверки констатировали заметное падение качества знаний школьников. В итоге, к 1960 году качественные знания имели только 20% выпускников (сокращение в 3,5 раза).

1978 год: второе, обвальное падение качества. Причина — «реформа-70»: коренное изменение программ, учебников и методов преподавания. Была **уничтожена классическая методика**. Несмотря на сопротивление учителей и сразу же проявившиеся губительные результаты, «реформаторы» последовательно реализовали все свои преступные планы. То же происходит и сегодня.

Судить о целях нужно по результатам. Результаты, начиная с 1956 года и по сей день, всегда одинаковы — непрерывное ухудшение. Официальное отношение к этим результатам тоже всегда одинаково — сокрытие правды завесой «процентомании», умолчанием и ложью, и «перевод стрелок» на новые обманные «пути». Такое отношение проявляет скрытую цель — удержание и закрепление полученных отрицательных результатов.

Если цель благая, то добросовестные и очевидные ошибки всегда исправляются. Наши «реформаторы» никогда не анализировали, не признавали и не исправляли свои «ошибки».

Академик **Л.С. Понтрягин** назвал «реформу-70» **«огромной общегосударственной диверсией»** [3, с. 14]. Без результатов этой «реформы» невозможна была бы переориентация сознания молодёжи с овладения знаниями и дальнейшего профессионального служения обществу на соблазны западных «ценностей» — безответственной свободы, потребительства и гедонизма. А значит, невозможно было бы разрушение страны в 1991—1993 годах.

В 1980-х «реформаторам» удалось удержать все результаты «реформы-70». Её идеи действуют в нашем образовании (в программах, учебниках, «системах» обучения) по сей день и стали незаметно привычными. В частности, не выведены из программ темы высшей математики (прежде всего, дифференцирование и интегрирование) — непосильные для школьного возраста по своей абстрактности, перегружающие содержание учебного предмета и не нужные для общего образования. Именно здесь, **в «реформе-70», — коренная причина и начало непрерывного процесса деградации нашего образования**.

[1]Этот тезис доказан в серии статей, опубликованных журналом «Математическое образование»: 2011, № 2; 2012, № 4; 2013, № 1-2; 2014, №№ 2, 3; 2015, №№ 2, 3.

Обращаю внимание на важнейший исторический факт: при доступных детскому возрасту программах, понятных учебниках и правильной, выработанной более чем столетним опытом русской школы методике преподавания примерно 75% детей можно учить на «хорошо» и «отлично». Сегодня же очередные наследники «реформаторов» уверяют нас, что есть дети «одарённые» (их 25%) и есть «неодарённые» (их 75%), которых можно вообще не учить. И значит, образование должно быть *кастовым.*

Теперь поговорим о детях – о методах их обучения и о результатах. С результатами всё ясно: знаний нет, смыслового мышления нет, способность понимания атрофирована.

К примеру, проверьте своего ребёнка на знание таблицы умножения, на умение складывать, перемножать и делить целые числа и дроби ($1/2 + 1/3 =?$), а главное — на способность решать простые арифметические задачи. Проверьте его грамотность в письме. Проверьте, сможет ли он адекватно пересказать (лучше — написать) прочитанный короткий текст? Сможет ли составить своё маленькое письменное сочинение на заданную тему?

Дайте старшим детям задачу для 4-го класса: «В классе 28 детей, число мальчиков относится к числу девочек, как 4 к 3. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?» Спросите, что значит «относится»? 70% моих студентов не могли понять условие этой задачи.

Современные «реформаторы», их зоркие «наблюдатели» и даже учителя говорят нам: у детей «низкая учебная мотивация», или попросту — дети не хотят учиться. Но почему же они перестали «хотеть» учится? На этот важный вопрос никто внятно и определённо не отвечает. Но может точно ответить история.

Начало обвального падения качества знаний учащихся — 1978 год. Причина — в идеологии «реформы-70» (повышение теоретического уровня обучения), которая сделала обучение формальным, абстрактным и, следовательно, непонимаемым. Доказательство — письмо тринадцати старшеклассниц из Вильнюса, опубликованное в «Комсомольской правде» 12 марта 1978 года в статье под заголовком «Бесталанные ученики?»:

«Нам никак не одолеть программу по математике... Многого не понимаем, зубрёжкой не возьмёшь... Такие заумные учебники... Вот и ходим мы в «дебилах», как называют нас учителя...» [4, с. 104].

Это выдержка из замечательной статьи академика Л.С. Понтрягина, опубликованной журналом «Коммунист» в 1980 году и вскрывшей всю преступную ложность идеологии «реформаторов-70».

Итак, причина того, почему дети перестали «хотеть» учиться, проста — обучение стало «заумным». Учебники стали непонятными, потому дети и перестали их читать.

«Хороший учебник — фундамент хорошего преподавания» (К.Д. Ушинский) [5, с. 219]. В хорошем учебнике сконцентрирована правильная методика обучения. При хорошем учебнике и средний учитель будет иметь хорошие результаты.

Перейдём теперь от прошлой истории к сегодняшней. Думаю, все родители согласятся, что учебники, по которым учат их детей, ужасные. Понимаем ли мы, в чём их пороки и причины этих пороков? Почему в течение вот уже более полувека у детей нет хороших учебников? В то время, когда весь мир продолжает изучать советскую систему образования, методы обучения советской школы, переводит и переиздаёт «знаменитые» учебники математики А.П. Киселёва[2], у нас эти достижения замалчиваются либо лживо искажаются. Придумываются препятствия к возвращению в школу лучших советских учебников под ложным предлогом — они «устарели». Кто в этом заинтересован?

Можем ли мы осознать, что нас обманывают, когда слышим, что наше образование на верном пути «прогресса», что надо идти вперёд, а не назад, что новое время требует от людей новых качеств, поэтому образование должно ставить новые цели («компетенции» и пр.), для достижения которых нужны совершенно новые формы и методы обучения, что надо совершенствовать эти новые формы — ЕГЭ, ФГОСы, дистант и прочее?

[2]URL: https://mathcircle.berkeley.edu/books

Замечу, что ссылка на «прогресс» — стандартный аргумент «реформаторов». Точно так же они оправдывали «реформу-70» требованиями НТР (научно-технической революции), хотя в чём состоят эти «требования», никогда не объясняли. И надо признать, что эта уловка действует на массовое сознание. Сегодня немало родителей и учителей наивно соглашаются с «неостановимостью прогресса», не осознавая, что технологический прогресс и его внедрение в образование — абсолютно разные вещи. Первый, конечно, неостанови́м, но второй — совершенно не нужен школе, вреден и должен быть остановлен, если мы не хотим получить отцифрованную «слабоумную» молодёжь и стать рабами цифровизации и стоящих за нею сил. Заметим, что так же стандартно и так же действенно предложение «совершенствовать» то, что приносит вред (опять — «перевод стрелок» на ложный путь).

Пример нового, внедряемого сегодня «метода» обучения, требуемого «прогрессом», — «проектная деятельность». Заслуженный учитель России, автор инновационной педагогической «системы», доктор педнаук академик РАО **Е.А. Ямбург** предлагает первоклашкам выполнить замечательный «проект» под названием «бабушкин пирог» — он-де развивает личностное эмоциональное общение, память, мелкую моторику и пр. Можем ли мы оценить «лукавство» аргументации и понять истинные цели этого и всех других подобных «проектов»?

Они подменяют обучение знаниям некой придуманной «деятельностью» учащихся, якобы «развивающей» их личность. Истинная цель этого метода — подрыв системы обучения знаниям. Точнее, закрепление достигнутого в 1970-х годах и перевод внимания учителей и родителей на новые ложные цели. Надо знать, что «метод проектов» уже был апробирован «реформаторами» в 1920-х годах, дал отрицательные результаты и был запрещён в 1930-х годах как «вредительский».

Встаёт вопрос: кто возрождает «метод проектов»? Ответ: наша педагогическая и психологическая «наука», сосредоточенная в институтах РАО и на психологическом факультете МГУ. Реанимируется не только этот метод, но и педология (кастовая выбраковка детей), и многое другое, проверенное практикой на предмет вредительства.

Одна из главных фамилий — **А. Асмолов**, доктор психологических наук, академик РАО, зав. кафедрой психологии личности МГУ, вице-президент Российского психологического общества, обладатель всех возможных научных титулов, кавалер многих наград (числом 17), владелец многих руководящих постов (около 20). Он автор *«Стратегии развития вариативного образования в России»* (1994 г.), разрушившей единое образовательное пространство страны. Сегодня дети, переходящие из одной школы в другую, зачастую не могут продолжать нормальное обучение, потому что в разных школах учат по разным программам, по разным учебникам и по разным «системам» обучения.

Другое его «ценное» изобретение — *«системно-деятельностный подход»*. Он придумал этот «подход» в 1985 году и в течение многих лет, будучи заместителем министра образования (1992-1998), занимался внедрением его в практику образования через ФГОСы. Что это за «подход»? Вот что говорит о нём сам Асмолов:

«Системно-деятельностный подход сегодня реально приходит в образование, нацелен на развитие личности, на формирование гражданской идентичности, указывает и помогает отследить ценностные ориентиры, которые встраиваются в новое поколение стандартов российского образования» [6, с. 18].

Вам понятно? Вдумайтесь: каким образом некий словесный «подход», «встроенный» в некий бюрократический документ, может «развить» конкретную личность, «помочь» кому-то где-то что-то «отследить» и «сформировать»? А что за язык! «Подход приходит»?!

За всеми этими претенциозными абсурдными словесами скрывается та же цель — **подменить** знания «деятельностью» и «развитием», конкретные предметные умения и навыки — «универсальными учебными действиями, без которых ничего не может быть». Ну и фраза! И что это такое — «универсальные действия». И существуют ли они в реальности, а не в воображении педакадемиков?

Наконец, надо сказать ещё об одной разрушительной «научной» идее, внедрённой педучёными в наше образование, — идее «развития» ребёнка. Эта идея появилась в советской психологии в начале 1930-х годов, её придумал педолог **Лев Выготский**. Долгое время она осторожно внедрялась в обиход советской педагогики. В 1990-х «реформаторы» внедрили её в российское образование, подменив основную задачу — дать учащимся качественные знания основ наук (**опять подмена!**). С этой идеей и связана родительская «деятельность» по выполнению домашних заданий вместо детей.

Поясню. Л. Выготский ввёл в «науку» представление о двух «зонах» развития ребёнка:

• зона актуального развития (ЗАР) определяется задачами, которые ребёнок может решать сам, без помощи взрослого;

• зона ближайшего развития (ЗБР) — задачи, которые он может решать с помощью взрослого (что значит — «с помощью»? с какой такой «помощью»?).

Наши педучёные сделали вывод, что обучение должно проходить в области ЗБР, иначе ребёнок не разовьётся. Авторы учебников (Л. Петерсон и другие) стали придумывать для детей «развивающие» задачи, которые они не могут решить сами, но должны «суметь» решить с помощью родителей. На деле же, в эту «ЗБР» не могут попасть не только дети, но и родители.

Заметим, что теории Л. Выготского подвергаются сегодня уничтожающей критике психологов всего мира [3]. У нас главным выготскианцем, по его собственному признанию, является А. Асмолов.

Наконец, последний заявленный раздел доклада — желаемое будущее нашего образования.

Есть простая и мудрая истина: «дерево доброе приносит и плоды добрые, а худое дерево приносит и плоды худые» (Мф 17:7). Что такое «худое дерево»? Это дерево, не укоренённое в родной почве, не получающее из неё достаточного количества соков и питательных веществ, необходимых для здорового роста.

Отсюда мораль: **только те новации плодотворны, которые органически вырастают из Традиции**. Только если «новое» базируется на многовековом педагогическом опыте, если учитывает и развивает знания, добытые трудом лучших педагогов и проверенные практикой, можно надеяться, что «новое» тоже будет истинным, жизнеспособным и полезным.

Доказательство: реформа 1930-х годов, которая отбросила все выдуманные «инновации» 1920-х, повернула нашу школу лицом к Традиции (с учётом новых целей и возможностей общества — массовость и др.), к принципам организации обучения, выработанным более чем столетним развитием дореволюционной русской школы (включая методы и учебники), и за семь лет, к 1937 году, восстановила качество образования.

Вывод для родителей. Не ищите «новых», «лучших» педагогических «систем», методов, учителей, учебников. Не надейтесь на чудо, которое позволит легко решить вашу проблему и дать хорошее образование вашему ребёнку. **Общего образования в России больше нет**. Боритесь сообща за то, чтобы в России было восстановлено советское образование 1930–1950-х годов, высшее качество которого признано и изучается во всём мире.

Это **единственный путь, правильность которого доказана историей**. Все другие «пути», на которые «реформаторы» регулярно «переводят стрелки», имеют целью увести нас подальше от истинного, чтобы мы даже забыли о его существовании.

Путь этот сегодня крепко закрыт. Но если России суждено жить и продолжать нести в Мир свою Миссию, он непременно откроется.

И знайте, что вас будут сбивать с этого пути, соблазнять «инновациями», обольщать лукавыми словами и обещаниями, внушать, что надо идти «в ногу со временем», что иного не дано.

Чтобы устоять, надо глубоко понимать истинную реальность (прошлую и настоящую), которую мы забыли и которую изощрённо искажают новые «реформаторы» и их учёная обслуга.

Слышится контраргумент «нельзя дважды войти в одну и ту же воду». Он здесь неприменим. Вернуться к традиции, к проверенным жизнью принципам не равносильно «войти в ту же воду». Пример — реформа 1930-х годов.

В заключение хочу затронуть ещё одну важную тему — тему глобальной образовательной политики. Надо понимать, что образование разрушается не только у нас в стране, но и во всём мире.

[3]https://ru.wikipedia.org/wiki/ %D0%92%D1%8B %D0%B3%D0%BE%D1%82%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9, _%D0%9B%D%B5%D0%B2_%D0%A1%D0%B5%D0%BC%D1%91%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87

Цель глобалистов — кастовое общество и кастовое образование. Эту цель наивно-цинично выдал нам Герман Греф: «Как только люди поймут основу своего «Я», управлять ими, то есть манипулировать, станет чрезвычайно тяжело»[4].

Следовательно, цель Грефа и стоящих за ним сил — переформатировать сознание людей так, чтобы они не могли понять основу своего «Я». Ключевую роль во всём этом процессе играет образование.

Сегодня приоткрылась завеса, показались некоторые доселе скрытые управители глобальных «реформ» (в частности, образовательных), и прояснились их цели. Послушайте настоящего народного учителя, настоящего профессора, математика **С.Е. Рукшина**, который на вопрос о том, кто же запустил этот геополитический проект и кто управляет им, отвечает так:

«Кто запустил?... Я боюсь, что мы с вами не узнаем ответа на этот вопрос. Но есть интереснейшая деталь. В начале 2000-х годов я удостоился приглашения американцев на их ежегодный семинар, который проводит небольшой частный институт в Парк-Сити. После Олимпиады в Солт-Лейк Сити они собрали представителей десятка стран, система образования которых им была интересна... И потом появилась в конце этого семинара Элен Вульфенсон — жена бывшего председателя Всемирного банка... Я помню её замечательную цитату, в переводе на русский она, практически дословно, звучит так: "Мы считаем, что Россия недостаточно богатая и цивилизованная страна, чтобы иметь общедоступное хорошее образование. И у нас есть инструменты, чтоб довести нашу точку зрения до тех, кто руководит тенденциями и управляет образованием в вашей стране"»[5].

Какие «инструменты» она имела в виду? Конечно, деньги! Это главный «инструмент» всемирных «реформаторов», который позволяет им инициировать и эффективно управлять разнообразными процессами в мировой истории. Цели и механизмы этого управления раскрывает нам профессор **Валентин Катасонов**[6].

Напомню ещё несколько фактов, которые надо знать.

В 1994 году Всемирный банк подготовил доклад «Реформа образования для России», в котором потребовал ввести ЕГЭ, распустить педвузы и убрать профтехучилища. На исполнение этих указаний он выделил России 220 млн долларов. Указания, как мы знаем, исполнены. Правда, кое-где «профтехколледжи» и педвузы ещё остались, но их продолжают сознательно и целенаправленно добивать, как поведала нам в своём выступлении на Конференции активист из Иркутска **В.А. Бадюк**.

В 1992 году по инициативе Всемирного банка и на его средства при поддержке премьер-министра РФ **Е. Гайдара** была создана Высшая школа экономики (ВШЭ). Цели: воспитание новых кадров «на основе использования зарубежного опыта» и изменение общественного сознания через «реформирование» образования.

В 1993 году эту цель уточнил и поставил перед образованием первый «демократический» министр образования РФ **Э. Днепров** — «сформировать новый тип личности и народа»[7].

Через 25 лет, в 2018 году, ректор ВШЭ **Ярослав Кузьминов**, глава Института образования ВШЭ **Исаак Фрумин**, директор Института социальной политики ВШЭ **Лилия Овчарова** анонсировали обществу очередную «реформу»[8], цель которой — «создание нового человека» через непрерывный процесс (имеется в виду непрерывный контроль за развитием человека) «от колыбели до могилы». Контроль предполагается осуществлять с помощью всеобъемлющей цифровизации и чипизации детей. Поэтому в докладе ВШЭ и поставлена задача сверхбыстрой цифровизации школы.

---

[4]Из выступления главы Сбербанка РФ Германа Грефа на Петербургском экономическом форуме 2016 г. (URL: https://json.tv/ict_news_read/german_gref-sberbank_rossiivystuplenie_na_gaydarovskom_forume-20160121074319).

[5]URL.: https://mediamera.ru/post/33336. Смотреть мин 2.25–3.51.

[6]URL.: https://zavtra.ru/blogs/zagovor_protiv_chelovechestva_bil_anonsirovan_polveka_nazad

[7]Цит. по: Учительская газета. - 1994. - № 50. - С. 13.

[8]URL: http://ria.ru/analitics/20180412/1518422867.html?utm_source=news.mail.ru& utm_medium=informer&utm_campaign=rian_partners

Речь уже идёт не о разрушении образования, а о разрушении Души России!

Что же нам делать?

Прежде всего, понять, где Правда, а где Ложь. И твёрдо стать в ряды борцов за Правду.

Правда состоит в том, что идёт многолетнее целенаправленное уничтожение образования в России. И, значит, не следует ожидать, что «нас услышат», не следует искать «конкретные предложения». Надо организовываться в массовые общественные движения и переходить к действенным формам сопротивления разрушению образования.

Не ждите быстрых результатов. Борьба будет долгая и трудная. Расширяйте круг борцов. Просвещайте людей. Не теряйте энергии и цели. Верьте в правоту и победу нашего Дела!

Вера основана на сознании нашей Правоты и на растущем в России (и в мире) массовом общественном *сознательном* сопротивлении указанному разрушению.

Исход борьбы зависит от нашей сплочённости, от нашей настойчивости и бескомпромиссности, от решительности и силы наших действий.

Литература

1. Шпитцер М. Антимозг. Цифровые технологии и мозг. М. Издательство АСТ. - 2014. URL.: https://www.1itmir.me/br/?b=189102&p=.1

2. Костенко И.П. «Реформы» образования в России 1918-2018 (идеи, методология, результаты): монография. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М.-Ижевск. - Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». - 2020. - 194 с.

3. Понтрягин Л.С. Жизнеописание Льва Семёновича Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908, г. Москва. – М.: ИЧП «Прима В». - 1998.

4. Понтрягин Л.С. О математике и качестве её преподавания // Коммунист. - 1980. - № 14. - С. 100-110.

5. Ушинский К.Д. Собр. соч. в 11 т. - Т. 2. - С. 219.

6. Асмолов А.Г. Системно-деятельностный подход к разработке стандартов нового поколения // Педагогика. - 2009. - № 4. - С. 18-22.

Костенко Игорь Петрович,
доцент, кандидат физ.-мат. наук, Краснодар.

E-mail: kost@kubannet.ru

Об определениях выпуклости

А. И. Саблин

В заметке, предназначенной для студентов младших курсов, демонстрируется применение методов математического анализа в изучении геометрических представлений о выпуклости.

Преподаватели математики знают два определения выпуклости для функции, определённой в каждой точке некоторого интервала.

Определение 1. Функция *выпукла вниз*, если график функции лежит не выше любой секущей к этому графику между точками сечения.

Определение 2. Функция *выпукла вниз*, если график функции лежит не ниже любой касательной к этому графику.

Цель этой заметки — доказать, что эти определения в некотором смысле эквивалентны. А именно, их эквивалентность зависит от того, как давать определения понятий “касательная” и “секущая”. С определением секущей особых проблем нет.

Определение 3. *Секущей графика функции f с точками сечения c и d* называется прямая, проходящая через точки $(c; f(c))$ и $(d; f(d))$.

Что касается касательной, то традиционное для математического анализа определение касательной как прямой, проходящей через точку на графике, тангенс угла наклона которой равен производной функции в этой точке, нам не подходит, поскольку оно предполагает наличие производной в каждой точке, в то время как нетрудно привести пример функции, которая удовлетворяет определению 1 и при этом в одной из точек не имеет производной. Например,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{при} \quad x < 0, \\ x & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы добиться эквивалентности определений 1 и 2, мы должны несколько расширить определение касательной. Как мы докажем в дальнейшем, функция, удовлетворяющая определению 1, будет непрерывной и, более того, в каждой точке она будет иметь *правую и левую производные*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Будем их называть *односторонними производными.* Этот факт позволяет доказать эквивалентность определений 1 и 2, если дать следующее определение касательной:

Определение 4. *Касательной к графику функции f в точке x_0* называется любая прямая, которая проходит через точку $(x_0; f(x_0))$ и тангенс угла наклона которой лежит между односторонними производными в этой точке, либо совпадает с одной из них.

Для более подробного изучения определения 1 докажем утверждение:

Утверждение 1. *Пусть функция f определена на $(a; b)$ и принимает значения в множестве вещественных чисел. Тогда следующие условия на f эквивалентны:*

1. *график функции лежит не выше любой из секущих к этому графику между точками сечения;*

2. *график функции лежит не ниже любой из секущих к этому графику правее точек сечения;*

3. *график функции лежит не ниже любой из секущих к этому графику левее точек сечения;*

4. *для любых* x_1, x_2, x_3*, таких, что* $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$*, справедливо неравенство*
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}; \tag{1}$$

5. *для любых* x_1, x_2, x_3*, таких, что* $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$*, справедливо неравенство*
$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}; \tag{2}$$

6. *для любых* x_1, x_2, x_3*, таких, что* $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$*, справедливо неравенство*
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{3}$$

Доказательство: Сначала отметим, что секущая с точками сечения c и d имеет уравнение
$$y = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)+f(c).$$
Это нетрудно проверить подстановкой вместо x поочерёдно точек c и d.

Пусть x_1, x_2, x_3 любые и $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. Запишем уравнение секущей с точками сечения x_1 и x_3:
$$y = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x-x_1)+f(x_1).$$
Условие 1 можно записать в виде неравенства:
$$f(x_2) \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1).$$
Перенесём $f(x_1)$ влево и поделим на (x_2-x_1). Получаем неравенство (1). Итак, условие 1 и условие 4 эквивалентны.

Запишем уравнение секущей с точками сечения x_3 и x_1:
$$y = \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}(x-x_3)+f(x_3).$$
В этом случае условие 1 превращается в неравенство:
$$f(x_2) \le \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}(x_2-x_3)+f(x_3).$$
Перенесём $f(x_3)$ влево и поделим на (x_2-x_3). Так как (x_2-x_3) отрицательно, то знак неравенства поменяется. Получаем:
$$\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} \ge \frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}.$$
Умножив числители и знаменатели дробей на (-1) и поменяв их местами, получаем неравенство (2). Итак, условие 1 и условие 5 тоже эквивалентны.

Запишем уравнение секущей с точками сечения x_1 и x_2:

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Условие 2 можно записать в виде неравенства:

$$f(x_3) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) + f(x_1).$$

Перенесём $f(x_1)$ влево и поделим на $(x_3 - x_1)$. Получаем неравенство, эквивалентное (1). Итак, условие 2 и условие 4 эквивалентны.

Запишем уравнение секущей с точками сечения x_2 и x_1:

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2) + f(x_2).$$

Условие 2 можно записать в виде неравенства:

$$f(x_3) \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x_3 - x_2) + f(x_2).$$

Перенесём $f(x_2)$ влево, поделим на $(x_3 - x_2)$ и умножим числитель и знаменатель правой дроби на (-1). Получаем неравенство, эквивалентное (3). Итак, условие 2 и условие 6 эквивалентны.

Запишем уравнение секущей с точками сечения x_2 и x_3:

$$y = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x - x_2) + f(x_2).$$

Условие 3 можно записать в виде неравенства:

$$f(x_1) \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x_1 - x_2) + f(x_2).$$

Перенесём $f(x_2)$ влево, поделим на $(x_1 - x_2)$ и умножим числитель и знаменатель первой дроби на (-1). Так как $(x_1 - x_2)$ отрицательно, знак неравенства поменяется. Получаем неравенство, эквивалентное (3). Итак, условие 3 и условие 6 эквивалентны.

Утверждение 1 доказано.

Докажем теперь эквивалентность определений 1 и 2.

Пусть f определена на $(a; b)$ и удовлетворяет определению 1, тогда выполняются все условия из утверждения 1.

Пусть x_0 произвольная точка из $(a; b)$ и x_1, x_2 таковы, что $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ Пусть $l_1(x)$ — секущая с точками сечения x_1 и x_0, $l_2(x)$ — секущая с точками сечения x_0 и x_2. Из условий 1 и 2 утверждения 1 следует, что при x, принадлежащем $(x_0; x_2)$, имеем

$$l_1(x) \leq f(x) \leq l_2(x).$$

Так как

$$\lim_{x \to x_0+} l_1(x) = \lim_{x \to x_0+} l_2(x) = f(x_0),$$

то, по известному свойству предела,

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0),$$

то есть $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0. Непрерывность слева доказывается аналогично. Так как x_0 выбрано произвольно, то f непрерывна на $(a;b)$.

Пусть теперь x_0 — произвольная точка из $(a;b)$, рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 также произвольны, причём $a < x_1 < x_2 < x_0 < x_3 < x_4 < b$.

Докажем сначала неравенства

$$g(x_1) \le g(x_2) \le g(x_3) \le g(x_4). \tag{4}$$

Применим условие 5 утверждения 1 к точкам x_1, x_2, x_0, получим неравенство

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \le \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2},$$

которое после умножения числителя и знаменателя левой и правой дроби на (-1) превращается в $g(x_1) \le g(x_2)$.

Применим условие 6 утверждения 1 к точкам x_2, x_0, x_3 и получим неравенство

$$\frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2} \le \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0},$$

которое после умножения числителя и знаменателя правой дроби на (-1) превращается в $g(x_2) \le g(x_3)$.

Применим условие 4 утверждения 1 к точкам x_0, x_3, x_4 и получим неравенство

$$\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} \le \frac{f(x_4) - f(x_0)}{x_4 - x_0},$$

которое совпадает с $g(x_3) \le g(x_4)$.

Неравенства (4) доказаны.

Заметим, что неравенства $g(x_1) \le g(x_2) \le g(x_3)$ означают, что $g(x)$ не убывает на (a, x_0) и ограничена сверху, поэтому существует

$$\lim_{x \to x_0-} g(x) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0),$$

причём

$$g(x_2) \le f'_-(x_0) \le g(x_3). \tag{5}$$

Кроме того, $g(x_3) \le g(x_4)$ означает, что $g(x)$ не убывает на (x_0, b) (не возрастает при $x \to x_0+$) и, как следует из (5), ограничена снизу числом $f'_-(x_0)$, поэтому существует

$$\lim_{x \to x_0+} g(x) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0),$$

причём

$$g(x_2) \le f'_-(x_0) \le f'_+(x_0) \le g(x_3). \tag{6}$$

Итак, мы доказали существование односторонних производных в точке x_0 и поэтому можем записать уравнение касательной в точке x_0:

$$y = k(x - x_0) + f(x_0). \tag{7}$$

Кроме того, согласно определению 4, должны выполняться неравенства

$$f'_-(x_0) \le k \le f'_+(x_0).$$

Из последних неравенств и неравенств (6) следуют неравенства

$$g(x_2) \le k \le g(x_3). \tag{8}$$

Левое из неравенств (8) означает, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \le k,$$

откуда, с учётом того, что $(x_2 - x_0)$ отрицательно, следует неравенство

$$f(x_2) \ge k(x_2 - x_0) + f(x_0),$$

которое означает, что в точке x_2 график f лежит не ниже касательной (7).

Правое из неравенств (8) означает, что

$$k \le \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0},$$

откуда следует неравенство

$$k(x_3 - x_0) + f(x_0) \le f(x_3),$$

которое означает, что в точке x_3 график f лежит не ниже касательной (7).

Так как точки x_2, x_0, x_3 были выбраны произвольно, то f удовлетворяет определению 2.

Прежде чем перейти ко второй части доказательства, докажем следующую геометрически очевидную лемму:

Лемма. *Пусть l_1 и l_2 — линейные функции (график — прямая вида $y = kx+b$). Если неравенство*

$$l_1(x) \le l_2(x)$$

выполняется для концов отрезка $[x_1; x_2]$, то оно выполняется для всех точек отрезка $[x_1; x_2]$.

Доказательство. Рассмотрим $l(x) = l_2(x) - l_1(x)$. Надо доказать, что $l(x) \ge 0$ при всех x из $[x_1; x_2]$, если $l(x) \ge 0$ для концов отрезка $[x_1; x_2]$. Так как $l(x) = kx + b$ при некоторых k и b, то рассмотрим два случая. Если $k \ge 0$, то $l(x)$ не убывает на $[x_1; x_2]$, следовательно $l(x) \ge l(x_1) \ge 0$ всех x из $[x_1; x_2]$. Если $k < 0$, то $l(x)$ убывает на $[x_1; x_2]$, следовательно $l(x) \ge l(x_2) \ge 0$ всех x из $[x_1; x_2]$. Лемма доказана.

Пусть теперь f определена на $(a; b)$ и удовлетворяет определению 2. Пусть x_1, x_2, x_3 произвольны и $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. Пусть l_1 — касательная в точке x_2. Так как f удовлетворяет определению 2, то $l_1(x_1) \le f(x_1)$ и $l_1(x_3) \le f(x_3)$. Пусть l_2 — секущая с точками сечения x_1 и x_3, тогда $f(x_1) = l_2(x_1)$ и $f(x_3) = l_2(x_3)$. Следовательно, для прямых l_1 и l_2 выполняются неравенства $l_1(x_1) \le l_2(x_1)$ и $l_1(x_3) \le l_2(x_3)$. Используя лемму, получаем неравенство $l_1(x_2) \le l_2(x_2)$. Так как l_1 — касательная в точке x_2, то $l_1(x_2) = f(x_2)$. Получаем $f(x_2) \le l_2(x_2)$. То есть выполняются условия определения 1. Итак, эквивалентность определений полностью доказана.

Мы привели здесь аккуратные, характерные для современного математического анализа рассуждения, доказывающие эквивалентность двух определений выпуклости. Ключевую роль в них играло утверждение 1. Возможно, кому-то это изложение покажется чрезмерно сложным. Однако, если мы будем рассматривать левые и правые части неравенств (1), (2) и (3) как тангенсы угла наклона соответствующих секущих (см. рисунки 1,2,3),

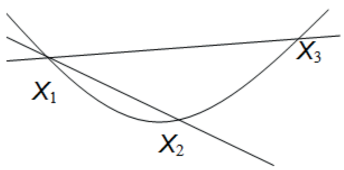


Рис. 1

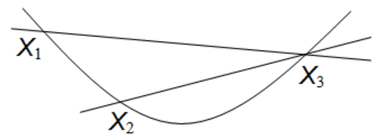


Рис. 2

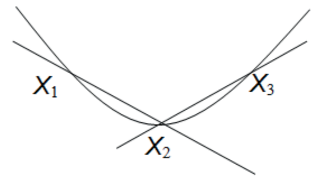


Рис. 3

то условия утверждения 1 становятся геометрически очевидными.

Отметим также, что условия 1 и 2 утверждения 1 являются утверждением о том, что тангенс угла наклона секущей у выпуклой вниз функции есть неубывающая функция как левой точки сечения, так и правой точки сечения, что, собственно, и используется в неравенствах (4), играющих важную роль в доказательстве.

Наконец, мы могли определить касательную как предельное положение секущей. При этом надо рассматривать два случая: правая точка сечения постоянна, а левая к ней приближается, и наоборот, левая точка сечения постоянна, а правая к ней приближается. Формально мы бы получили две касательных, соответствующих правой и левой производной в точке. Эти касательные совпадают, если функция дифференцируема в точке. Кроме того, согласно утверждению 1, можно было бы определить функцию, выпуклую вниз, как функцию, график который лежит выше части секущей, расположенной правее точек сечения. А поскольку все секущие лежат не выше графика, то и касательная как их предел тоже лежит не выше графика правее точки касания. Для точек, лежащих левее графика, рассуждение аналогично. Все эти рассуждения можно было бы изложить и более аккуратно, как сделано в основной части статьи.

Уместно будет также отметить, что каждое из неравенств (1), (2), (3) эквивалентно следующему “симметричному” неравенству:

$$f(x_1)(x_2 - x_3) + f(x_2)(x_3 - x_1) + f(x_3)(x_1 - x_2) \leq 0.$$

Проверку этого факта мы оставляем читателю.

Мы сознательно опустили в этой заметке все нюансы терминологии, связанные с понятием выпуклости функции, а также связь с понятием *выпуклости множества.* Дотошный читатель может обратиться к математической энциклопедии [1].

Литература

1. Математическая энциклопедия, том 1. - М.:“Советская энциклопедия”, 1977. - стр. 781-783.

Саблин Александр Иванович,
кандидат физико-математических наук,
г. Мытищи Московской области.

E-mail: sablin3103@gmail.com

Оценки факториала и формула Стирлинга

А. В. Бегунц, С. М. Лыткин

В статье обсуждаются различные оценки скорости роста $n!$, начиная с двойных неравенств, доказываемых по индукции, и заканчивая асимптотическим рядом Стирлинга. Приводятся наглядные иллюстрации и таблицы с численными результатами.

Формулу Стирлинга можно смело назвать самой красивой из важнейших математических формул, равно как и самой важной из красивейших. Она является одним из основных мостиков, связывающих дискретную и непрерывную математику. Число перестановок длины n (фундаментальное комбинаторное понятие) равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n, которое обозначается через $n!$. Асимптотическая формула Стирлинга, в которой участвуют не менее фундаментальные для анализа числа e и π, позволяет быстро и довольно точно оценить эту величину для больших значений n. В данной статье приводятся различные способы оценки скорости роста $n!$ в порядке возрастания их точности: от простых двусторонних оценок до асимптотического ряда Стирлинга.

Простейшая оценка величины $n!$ получается путём замены всех множителей на наименьший или наибольший из них:

$$1 = \prod_{k=1}^{n} 1 \leqslant n! = \prod_{k=1}^{n} k \leqslant \prod_{k=1}^{n} n = n^n.$$

При $n \geqslant 2$ эту чрезвычайно грубую оценку можно несколько улучшить, применив тот же метод к произведению $n! = \prod\limits_{k=2}^{n} k$. Получается двойное неравенство

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

причём при $n \geqslant 4$ левую часть можно заменить на 2^n. Аналогичным способом выводится неравенство

$$n! \geqslant (m-1)! \cdot m^{n-m+1}, \tag{2}$$

справедливое для любых $1 \leqslant m \leqslant n$. Хотя оценки (1) и (2) весьма грубы, они уже дают примерное представление о быстрой скорости роста факториала. Из неравенства (2) вытекает, что $n!$ растёт супер-экспоненциально: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$ для любого $a > 1$. С другой стороны, в силу неравенства $n! < n^n = e^{n \ln n}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{a^{n^{1+\varepsilon}}} = 0$ для любых $a > 1$ и $\varepsilon > 0$, поэтому скорость роста факториала превышает экспоненциальную не слишком сильно.

Дальнейшие оценки требуют применения методов математического анализа. В качестве нетрудного упражнения на применение метода математической индукции первокурсникам математических специальностей обычно предлагают доказать оценку

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

(см. [1, т. 1, с. 70, задача 2.98]). Более точная оценка получается с привлечением определения числа $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leqslant en\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

В самом деле, для $n = 1$ утверждение верно. Пусть оценка (4) справедлива при некотором $n \in \mathbb{N}$. По индуктивному предположению имеем

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1)\Big(\frac{n}{e}\Big)^n = e\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \Big(\frac{n+1}{e}\Big)^{n+1} > \Big(\frac{n+1}{e}\Big)^{n+1},$$

поскольку $e > \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, левое неравенство оценки (4) доказано. Правое неравенство доказывается аналогично с привлечением оценки $e < \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

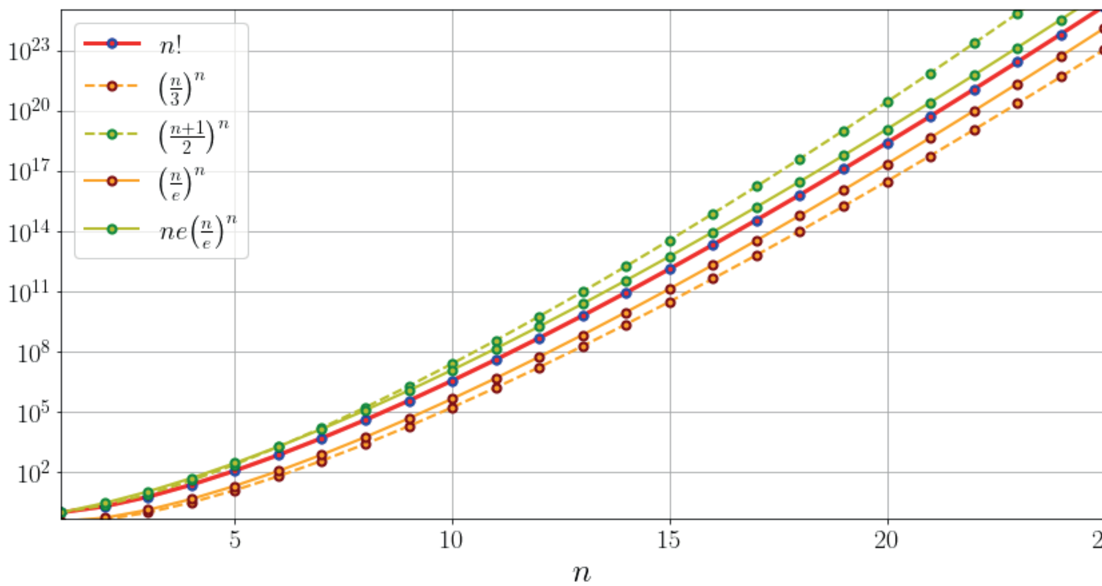


Рис. 1. Двусторонние оценки для $n!$

На рис. 1 наглядно показано, что оценка (4) существенно точнее оценки (3) (обратите внимание, что шкала по оси ординат логарифмическая!).

Правая часть оценки (4) в en раз больше левой. Оказывается, что истинное значение факториала расположено примерно посередине (в смысле среднего геометрического) между нижней и верхней оценкой (4). Согласно классической формуле Стирлинга

$$n! \sim \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Одно из самых доступных доказательств формулы Стирлинга получается путём рассмотрения бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \text{где } a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

(см., например, [1, т. 2, с. 41–42]). Поскольку $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{-n-1/2}$, по формуле Тейлора получаем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \exp\left(1 - \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\right) = 1 - \frac{1}{12n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \quad n \to \infty,$$

поэтому произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ сходится. Его частичное произведение представимо в виде

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{a_{n+1}}{e},$$

откуда вытекает существование предела последовательности (a_n):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = A, \quad A > 0.$$

Таким образом, эквивалентность $n! \sim A\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ доказана.

Число A найдём с помощью формулы Валлиса (см., например, [2, с. 169]), согласно которой

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} \to \frac{\pi}{2}, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}$ при $n \to \infty$. Умножая числитель и знаменатель на $(2n)!! = 2^n \cdot n!$ и используя полученную эквивалентность для факториала, находим

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{2^{2n}A^2\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n} \cdot n}{A\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}} = \frac{A}{\sqrt{2}}\sqrt{n} \sim \sqrt{\pi n}, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $A = \sqrt{2\pi}$. Таким образом, формула Стирлинга доказана.

Коснёмся истории доказательства асимптотической формулы (5) (см., например, [4, с. 292]). Формула Валлиса в виде

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots}$$

была известна с середины XVII в. Для вычисления биномиальных коэффициентов А. де Муавру требовались приближённые значения $\ln n!$, что в 1720-х годах фактически привело его к формуле $n! \approx A\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$. Равенство $A = \sqrt{2\pi}$ вместе с самостоятельным доказательством асимптотической формулы получено Дж. Стирлингом, о чём он в 1729 г. известил де Муавра письмом, а результат был опуликован в 1730 г.

Из анализа ряда Тейлора функции $\ln \frac{1+x}{1-x}$ при $x = \frac{1}{2n+1}$ (см. [2, с. 421]) можно получить уточнение формулы Стирлинга в виде

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Как показано в статье [3], последовательность (θ_n) стремится к единице при $n \to \infty$; точнее говоря,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{r_n}, \quad \frac{1}{12n+1} < r_n < \frac{1}{12n}. \tag{6}$$

Результаты вычислений по формулам из оценок (5)–(6) приведём в следующей таблице. Все значения округлены до последнего выписанного знака. Первые цифры, совпадающие с точным значением факториала, выделены полужирным шрифтом.

n	$(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$	$(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}e^{\frac{1}{12n+1}}$	$n!$	$(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}e^{\frac{1}{12n}}$
1	0,922137009	0,995870161	1	**1**,002274449
2	1,919004351	1,997320405	2	**2**,000652048
3	5,836209591	5,996095879	6	**6**,000599142
4	**2**3,506175133	**2**3,990821543	24	**24**,001023891
5	**1**18,019167956	**1**19,969853959	120	**120**,002637086
6	**7**10,078184642	**7**19,872212287	720	**720**,009187306
7	4980,395831612	**50**39,334743429	5040	**5040**,040582036
8	39902,39545266	**403**15,88809741	40320	**40320**,21778523
9	**3**59536,8728419	**3628**50,5533899	362880	**36288**1,3778858
10	**3**598695,618741	**3628**560,141985	3628800	**36288**10,051427
11	**3,9**615625 $\times 10^{7}$	**3,991**4609 $\times 10^{7}$	39916800	**3,99168**83 $\times 10^{7}$
12	**4,7**568748 $\times 10^{8}$	**4,7**897942 $\times 10^{8}$	479001600	**4,7900**236 $\times 10^{8}$
13	**6**,1872395 $\times 10^{9}$	**6,22**67744 $\times 10^{9}$	6227020800	**6,2270**287 $\times 10^{9}$
14	**8**,6661002 $\times 10^{10}$	**8,717**5309 $\times 10^{10}$	87178291200	**8,717**8379 $\times 10^{10}$
15	**1,30**04307 $\times 10^{12}$	**1,3076**353 $\times 10^{12}$	1307674368000	**1,30767**54 $\times 10^{12}$
16	**2,0**814114 $\times 10^{13}$	**2,0922**239 $\times 10^{13}$	20922789888000	**2,0922**804 $\times 10^{13}$
17	**3,5**394833 $\times 10^{14}$	**3,5567**912 $\times 10^{14}$	355687428096000	**3,55687**63 $\times 10^{14}$
18	**6**,3728046 $\times 10^{15}$	**6,402**2402 $\times 10^{15}$	6402373705728000	**6,40237**68 $\times 10^{15}$
19	**1,21**11279 $\times 10^{17}$	**1,2164**282 $\times 10^{17}$	121645100408832000	**1,216451**5 $\times 10^{17}$
20	**2,4**227869 $\times 10^{18}$	**2,432**8607 $\times 10^{18}$	2432902008176640000	**2,432902**9 $\times 10^{18}$

Более точная асимптотическая формула Стирлинга получается с помощью формулы суммирования Эйлера (см. [5, с. 509–521]), применённой к последовательности $\ln n! = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k$:

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + O\Big(\frac{1}{n^5}\Big), \quad n \to \infty.$$

Потенцируя, отсюда находим

$$n! = \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \sqrt{2\pi n}\exp\Big(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + O\Big(\frac{1}{n^5}\Big)\Big).$$

Из формулы Тейлора для функции e^x получаем соотношение

$$\exp\Big(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + O\Big(\frac{1}{n^5}\Big)\Big) = 1 + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{288n^2} + \frac{1}{10368n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Таким образом,

$$n! = \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \sqrt{2\pi n}\Big(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big), \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Поскольку

$$e^{\frac{1}{12n}} = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \quad e^{\frac{1}{12n+1}} = 1 + \frac{1}{12n} - \frac{1}{288n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \quad n \to \infty,$$

сравнивая эти разложения с асимптотической формулой (7), можно заметить, что верхняя граница оценки (6) точнее, чем нижняя (это прослеживается и в приведённой таблице).

Асимптотическое разложение (7) можно также получить применением метода Лапласа к гамма-функции $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda-1}e^{-x}\,dx$, пользуясь равенством $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. Метод Лапласа используется в книге [6] для асимптотических оценок интегралов вида $F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx$ при $\lambda \to +\infty$.

Переформулируем теорему 2 из § 2 главы XIX этого учебника для интересующего нас частного случая.

Теорема. *Пусть* $f, S \in C[a;b]$, $f, S \in C^\infty(x_0-\delta; x_0+\delta)$, $x_0 \in (a;b)$, $\delta > 0$, $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) < 0$ *и* $\max\limits_{[a;b]} S(x)$ *достигается в единственной точке* x_0*. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx \simeq \frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda^n},$$

где

$$c_n = -\frac{2\sqrt{\pi}}{n!}\Big(h(x)\frac{d}{dx}\Big)^{2n} \left(f(x)h(x)\right)\big|_{x=x_0+0}\,, \quad h(x) = \frac{\sqrt{S(x_0)-S(x)}}{S'(x)}.$$

С помощью замены $x = \lambda t$ преобразуем гамма-функцию к виду

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda \ln x - x}\,dx = \lambda^{\lambda+1}\int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda(\ln t - t)}\,dt = \lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{\lambda(\ln(1+t)-t)}\,dt.$$

К интегралу $\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{\lambda(\ln(1+x)-x)}\,dx$ применим результат приведённой выше теоремы. Имеем $f(x) \equiv 1$, $S(x) = \ln(1+x) - x$, $x_0 = 0$, $S'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$, $S'(0) = 0$, $S''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $S''(0) = -1 < 0$. Таким образом, все условия теоремы выполнены, и остаётся только вычислить коэффициенты c_n. Для этого выпишем разложение функции $h(x) = -\frac{1+x}{x}\sqrt{x - \ln(1+x)}$ по формуле Тейлора при $x \to +0$:

$$h(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}x}{3} + \frac{5\sqrt{2}x^2}{72} - \frac{4\sqrt{2}x^3}{135} + \frac{421\sqrt{2}x^4}{25920} + O\left(x^5\right).$$

Отсюда вытекают равенства[1]:

$$h'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad h''(0) = \frac{5\sqrt{2}}{36}, \quad h'''(0) = -\frac{8\sqrt{2}}{45}, \quad h^{(4)}(0) = \frac{421\sqrt{2}}{1080}.$$

Далее, последовательно находим коэффициенты c_n:

$$\begin{aligned} c_0 = {} & -2\sqrt{\pi}h(0) = \sqrt{2\pi}, \\ c_1 = {} & -2\sqrt{\pi}\big(h^2(0)h''(0) + h(0)h'^2(0)\big) = \frac{\sqrt{2\pi}}{12}, \\ c_2 = {} & -\sqrt{\pi}\big(hh'^4 + 11h^2h'^2h'' + 4h^3h''^2 + 7h^3h'h^{(3)} + h^4h^{(4)}\big)(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{288}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+\frac{1}{2}}e^{-\lambda}\sqrt{2\pi}\Big(1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{288\lambda^2} + O\Big(\frac{1}{\lambda^3}\Big)\Big), \quad \lambda \to +\infty,$$

что даёт первые три члена асимптотической формулы (7). Продолжая вычисление производных функции $h(x)$, можно таким образом получить любое количество членов асимптотической формулы Стирлинга, которую иногда записывают в более общем виде *асимптотического ряда Стирлинга*:

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^k}. \tag{8}$$

Формулу (8) следует понимать не как сумму ряда в классическом смысле (он, разумеется, расходится), а как счётный набор асимптотических равенств

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\Big(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k} + O\Big(\frac{1}{n^{k+1}}\Big)\Big), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

[1] Далее под всеми производными функции h в нуле понимаются соответствующие правые производные.

Альтернативная формула для коэффициентов ряда Стирлинга приведена в статье [7]:

$$a_k = \frac{1}{(2k)!!}\,\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\left(\frac{x^2}{2(e^x-1-x)}\right)^{k+\frac{1}{2}}\Bigg|_{x=0} = (2k-1)!!\left[x^{2k}\right]\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2x^j}{(j+2)!}\right)^{-k-\frac{1}{2}}, \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

где через $[x^k]P(x)$ обозначен коэффициент при x^k в выражении $P(x)$. По формуле Тейлора для биномиального ряда находим отсюда, что $a_0 = 1$,

$$\begin{aligned} a_1 = &\ [x^2]\Big(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+O(x^3)\Big) = \frac{1}{12},\\ a_2 = &\ 3[x^4]\Big(1-\tfrac{5x}{6}+\frac{5x^2}{18}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{864}+O(x^5)\Big) = \frac{1}{288},\\ a_3 = &\ 15[x^6]\Big(1-\frac{7x}{6}+\frac{7x^2}{12}-\frac{7x^3}{45}+\frac{91x^4}{4320}-\frac{x^5}{1728}-\frac{139x^6}{777600}+O(x^7)\Big) = -\frac{139}{51840}, \end{aligned}$$

и мы снова вывели асимптотическое представление (7).

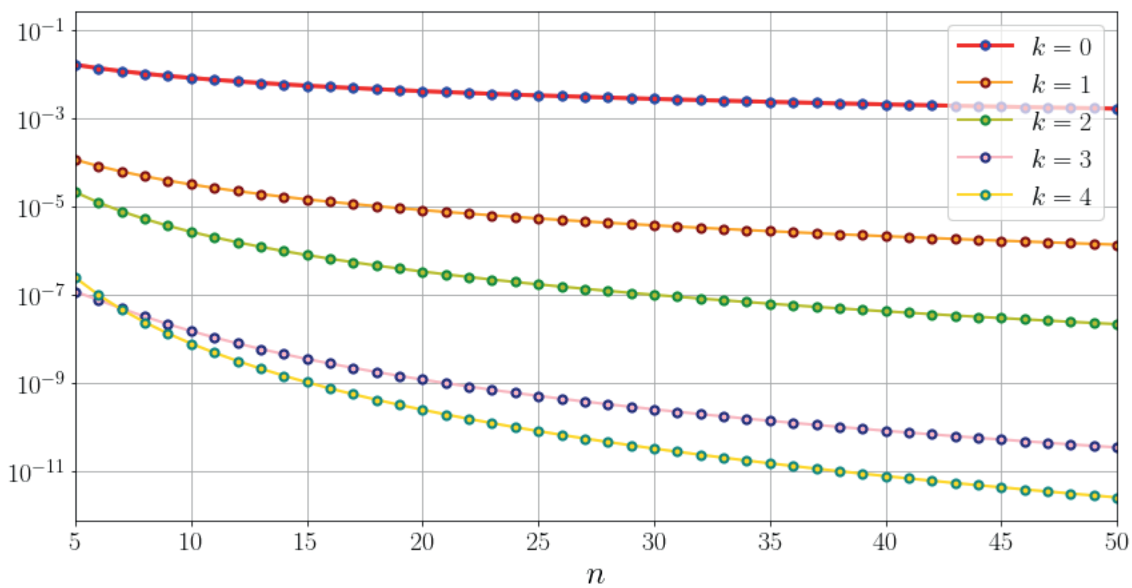


Рис. 2. Относительная погрешность приближения факториала асимптотической формулой

Чем больше членов асимптотического ряда (8) взять, тем точнее получится аппроксимация значения $n!$. На рис. 2 изображены графики последовательностей относительных погрешностей

$$\frac{1}{n!}\left(n! - \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{n^j}\right)$$

при $0 \leqslant k \leqslant 4$.

В статье [8] показано, что для коэффициентов асимптотического ряда (8) вполняются соотношения

$$a_n = (2n+1)!!\cdot b_{2n+1}, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad b_0 = b_1 = 3b_2 = 1, \quad b_n = \frac{1}{n+1}\Big(b_{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1} k b_k b_{n+1-k}\Big), \quad n \geqslant 3.$$

Кроме того, как указано в книге [9], коэффициенты ряда Стирлинга могут быть вычислены по формуле

$$a_k = \sum_{j=1}^{2k}(-1)^j\frac{d_3(2k+2j,j)}{2^{j+k}(j+k)!}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

где $d_3(n, m)$ — количество перестановок из n элементов с m циклами, каждый из которых имеет длину не менее 3. Формула (9) лишний раз подчёркивает глубокую взаимосвязь дискретной и непрерывной математики: полученные довольно мощными методами математического анализа коэффициенты асимптотического ряда Стирлинга, приближающего число перестановок длины n, выражаются через значения величин, опять-таки имеющих комбинаторный смысл количества беспорядков специального вида.

Литература

[1] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: МЦНМО, 2017. - 412 с. Том 2: Ряды и несобственные интегралы. - М.: МЦНМО, 2018. - 480 с.

[2] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. - 3-е изд. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. - 863 с.

[3] Robbins H.E. A Remark on Stirling's Formula // Amer. Math. Monthly. - 62 (1). - 1955. - p. 26-29.

[4] Stillwell J. Elements of Mathematics: from Euclid to Gödel. - Princeton University Press, 2016. - 440 p.

[5] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. 3-е изд. - М.: Мир, 2009. - 703 с.

[6] Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. 11-е изд. - М.: МЦНМО, 2021. - 676 с.

[7] De Angelis V. Stirling's Series Revisited // Amer. Math. Monthly. - 116 (9). - 2009. - p. 839-843.

[8] Marsaglia G., Marsaglia J.C.W. A New Derivation of Stirling's Approximation to $n!$ // Amer. Math. Monthly. - 97 (9). - 1990. - p. 826-829.

[9] Comtet L. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. - D. Reidel Publishing Company, 1974. - 267 p.

Бегунц Александр Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
г. Москва.

E-mail: alexander.begunts@math.msu.ru

Лыткин Сергей Михайлович,
кандидат физико-математических наук,
г. Москва.

E-mail: lytkin-s@yandex.ru

Две математические заметки

С. В. Дворянинов

Первая заметка напоминает о разных способах представления концентрации и предостерегает от возможных ошибок в ее понимании.

Во второй представлено несколько сюжетов, в каждом из которых присутствует диагональ квадрата.

1. “О бедном проценте замолвим вновь слово...” (о концентрации в математических задачах и в жизни)

В центре нашей статьи — понятие, вынесенное в заголовок, а именно, концентрация. Напомним, что такое концентрация, или доля. Пусть есть водный раствор некоторого вещества. Можно, например, растворить чайную ложку соды в стакане с водой или 100 г поваренной соли в большой кастрюле. Величина, которая характеризует содержание вещества относительно раствора, и называется *концентрацией*.

В смеси веществ может быть более двух компонентов. Возможны разные способы математического описания концентрации компонента относительно всей смеси.

1.1. Что такое хорошо

Массовая доля компонента, или массовая концентрация — самая популярная в школьной математике и самая удобная для составителей задач. В качестве примера рассмотрим задачу из сборника [1].

Вариант 14, задача 21. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 42 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 40% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 37% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится во втором растворе?

Решение. Пусть концентрация первого раствора равна $p\%$. Это значит, что масса кислоты, содержащейся в первом растворе, составляет p сотых частей от массы раствора, то есть от 30 кг.

Пусть концентрация второго первого раствора равна $v\%$. Это значит, что масса кислоты, содержащейся во втором растворе, составляет v сотых частей от массы раствора, то есть от 42 кг.

Согласно закону сохранения массы масса смеси двух растворов равна 72 кг, и по условию масса кислоты в новом растворе составляет $\frac{72}{100}$ от 72 кг.

Сохраняется при смешивании растворов и масса кислоты, поэтому

$$\frac{30}{100} \times p + \frac{42}{100} \times v = \frac{72}{100} \times 40.$$

Последовательно упрощаем это уравнение, сначала умножая обе его части на 100, а потом деля на 6:

$$30p + 42v = 72 \times 40 \quad \mapsto \quad 5p + 7v = 12 \times 40. \tag{1}$$

Возьмем m кг первого раствора, m кг второго раствора и смешаем их. Согласно третьему предложению из условия задачи получаем уравнение

$$\frac{m}{100} \times p + \frac{m}{100} \times v = \frac{2m}{100} \times 37.$$

или

$$p + v = 74. \tag{2}$$

Из уравнения (2) выражение для p, равное $74 - v$, подставим в (1) и получим, что $5(74 - v) + 7v = 12 \times 40$, $370 + 2v = 480$, $2v = 110$, $v = 55$.

Ответ. Концентрация кислоты во втором растворе равна 55%.

Вот еще одна задача из сборника [1].

Вариант 30, задача № 21. В сосуд, содержащий 9 литров 16-процентного водного раствора вещества, добавили 3 литра воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Мы намеренно решение первой задачи изложили максимально подробно, стараясь не пропустить важные детали. Сейчас же, напротив: решение второй задачи получим в одну строчку. Вот что может написать ученик на уроке математики:

$$\frac{9 \times 0,16}{9 + 3} = \frac{9 \times 0,16}{12} = 3 \times 0,04 = 0,12.$$

А если дело будет на экзамене, то затем ученик на бланке ответов напишет слово ответ, а после него — 12%. Увидит эти цифры проверяющий учитель, поставит полный бал за задачу, и улыбнется: хорошо усвоили выпускники основной школы проценты. Только ничего хорошего и в помине нет. Последние вычисления не имеют никакого смысла. Неожиданно? Так, читатель? Раньше в подобных случаях говорили: вот тебе, бабушка, и Юрьев день!

1.2. Что такое плохо

Несколькими строчками выше было написано, что $9 + 3 = 12$. Конечное, это математическое равенство верное. Но в данном контексте оно означает, что $9л + 3л = 12л$. А это равенство верно не всегда. Если из цистерны с керосином наливают в бидон 9л керосина, а потом туда же добавляют еще 3 литра, то в баке окажется 12 литров этого керосина. Однако для смесей растворов никакого закона сохранения объема нет.

Рассмотрим несколько примеров, в которых концентрация связывается с объемом.

Пусть есть некоторое количество воды, $600 - 700$ грамм. Растворим в этой воде 50 г поваренной соли. В полученный раствор добавим воду, доведя его объем до одного литра. Вот теперь про получившийся раствор можно сказать, что он содержит 50 г соли на один литр, то есть его концентрация равна 50 г/л. Выразить эту концентрацию в процентах невозможно. Масса полученного раствора не равна 1 кг. Мы вообще не можем сказать, какова его масса. Эту информацию — 50 г/л — можно использовать, например, следующим образом. Если в кастрюлю с бульоном влить 100 мл этого рассола, то в бульон попадет 5 г соли.

Пусть на 1 квадратный метр цветочной оранжереи площадью 100 м^2 нужно внести 1 г некоего замечательного удобрения. Как это сделать? Чайной ложечкой зацепить 1 грамм и распылить его над каждым квадратом? Распределить равномерно не получится. Поступают так. 100 грамм вещества растворяют в 90 литрах воды, потом объем раствора доводят до ста литров. Теперь на каждый квадратный метр оранжереи приходится 1 литр раствора, его можно распределить достаточно равномерно.

Тот же принцип используют при изготовлении лекарств: указывают, сколько миллиграмм активного лекарственного вещества содержит одна таблетка. Массивная таблетка является носителем весьма малого количества лекарства.

В случае объемной концентрации можно говорить лишь об абсолютном количестве компоненты в смеси.

Пример. Имеется 9 литров водного раствора соли, концентрация которого — 60 г/л. К этому раствору добавили 3 литра водного раствора соли с концентрацией 40 г/л. Сколько граммов соли содержит новый раствор?

Решение. $60 \times 9 + 40 \times 3 = 540 + 120 = 660$. Ответ. 660 г.

Заметим, что в сборнике [1] в варианте 29 помещена другая дефектная задача с ответом 15%:

“В сосуд, содержащий 5 литров 27-процентного водного раствора вещества, добавили 4 литра воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?”

Разумеется, дефект не в ответе, а в бессмысленности набора слов “5 литров 27-процентного водного раствора вещества”. От чего берется 27%? От 5 литров? А объем раствора зависит еще и от температуры (в школе учат, что у воды наибольшая плотность при 4°C), а плотность зависит от массовой доли растворенного вещества... Нет-нет, на некорректный вопрос и ответа нет.

Да, не забудем о самом главном. Не забудем про нашего ученика! Что ему делать, если на реальном ОГЭ ему попадется такая задача и если он знает азы химии? Действовать по поговорке: с волками жить, по-волчьи выть? Помнить, что плетью обуха не перешибешь? Но это уже вопрос этический, а не математический.

P.S. Трудно сказать, когда появилась эта некорректная задача на проценты. Она присутствует уже в сборнике ЕГЭ [3] 2018 года:

Вар.7, № 11, [3]. В сосуд, содержащий 7 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

И задача, и приведенный ответ (7%) никакого реального смысла не имеют.

Литература

1. Боровских А.В., Розов Н.Х. О бедном процента замолвите слово... // Математика в школе. - № 3. - 2010. - С. 3-15.

2. ОГЭ. Математика. Типовые экзаменационные варианты. 36 вариантов. Под ред. И.В. Ященко. - М., изд. Национальное образование, 2022.

3. ЕГЭ-2018. Математика. 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. Профильный уровень. Под редакцией И.В. Ященкою - М., АСТ, 2018.

2. Вокруг диагонали квадрата

2.1. Казалось бы, чего есть примечательного в диагонали квадрата? Да ничего! Но это на первый взгляд. В свое время — две тысячи лет назад — пристальное ее рассмотрение привело в математике к настоящему перевороту. К удивлению древних оказалось, что нет ни одного отрезка, который уложился бы и на стороне квадрата, и на его диагонали целое число раз. Сторона квадрата и его диагональ явились первыми *несоизмеримыми* отрезками. Если длину стороны квадрата принять за единицу, то длина диагонали не может быть выражена рациональным числом. А только с такими числами имели дело математики древности. Но длина-то у диагонали есть! В итоге были открыты иррациональные числа.

Обобщением обычной диагонали квадрата является непрерывная кривая, соединяющая его противоположные вершины.

Вспомним несколько задач, решить которые помогает именно диагональ.

Задача 1. В 6 часов утра турист начал восхождение и к вечеру достиг вершины горы. На следующий день также в 6 утра по тому же пути он начал спуск вниз и вернулся на базу. Докажите, что на его маршруте есть точка, в которой он был и в первый, и во второй день в один и тот же час.

Примем длину пути за единицу: $0 \le s \le 1$, время от 6 утра до конца суток — тоже за единицу: $0 \le s \le 1$. Тогда график движения вверх — это непрерывная кривая, соединяющая левую нижнюю вершину квадрата $(0; 0)$ и правую верхнюю вершину $(1; 1)$ (рис.1).

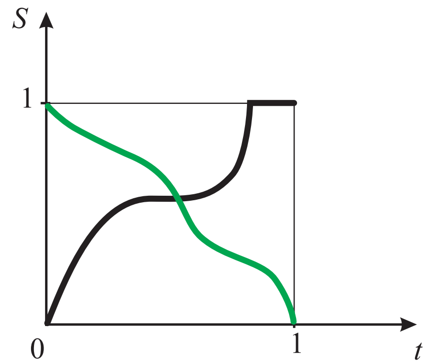


Рис. 1.

График движения вниз — кривая, соединяющая две другие вершины, — $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Совершенно очевидно, что две такие кривые обязательно пересекаются хотя бы один раз. Это и доказывает утверждение задачи.

2.2. Ясное дело, что не всякая кривая, лежащая внутри квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ и соединяющая его противоположные вершины, является графиком функции $y = f(x)$. Среди таких кривых есть такие, которые кажутся невозможными. Вот одна их них.

Возьмем обычную диагональ в единичном квадрате. Фиксируем ее концы и ее середину. Оказывается, каждую половину диагонали можно "закрутить" вокруг центра квадрата так, что она сделает бесконечно много оборотов вокруг центра и длина этой половины увеличится с $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до 1 (рис. 2).

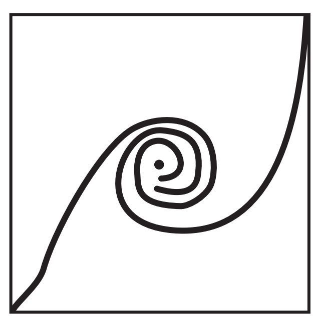


Рис. 2.

Каждая половина диагонали превратится в кривую, название которой — логарифмическая спираль. О ней можно прочитать в "Кванте", № 11, 2017, в статье "Сколько времени длится причаливание?" на с. 7.

2.3. Следующая задача примечательна тем, что она была включена академиком В.И. Арнольдом в его университетский учебник "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Глава 1 учебника называется "Основные понятия", и первое из них — понятие фазового пространства. В учебнике читаем: "... рассмотрим пример, где уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу".

Задача 2. (Н.Н. Константинов). Из города A в город B (рис. 3) ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из A в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса l, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

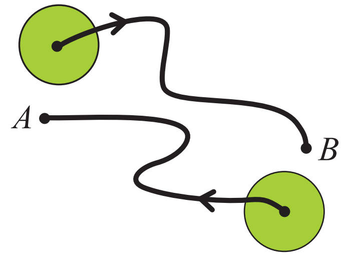


Рис. 3. Начальное положение возов.

Решение. Рассмотрим квадрат (рис. 4) $M = \{x_1, x_2 : 0 \le x_i \le 1\}$.

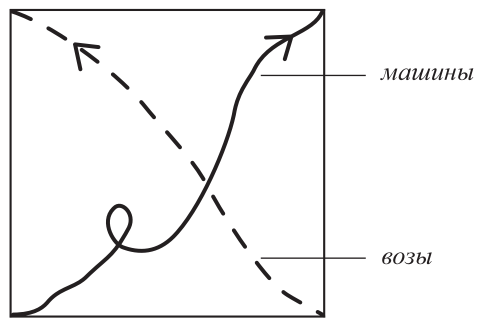


Рис. 4. Фазовое пространство пары экипажей.

Положение двух экипажей (один на первой дороге, другой — на второй) можно характеризовать точкой квадрата M: достаточно обозначить через x_i долю расстояния от A до B по i-й дороге, заключенную между A и находящимся на этой дороге экипажем. Всевозможным положениям экипажей соответствуют всевозможные точки квадрата M. Этот квадрат называется *фазовым пространством*, а его точки — *фазовыми точками.* Таким образом, каждая фазовая точка соответствует определенному положению пары экипажей, а всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве. Например, начальное положение машин (в городе A) соответствует левому нижнему углу квадрата ($x_1 = x_2 = 0$), а движение машин из A в B изображается кривой, ведущей в противоположный угол. Точно так же начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$), а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата. Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займет положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Итак, разминуться не удается”.

Примечание. Другие примеры фазовых пространств вы найдете в статье “Что такое фазовый портрет” (“Квант”, 2019, № 11, с. 30-33).

Вернемся к графикам функций, целиком лежащим в единичном квадрате.

2.4. Рассмотрим на отрезке $0 \le x \le 1$ степенные функции $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Каждый график напоминает тетиву лука, концы которой закреплены в точках $(0;0)$ и $(1;1)$ (рис.5). С ростом n эта тетива все более и более удаляется от диагонали квадрата $y = x$ и сколь угодно близко приближается к двухзвенной ломаной, составленной из двух единичных отрезков — нижней и правой стороны единичного квадрата. Эта ломаная линия не является графиком никакой функции. Пределом последовательности непрерывных функций оказывается разрывная функция. При этом “предел последовательности графиков" функций "не является графиком функции". Можно сказать, что с ростом n тетива лука рвется.

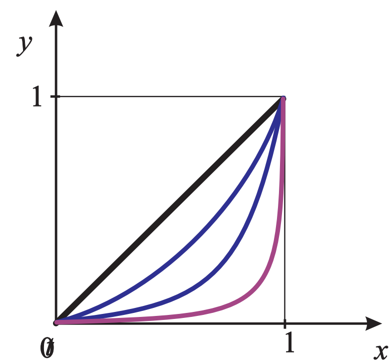


Рис. 5.

2.5. Следующий фрагмент нашей статьи роднит с задачей Константинова понятие доли. Доля — это часть некоторого числа или некоторой величины. Доля выражается числом из отрезка $[0; 1]$.

Если числовая функция определена на отрезке $[0; 1]$ и множеством ее значений является отрезок $[0; 1]$, то ее аргумент можно трактовать как долю некоторой величины, а значение — как долю другой величины.

Представьте, что вы с лейкой в руках прошли вдоль грядки, длина которой 1, и равномерно полили ее водой, объем которой тоже примем за 1. График распределение воды вдоль грядки показан на рис. 6. Значение $V(x)$ — это объем воды, вылитой на отрезке $[0; x]$.

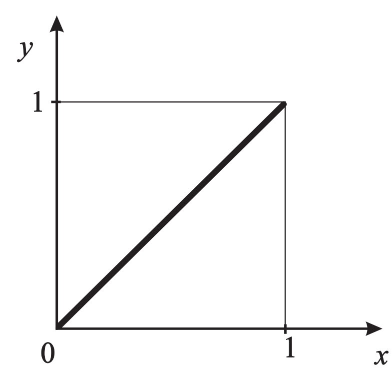


Рис. 6.

Легко вообразить конструкцию такой лейки. Лейка — это четверть прямого кругового цилиндра радиуса 1 и высотой $\frac{4}{\pi}$ (рис. 7). Объем такой лейки 1. Движемся вдоль грядки и наклоняем лейку, равномерно поворачивая ее вдоль горизонтальной оси цилиндра. (см. также "Квант", 2019, № 10, с. 29-30).

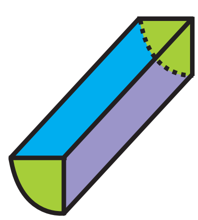


Рис. 7.

Можно взять другую лейку, имеющую форму прямой призмы, основание которой прямоугольный треугольник с катетами 1 и высотой 2 (рис. 8). В этом случае воду будем лить через горизонтальное ребро призмы длины 2. Объем воды, вылитой на участок $[0;x]$, равен $V(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ (рис. 9). Чем дальше мы идем вдоль грядки, тем больше скорость вытекания воды, тем круче расположена касательная к графику функции $V = V(x)$. Этот график похож на график зависимости пути от времени при неубывающем ускорении.

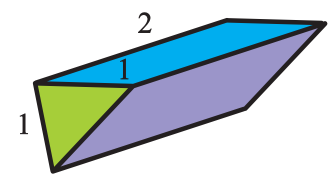


Рис. 8.

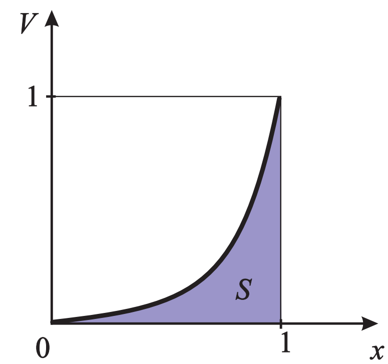


Рис. 9.

Степень неравномерности распределения воды вдоль грядки может быть, конечно, разной. Чем далее отстоит график функции $V = V(x)$ от диагонали квадрата, тем больше эта неравномерность. График на рис. 10 показывает, что почти вся вода попала на конец нашей грядки.

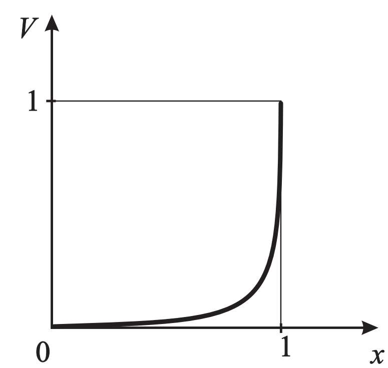


Рис. 10.

Пусть S — это площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $V = V(x)$ (рис. 9). Тогда число $G = 1 - 2S$ является мерой неравномерности, его называют *коэффициентом Джини*. Легко видеть, что $0 \le S \le \frac{1}{2}$ и, следовательно, $0 \le G \le 1$. Если $S = \frac{1}{2}$, то $G = 0$ и распределение равномерное.

Теперь вообразим другую ситуацию. Пусть вдоль отрезка $0 \le x \le 1$ стоят люди, на которых сверху пролился дождь, причем дождь золотой. В результате каждый человек стал обладателем какого-то богатства, маленького или большого. Богатство (или деньги) распределено неравномерно. Если на отрезке $0 \le x \le 1$ взять два равных отрезочка, то правому отрезочку соответствует больше богатства, чем левому.

Пример. Пусть некое общество состоит из десяти человек, общее богатство которых составляет 100 денежных единиц. Состав общества занумерован в порядке *возрастания* богатства, принадлежащего каждому человеку (таблица 1):

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
3	5	5	5	10	10	12	15	15	20

Первый человек составляет 10% общества и владеет 3% общего богатства; 20% общества (то есть два человека) владеют 8% общего богатства, 30% — 13%, и так далее.

Перейдем от процентов к долям и составим новую таблицу (см. таблица 2).

Доля населения	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Доля богатства	0,03	0,08	0,13	0,18	0,28	0,38	0,50	0,65	0,80	1

Таблица 2 показывает, что десятая доля самых бедных владеет тремя сотыми всеобщего богатства, две десятых всего населения владеют восемью сотыми общего богатства, и так далее. В частности, из таблицы видно, что на первую половину всего населения приходится 28 сотых всего богатства. Заметим, что каждый человек из первой половины беднее каждого человека из второй половины.

Пусть p (от *population*) — это доля населения и пусть r (от resource) — доля принадлежащего ей общего богатства. Упорядоченной паре чисел $(p;\ r)$ поставим в соответствие точку с координатами $(p;\ r)$, добавив “начальную” точку $(0;\ 0)$. Соединив каждые две соседние точки отрезком прямой, мы получим ломаную линию, которая является графиком некоторой кусочно-линейной функции $r = f(p)$. При большом числе данных табличные точки соединяют не ломаной, а гладкой кривой (в каждой точке кривой существует касательная) и тогда функция $r = f(p)$ имеет производную в каждой точке отрезка $[0;\ 1]$. Функция $r = f(p)$ монотонно возрастает на отрезке $[0;\ 1]$, причем $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Эта функция называется *функцией Лоренца*, а ее график — *кривой Лоренца*. Известно, что любая гладкая кривая Лоренца выпукла вниз. При условиях примера 1 кривая Лоренца является ломаной и изображена на рис. 11.

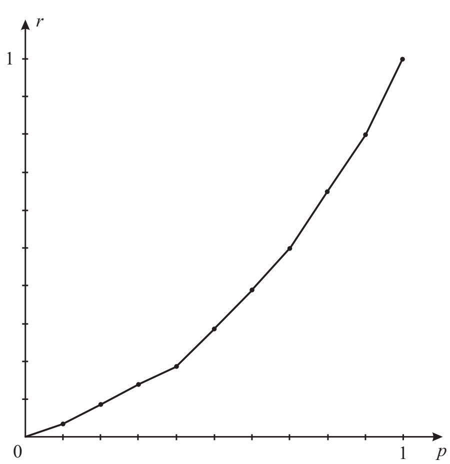


Рис. 11.

Значениями аргумента функции Лоренца являются доли населения, а значениями самой функции $f(p)$ являются доли доходов. При этом множество значений функции Лоренца совпадает с ее областью определения, т.е. с отрезком [0;1].

2.6. Вспомним криволинейную трапецию Хорошо известно, что с графиком любой непрерывной и неотрицательной на некотором отрезке функции можно связать фигуру (часть плоскости), которая называется криволинейной трапецией. Для функции Лоренца трапеция превращается в “криволинейный треугольник”. На координатной плоскости $(p; r)$ он ограничен снизу отрезком оси абсцисс $0 \leq p \leq 1$, справа отрезком прямой с концами в точках $(0; 0)$ и $(1; 1)$, сверху — графиком функции $r = f(p)$. Площадь S этого криволинейного треугольника вычисляется по формуле

$$S = \int_0^1 f(p)dp \tag{1}$$

и

$$G = 1 - 2S = 1 - 2\int_0^1 f(p)dp \tag{2}$$

Если “нижняя” часть кривой Лоренца приближается к оси абсцисс, а “правая” часть — к отрезку прямой $p = 1$), то коэффициент Джини приближается к 1. В предельном случае кривая Лоренца совпадет с двумя сторонами единичного квадрата и в формуле (2) будет $S = 0$, $G = 1$.

Коэффициент G предложил в 1912 году итальянский экономист, статистик и демограф Коррадо Джини (*Corrado Gini*, 1884—1965) как количественный показатель для выражения степени неравенства распределения доходов среди населения. Этот количественный показатель — *коэффициент Джини* — характеризует *уровень отклонения* от абсолютной нормы, то есть от равномерного распределения доходов или богатства. Наименьшее значение коэффициента Джини равно нулю, а наибольшее — единице.

На январском 2019 года X Гайдаровском форуме министр экономического развития России Максим Орешкин назвал уровень экономического неравенства в нашей стране запредельным. Министр подчеркнул, что высокий уровень неравенства опасен тем, что некоторые слои населения лишаются доступа к качественным услугам образования и здравоохранения (см. [1]).

Литература

1. Максим Орешкин назвал уровень неравенства в России запредельным, однако отметил некоторые позитивные тенденции. Как эта проблема выглядит на самом деле и какие могут быть последствия? // “Вести. Экономика”, 15.01.2019. URL: https://www.vestifinance.ru/articles/113095

Дворянинов Сергей Владимирович,
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Анонс монографии

Преобразование Фурье распределений на конечных группах и полугруппах

И. А. Круглов

От редакции

Представляем монографию Игоря Александровича Круглова (1961–2020), которая готовится к выходу отдельным изданием. Данная публикация содержит введение и часть первого параграфа первой главы.

Краткая биографическая справка об авторе[1]:

Игорь Александрович Круглов родился 31 марта 1961 года в Москве в семье военнослужащего. Выпускник московской школы № 57 1978 г. В 1983 году с золотой медалью окончил технический факультет Высшей школы КГБ СССР им. Ф.Э. Дзержинского, после чего связал свою жизнь с научной и преподавательской деятельностью. Прошел путь от адъюнкта до профессора кафедры.

Одним из важных научных результатов И.А. Круглова является математическое обоснование свойств схемы электронной подписи, внедренной ЦБ РФ в 1993 году. Результаты данного исследования впоследствии легли в основу разработки российского стандарта электронной подписи ГОСТ Р 34.10-94 и обоснования его криптографических характеристик.

Хорошо известны результаты И.А. Круглова в области вероятностных распределений на группах и полугруппах. Это направление, находящееся на стыке алгебры и теории вероятностей, является актуальным для ряда задач в области защиты информации. И.А. Круглов продолжил исследования М.М. Глухова, Ю.А. Горчинского, Б.М. Клосса, В.Я. Козлова, В.Н. Сачкова. В частности, им доказан принцип сходимости Б.М. Клосса для произведений случайных элементов со значениями в конечных простых полугруппах в случае, когда распределения сомножителей определяются цепью Маркова.

И.А. Круглов внес значительный вклад в решение задач комбинаторного анализа, имеющих приложения в криптографии. В соавторстве с В.Н. Сачковым им были получены важные результаты о свойствах распределения весового дефицита случайных инволюций и алгоритмах построения семейств разновесных инволюций. Они позволяют строить подстановки для S-боксов блочных шифров, устойчивые к дифференциальному методу криптографического анализа.

Список научных трудов И.А. Круглова насчитывает свыше 100 работ, опубликованных в "Трудах по дискретной математике", журналах "Математические вопросы криптографии", "Дискретная математика", "Фундаментальная и прикладная математика" и в других изданиях. Глубокие научные результаты И.А. Круглов получил в рамках научно-исследовательских работ Академии криптографии Российской Федерации.

Игорь Александрович был замечательным педагогом, читал лекции по алгебре, комбинаторному анализу, математической логике, дискретной математике и их приложениям в Институте криптографии, связи и информатики, разработал несколько оригинальных спецкурсов. Является автором ряда учебных пособий и монографий. Он более 20 лет исполнял обязанности ученого секретаря двух диссертационных советов.

[1] По материалам публикации Балакин Г.В. и др. "Памяти Игоря Александровича Круглова" // Математические вопросы криптографии. - 2020. - том 11. - выпуск 4. - С. 5–6.

Введение

Теория вероятностных распределений на алгебраических структурах развивается в течение семидесяти лет. Ее выделение в самостоятельный раздел теории вероятностей было связано с необходимостью разработки и исследования моделей физических процессов, решения задач в теории связи и т.п. в тех ситуациях, когда классическая теория вероятностей на вещественной прямой и в конечномерном евклидовом пространстве не в полной мере отвечала растущим потребностям в адекватных математических моделях.

На начальном этапе развитие шло по экстенсивному пути за счет расширения классов рассматриваемых алгебраических структур с топологией. Итоги этого этапа были подведены в начале 1960-х годов в монографии У. Гренандера [6]. Тем не менее, теория вероятностных распределений на топологических группах всегда занимала основное место в исследованиях по данной проблематике. Отражением этого факта является выход в свет монографии Х. Хейера [14]. С точки зрения общей теории вероятностных распределений на алгебраических структурах случай конечных групп с дискретной топологией является частным случаем компактных сепарабельных топологических групп. Возможность применения в этом случае (на основе теории комплексных представлений групп) преобразования Фурье отмечалась еще в [6]. Однако, как указано Ю.Н. Горчинским во введении к работе [5], спецификой решаемых в теории вероятностных распределений на конечных группах задач является то, что распределения "требуется изучать в терминах исходных данных". К сожалению, результаты общей теории не всегда отвечают указанному требованию. На некоторую недооценку важности результатов, полученных в случае компактных (в том числе конечных) топологических групп, указано в монографии [14].

В отечественной математике теория вероятностных распределений на конечных группах получила дополнительный импульс к развитию по инициативе профессора В.Я. Козлова в 1950-х годах в связи с возможностью приложений к решению задач защиты информации. Начальный этап исследований в 50-х и 60-х годах прошлого столетия был связан главным образом с произведениями независимых случайных элементов. Значительный вклад в эту тематику внесли такие отечественные специалисты, как Н.Н. Воробьёв [3], Б.М. Клосс [7], В.М. Максимов [12], [13], а также В.Н. Сачков, М.М. Глухов, Ю.Н. Горчинский в работах, опубликованных в ведомственных изданиях (см. также [4], [5]). Основную роль в исследованиях играли методы, основанные на применении теории конечных неоднородных цепей Маркова, а также на использовании результатов структурной теории топологических полугрупп.

Дальнейшее развитие теории распределений на конечных группах связано с учетом зависимости сомножителей в произведениях, что, в свою очередь, обусловлено необходимостью разработки более адекватных математических моделей работы алгоритмов защиты информации. Основное место здесь занимают результаты исследований произведений случайных элементов, связанных марковской зависимостью.

Отметим, что применение упомянутых выше методов (цепи Маркова, структурная теория полугрупп) в случае зависимых сомножителей оказалось затруднено ввиду заметного роста размерности используемых математических понятий. Кроме того, при расчете распределений для произведений зависимых элементов, помимо операции свертки, значительную роль начинает играть взвешенная сумма распределений. Это приводит к необходимости выйти за рамки полугруппы распределений относительно операции свертки и исследовать распределения, как элементы групповой алгебры конечной группы над полем комплексных чисел. Один из путей решения возникающих здесь задач — разложение групповой алгебры в прямую сумму (левых) идеалов, этот процесс естественным образом приводит к преобразованию Фурье.

Исследование предельного поведения распределений произведений случайных элементов со значениями в некоторой конечной группе, образующих простую однородную цепь Маркова, было начато в работах зарубежных авторов начала 60-х годов прошлого века (см. [15], [16], [18]). В данных работах исходная задача была сведена к изучению эргодических свойств вспомогательной цепи Маркова с существенно большим множеством состояний. В указанных работах в терминах свойств вспомогательной цепи Маркова сформулирован ряд условий сходимости исследуемых последовательностей распределений, а также условия их предельной равномерности на исходной конечной группе. Недостатком данного подхода является то обстоятельство, что результаты в общем случае формулируются в терминах довольно громоздких конструкций, далёких от постановки задачи.

Здесь уместно отметить, что данный подход позднее развивался В.Г. Смирновым при исследовании произведений случайных элементов со значениями в простых полугруппах преобразований конечного множества в случае, когда распределения сомножителей в произведении определяются переходами конечной простой однородной положительно регулярной цепи Маркова. Поученные результаты выражались в терминах свойств некоторой вспомогательной конечной полугруппы с большим числом элементов.

Существенное продвижение в исследованиях было достигнуто отечественными специалистами во второй половине 60-х годов на основе систематически изложенного Н.Н. Воробьёвым в статье [3] метода преобразования Фурье (характеристических функций) вероятностных распределений на конечных абелевых группах. В работах И.Н. Санова, Ю.И. Максимова, И.И. Гезенко, опубликованных в ведомственных изданиях, были получены законченные результаты в решении задачи определения необходимых и достаточных условий предельной равномерности на группе для распределений произведений случайных элементов со значениями в конечной абелевой группе, связанных в функционал от состояний положительно регулярной цепи Маркова.

Одновременно и независимо в работе [19] аналогичные результаты были получены на основе применения методов теории случайных блужданий в общем случае локально компактных абелевых топологических групп.

Применявшиеся в цитированных работах методы исследования были явно недостаточны для использования в случае некоммутативных групп. Принципиальный шаг в развитии математического аппарата был сделан Ю.Н. Горчинским на основе разработанного им метода матричных характеристических функций матриц переходных вероятностей случайных элемнтов со значениями в конечных группах подстановок, [5]. Указанный метод идейно тесно связан с преобразованием Фурье. Обобщение метода матричных характеристических функций Ю.Н. Горчинского на случай простых полугрупп преобразований конечных множеств было проведено Ф.К. Алиевым, и на этой основе им получен ряд обобщений результатов статьи [5] (см. [1], а также выполненную совместно с автором работу [2]). В дальнейшем разработка предложенного Ю.Н. Горчинским математического аппарата была продолжена автором [2], [8], [9], [10]. Полученные результаты легли в основу этой книги.

При написании книги автор ставил перед собой цель изложить классические результаты, связанные с методом преобразования Фурье и его применением к исследованию произведений случайных элементов со значениями в конечных группах и конечных простых полугруппах.

В начале первой главы для удобства кратко сфомулированы основные понятия и факты теории комплексных представлений конечных групп. Оговоримся, что данный раздел рассчитан на подготовленного читателя. Для первоначального ознакомления с теорией представлений групп можно воспользоваться учебным пособием [4]. Используемый нами материал ограничивается сведениями из этого пособия за небольшим числом оговоренных исключений. Более основательная подготовка связана с чтением таких фундаментальных работ, как, например, монография [11].

Во втором параграфе первой главы вводится понятие преобразования Фурье вероятностных распределений на конечных группах и излагаются его основные свойства.

В последующих двух главах изложены результаты применения математического аппарата преобразования Фурье к исследованию произведений независимых (глава 2) и зависимых случайных элементов со значениями в конечных группах в случае марковского характера зависимости (глава 3). Основные решаемые задачи — это определение условий сходимости распределений, описание возможных предельных распределений, нахождение оценок скорости сходимости и условий достижимости предельных распределений на конечном шаге. Установлена связь между предельным поведением распределений исследуемых зависимых случайных элементов и некоторых производных последовательностей произведений независимых случайных элементов со значениями в конечных группах.

В заключительном параграфе третьей главы показано, каким образом математический аппарат преобразования Фурье распределений на конечных группах может применяться при решении аналогичных задач исследования произведений случайных элементов со значениями в конечных простых полугруппах.

Отметим, что за рамками книги остались результаты применения метода преобразования Фурье к определению условий и оценке скорости сходимости распределений в различных частных случаях, в том числе, в схеме линейной авторегрессии на конечной группе. С этими результатами можно познакомиться в книге [17], а также в журнальной литературе.

Глава 1. Преобразование Фурье

§ 1. Необходимые сведения из теории комплексных представлений конечных групп

1.1. Основные определения

Всюду далее $G = (G, \cdot)$ — конечная группа, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, R — некоторое *ненулевое* векторное пространство конечной размерности $\dim R \geq 1$ над полем $\mathbb{C}$. Буквой θ мы будем обозначать нулевой вектор. В качестве пространства R мы довольно часто будем рассматривать арифметическое пространство $\mathbb{C}^{(n)}$ векторов-столбцов некоторой конечной длины n над полем $\mathbb{C}$, либо некоторое подпространство арифметического пространства.

Для отображений множеств $\psi : M_1 \to M_2$, $\varphi : M_2 \to M_3$ будем обозначать через $\varphi \circ \psi$ композицию ψ и φ:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)), \ \ x \in M_1.$$

Через $GL(R)$ обозначим полную линейную группу над векторным пространством R, то есть группу всех линейных невырожденных преобразований R относительно *операции композиции* преобразований. Для натурального числа n будем обозначать через $GL(n, \mathbb{C})$ группу всех невырожденных комплексных квадратных матриц порядка n относительно операции умножения.

Если $\vec{e} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ — некоторый фиксированный базис векторного пространства R, то каждому преобразованию $\varphi \in GL(R)$ однозначно соответствует матрица $U_{\varphi,\vec{e}} \in GL(n, \mathbb{C})$ преобразования φ в базисе $\vec{e}$.

Комплексным линейным представлением (далее линейным представлением) группы G называется произвольный гомоморфизм

$$\varphi : G \to GL(R).$$

Размерность $\dim R$ называется *степенью представления* φ и обозначается n_φ.

Комплексным матричным представлением (далее матричным представлением) группы G называется произвольный гомоморфизм

$$U : G \to GL(n, \mathbb{C}),$$

число n называется *степенью представления* U и обозначается n_U.

Между линейными и матричными представлениями группы G имеется естественное взаимнооднозначное соответствие. Пусть φ — линейное представление; $\varphi : G \to GL(R)$, $n_\varphi = n$, $\vec{e}$ — фиксированный базис R. Для каждого элемента $g \in G$ пусть $U_\varphi(\sigma)$ — матрица отображения $\varphi(g)$ в базисе $\vec{e}$, тогда отображение $U\varphi : G \to GL(n, \mathbb{C})$ является матричным представлением группы G.

Обратно, пусть $U : G \to GL(n, \mathbb{C})$ — матричное представление группы G, для каждого $g \in G$ рассмотрим матрицу $U(g)$ как матрицу линейного преобразования $\varphi(g)$ пространства $R = \mathbb{C}^{(n)}$:

$$\varphi(\sigma)(v) = U(g)v, \ \ g \in G, \ \ v \in \mathbb{C}^{(n)}.$$

Тогда отображение $\varphi : G \to GL(\mathbb{C}^{(n)})$ есть линейное представление группы G. Если в предыдущем рассуждении в качестве базиса $\vec{e}$ пространства $\mathbb{C}^{(n)}$ взять стандартный базис, состоящий из n различных векторов-столбцов единичной матрицы, то, как нетрудно видеть, будет верно равенство $U_\varphi = U$. Таким образом, каждое утверждение о линейных представлениях может быть переформулировано на языке матричных представлений и наоборот.

Приведем некоторые примеры и способы построения новых представлений из уже известных.

Единичное представление.

Пусть $R = \mathbb{C}$ — одномерное пространство, рассмотрим отображение $\varphi_0 : G \to GL(\mathbb{C})$, где для любого $\sigma \in G$ преобразование $\varphi_0(g)$ является тождественым преобазованием поля $\mathbb{C}$. Тогда φ_0 — линейное представление степени 1, которое называется *единичным представлением* группы G. Соответствующее представлению φ_0 единичное матричное представление $U(0)$ определяется равенством:

$$U_{(0)}(g) = 1, \;\; g \in G.$$

Представления, сответствующие левым идеалам группового кольца.

Рассмотрим $|G|$—мерное векторное пространство $\mathbb{C}G$ комплекснозначных функций, определенных на множестве G. Можно считать, что $G \subset \mathbb{C}G$, если отождествить произвольный элемент σ группы G с функцией Кронекера

$$\delta_{\sigma,g} = \begin{cases} 1, \, g = \sigma \\ 0, \, g \neq \sigma. \end{cases}$$

При некотором фиксированном упорядочении элементов группы G элементы пространства $\mathbb{C}G$ можно записать в виде формальных сумм вида

$$\sum_{g \in G} a_g g.$$

В этих обозначениях для суммы векторов в пространстве $\mathbb{C}G$ имеем формулу

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g.$$

Определим операцию умножения элементов $\mathbb{C}G$:

$$\sum_{g \in G} a_g g \cdot \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} (a_h b_{h^{-1} \cdot g}) g.$$

Множество $\mathbb{C}G$ с операциями сложения и умножения является кольцом с единицей, равной единичному элементу e_G группы G. Это кольцо называется *групповым кольцом* группы G над полем комплексных чисел. Кольцо $\mathbb{C}G$ коммутативно тогда и только тогда, когда коммутативна группа G.

Любому ненулевому левому идеалу I кольца $\mathbb{C}G$ соответствует линейное представление φ группы G преобразованиями комплексного векторного пространства I, определяемое соотношением

$$\varphi(g)(v) = g \cdot v, \;\; v \in I, \;\; g \in G.$$

Если $I = \mathbb{C}G$, то соответствующее представление ρ называется *левым регулярным* (линейным) представлением группы G. Это представление определяется соотношением

$$\rho(\sigma) \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} a_g (\sigma \cdot g), \;\; \sigma \in G.$$

Ограничения на подгруппы.

Пусть $\varphi : G \to GL(R)$ — некоторое линейное представление группы G, H — подгруппа группы G. Тогда ограничение отображения φ на подмножество H множества G является линейным представлением группы H; будем обозначать его через $\mathrm{Res}_{H\varphi}$.

Аналогично, каждому матричному представлению $U : G \to GL(n, C)$ соответствует матричное представление $\mathrm{Res}_H U$ — ограничение U на H.

Представления фактор-групп.

Пусть H — нормальная подгруппа группы G, $\varphi : G \to GL(R)$ — линейное представление, предположим, что ядро

$$\ker\varphi = \{g \in G,\ \ \varphi(g) = \varepsilon_R\} \supset H,$$

где ε_R — тождественное преобразование пространства R. Можно определить линейное представление фактор-группы G/H:

$$\bar{\varphi} : G/H \to GL(R),$$

полагая

$$\bar{\varphi}(g \cdot H) = \varphi(\sigma),\ \ g \in G.$$

С другой стороны, если

$$\psi : G/H \to GL(R)$$

— линейное представление фактор-группы, то ему соответствует следующее линейное представление группы G:

$$\varphi : G \to GL(R);\ \ \varphi(g) = \psi(g \cdot H),\ \ g \in G,$$

при этом $\ker\varphi \supset H$. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между линейными представлениями фактор-группы G/H и линейными представлениями φ группы G, для которых $\ker\varphi \supset H$.

Аналогично определяется взаимно-однозначное соответствие между матричными представлениями группы G/H и матричными представлениями U группы G, для которых $\ker U \supset H$.

Сумма представлений.

Пусть даны два линейных представления группы G:

$$\varphi_i : G \to GL(R_i),\ \ i = 1, 2.$$

Рассмотрим внешнюю прямую сумму $R = R_1 \oplus R_2$ пространств R_1 и R_2 и определим линейное представление $\varphi : G \to GL(R)$ соотношением:

$$\varphi(g)(v_1 + v_2) = \varphi_1(g)(v_1) + \varphi_2(g)(v_2),\ \ g \in G,\ \ v_i \in R_i,\ \ i = 1, 2.$$

Линейное представление φ называется *суммой представлений* φ_1 и φ_2 и обозначается $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Аналогично, для любых двух матричных представлений $U_i : G \to GL(n_i, \mathbb{C})$, $i = 1, 2$ определено матричное представление $U : G \to GL(n_1 + n_2, \mathbb{C})$, где для любого элемента $g \in G$:

$$U(g) = \begin{pmatrix} U_1(g) & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times n_1} & U_2(g) \end{pmatrix},$$

где $0_{k \times l}$ — нулевая $k \times l$ -матрица.

Представление U называется *суммой представлений* U_1 и U_2, при этом используется обозначение $U = U_1 + U_2$.

По индукции можно определить сумму произвольного конечного числа линейных (матричных) представлений группы G.

Сопряженное представление.

Пусть $U : G \to GL(n, \mathbb{C})$ — матричное представление. Для матрицы A обозначим через $\overline{A}$ матрицу из элементов, комплексно-сопряженных к элементам матрицы A. Тогда отображение $\overline{U} : G \to GL(n, \mathbb{C})$, где $\overline{U}(g) = \overline{U(g)}$ при любом $g \in G$, является матричным представлением группы G. Представление $\overline{U}$ называется *сопряженным* к представлению U.

1.2. Эквивалентные представления

Пусть даны два линейных комплексных представления группы G:

$$\varphi_i : G \to GL(R_i),\ \ i = 1, 2.$$

Определение. Представление φ_1 называется *эквивалентным* представлению φ_2, если существует изоморфизм $\tau : R_2 \to R_1$ векторных пространств, удовлетворяющий условию:

$$\tau^{-1} \circ \varphi_1(g) \circ \tau = \varphi_2(g),\ \ g \in G.$$

В этом случае будем писать $\varphi_1 \sim \varphi_2$. Для неэквивалентных представлений будем использовать обозначение $\varphi_1 \nsim \varphi_2$.

Эквивалентные линейные представления имеют одинаковую размерность.

Линейные представления, соответствующие левым идеалам групповой алгебры $\mathbb{C}G$, эквивалентны тогда и только тогда, когда эти левые идеалы изоморфны как левые $\mathbb{C}G$-модули.

Аналогично, пусть даны два матричных представления группы G:

$$U_i : G \to GL(n_i; \mathbb{C}),\ \ i = 1; 2.$$

Определение. Представления U_1 называется *эквивалентным* представлению U_2, если $n_1 = n_2 = n$, и существует обратимая комплексная $n \times n$-матрица C, удовлетворяющая соотношению:

$$C^{-1} \cdot U_1(g) \cdot C = U_2(g),\ \ g \in G.$$

Аналогично линейным представлениям, будем использовать обозначения $U_1 \sim U_2$ и $U_1 \nsim U_2$ для, соответственно, эквивалентных и не эквивалентных матричных представлений.

Эквивалентность линейных (матричных) представлений есть отношение эквивалентности, соответственно, на множестве всех линейных (матричных) представлений группы G.

Теорема 1.1.1. *Пусть для* $i = 1, 2 : \varphi_i : G \to GL(R_i)$ *— линейное представление группы* G, $\overrightarrow{e}^{(i)}$ *— произвольно фиксированный базис* R_i, $U\varphi_i$ *— матричное представление, соответствующее* φ_i *и выбору базиса* $\overrightarrow{e}^{(i)}$. *Тогда* $\varphi_1 \sim \varphi_2$ *тогда и только тогда, когда* $U_{\varphi_1} \sim U_{\varphi_2}$.

1.3. Унитарные представления

Пусть F — некоторое скалярное произведение на комплексном векторном пространстве R; пара (R, F) называется *унитарным пространством.* Линейное преобразование $f : R \to R$ называется *унитарным относительно* F, если для любых $v_1, v_2 \in R$ выполнено равенство $F(v_1, v_2) = F(f(v_1), f(v_2))$. Если $\overrightarrow{e}$ — произвольный ортонормированный базис пространства (V, F), то матрица $A_{f,\overrightarrow{e}}$ преобразования f в базисе $\overrightarrow{e}$ невырожденна, и выполнено равенство: $A^{-1} = (\overline{A})^{\top}$, то есть матрица $A_{f,\overrightarrow{e}}$ является унитарной (здесь $^{\top}$ — знак транспонирования матриц).

Определение. Линейное представление $\varphi : G \to GL(R)$ называется *унитарным относительно скалярного произведения* F, если для любого $g \in G : \varphi(g)$ — унитарное преобразование пространства (R, F). Матричное представление U называется *унитарным*, если для для любого $g \in G$ матрица $U(g)$ является унитарной.

Если (R, F) — унитарное пространство с ортонормированным базисом $\overrightarrow{e}$, $\varphi : G \to GL(R)$ — линейное представление, U_φ — матричное представление, соответствующее φ и базису $\overrightarrow{e}$, то представление φ унитарно тогда и только тогда, когда представление U_φ унитарно.

Теорема 1.3.1. *Любое комплексное линейное представление φ: $G \to GL(R)$ является унитарным относительно некоторого скалярного произведения F на пространстве R.*

Следствие. *Любое матричное представление $U : G \to GL(n, \mathbb{C})$ эквивалентно некоторому унитарному матричному представлению.*

Заметим, что единичные представления группы являются унитарными. Кроме того, ограничение унитарного представления на подгруппу унитарно; представление фактор-группы по нормальному делителю, соответствующее унитарному представлению, унитарно; сумма унитарных представлений унитарна; представление, сопряженное к унитарному представлению, унитарно.

Литература

[1] Алиев Ф.К. О предельных распределениях произведений случайных величин на конечной простой полугруппе с распределениями, заданными на переходах положительно-регулярной цепи Маркова // Обозрение прикладной и промышленной математики. - Том 4. - Вып. 3. - 1997. - С. 316-318.

[2] Алиев Ф.К., Круглов И.А. Принцип сходимости Б.М. Клосса для произведений случайных величин со значениями в конечных простых полугруппах в случае, когда распределения сомножителей определяются цепью Маркова // Обозрение прикладной и промышленной математики. - Том 16. - Вып. 2. - 2009. - С. 193-209.

[3] Воробьев Н.Н. Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах // Математический сборник. - Т. 34(76). - № 1. - 1954. - С. 83-126.

[4] Глухов М.М., Круглов И.А. Элементы теории обыкновенных представлений и характеров конечных групп в приложениями в криптографии: Учебное пособие. – СПб.: Издательство “Лань”, 2015. - 176 с.

[5] Горчинский Ю.Н., Круглов И.А., Капитонов В.М. Вопросы теории распределений на конечных группах // Труды по дискретной математике. - Т. 1. - 1997. - С. 85-112.

[6] Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. - М.: Мир. 1965.

[7] Клосс Б.М. О вероятностных распределениях на бикомпактных топологических группах // Теория вероятностей и ее применения. - Т. 4. - Вып. 3. - 1954. - С. 255-290.

[8] Круглов И.А. Достижимость на конечном шаге предельных распределений для произведений случайных величин со значениями в конечной группе // Дискретная математика. - Т. 18. - Вып. 3. - 2006. - С. 35-42.

[9] Круглов И.А. Принцип сходимости Б.М. Клосса для произведений случайных величин со значчниями в компактной группе, распределения которых определяются цепью Маркова // Дискретная математика. - Т. 20. - Вып. 1. - 2008. - С. 38-51.

[10] Круглов И.А. Асимптотическое поведение произведений случайных величин со значениями в конечных простых полугруппах, распределения которых определяются цепью Маркова // Труды по дискретной математике. - Т. 11. - Вып. 2. - 2008. - С. 51-62.

[11] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. - М.: Наука, 1964.

[12] Максимов В.М. Необходимые и достаточные условия сходимости композиции неодинаковых распределений на конечной группе // Теория вероятностей и ее применения. - Т. 13. - Вып. 2. - 1968. - С. 295-307.

[13] Максимов В.М. О композиционно сходящихся последовательностях мер на компактных группах // Теория вероятностей и ее применения. - Т. 16. - Вып. 1. - 1971. - С. 52-65.

[14] Хейер Х. Вероятностные меры на локально-компактных группах. - М.: Мир, 1981.

[15] Cigler J., Schmetterer L. Uber die Summe Markowschen Ketten auf endlichen Gruppen, 1 // Transaction of the Third Prague Conference. - 1962.

[16] Cigler J. Uber die Grenzverteilung von Summen Markowschen Ketten auf endlichen Gruppen // Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeits theorie und verwandte Gebiete. - 1. - 1962. - P. 415-432.

[17] Diaconis P. Group Representations in Probability and Statistics. Institute of Mathematical Statistics. Lecture notes – monograph series. - V.11, 1988. - 198 p. URL: http://lib.mexmat.ru/books/13649

[18] Koutsky Z. Einige Eigenschaften der modulo k addierten Markowshcen Ketten // Transaction of the Second Prague Conference. - 1959. - P. 263-278.

[19] Prehn U. Gleichverteilung seigenschaften zufalliger Summen, deren Summanden einer verallgemeinerten Markowschen Abhangigkeit unterworfen sind // Math. Nachr. - 1971. - B. 49. - H. 1. - S. 27-40.

Студентам и преподавателям математических специальностей

Простой вывод формулы площади гладкой поверхности[1]

С. В. Шведенко

В статье рассматривается определение площади гладкой поверхности (двумерной в трехмерном пространстве), основанное на идее, среди приверженцев которой следует назвать выдающегося французского математика Анри Лебега. Это определение, в случае, когда поверхность задана как график функции или параметрически, достаточно просто приводит к классическим интегральным формулам для площади.

Среди подсказываемых здравым смыслом подходов к определению *площади поверхности* самый простой исходит из того, что *площадь* тетрадного листа равна отношению *объема* тетради к ее *толщине*. Точнее этот подход выражен в следующем фрагменте монографии А. Лебега[2] [**1**] (с. 146–147): *“... мы определим площадь поверхности как предел (предполагаемый существующим) при* $r = 0$ *отношения* $\dfrac{V(r)}{2r}$*, где* $V(r)$ *обозначает предполагаемый существующим объем тела, состоящего из отрезков длины* $2r$*, нормальных к поверхности, серединами которых являются все точки области рассматриваемой поверхности.”*

1. Реализуя указанный подход Лебега в случае поверхности S, заданной как *график функции* $z = z(x, y)$ над плоской фигурой D (рис. 1)[3], следует вообразить “сэндвич” S_ε, составленный из этой поверхности (как “начинки”) и приложенных к ней сверху и снизу двух слоев толщиной ε каждый (рис. 2), и принять за *площадь* поверхности S предел при $\varepsilon \to 0$ отношения $\dfrac{V(S_\varepsilon)}{2\varepsilon}$ *объема* указанного “сэндвича” к его *толщине*.

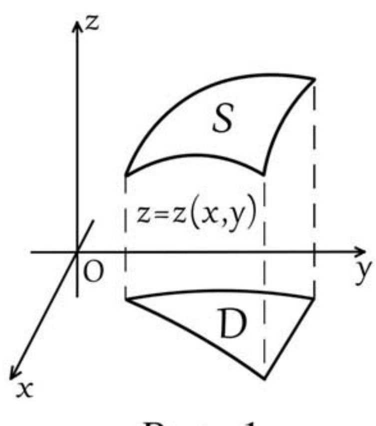


Рис. 1.

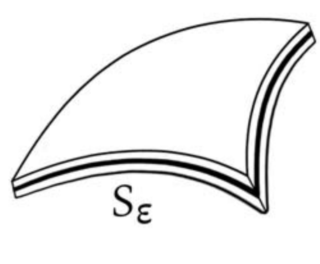


Рис. 2.

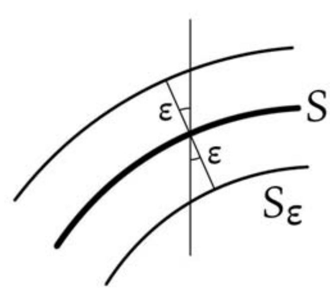


Рис. 3.

[1] Под *гладкостью* поверхности S (при любом способе ее задания) понимается наличие *касательной плоскости* к S в каждой точке $(x_0, y_0, z_0) \in S$ с требованием непрерывности ее параметров как функций точки касания.

[2] Лебе́г, Анри́ (Lebesgue, Henri), 1875–1941 – французский математик.

[3] *Гладкость* этой поверхности обеспечивается наличием непрерывных частных производных z'_x, z'_y в точках $(x_0, y_0) \in D$, касательная плоскость в точке $(x_0, y_0, z_0) \in S$ имеет уравнение $z - z_0 = z'_x \cdot (x - x_0) + z'_y \cdot (y - y_0)$, а вектором нормали является $\pm\{-z'_x, -z'_y, 1\}$.

Так как $\frac{1}{\sqrt{(-z'_x)^2+(-z'_y)^2+1}}$ есть *косинус острого угла*, образуемого *вектором нормали* к поверхности в точке $(x, y, z(x, y)) \in S$ и проходящей через эту же точку *вертикальной прямой* (рис. 3), "сэндвич" S_ε ограничивают сверху и снизу *графики функций* $z = z(x, y) \pm \varepsilon \cdot \sqrt{(-z'_x)^2+(-z'_y)^2+1}$, а если учесть, что проекция "сэндвича" S_ε на плоскость xOy совпадает с фигурой D с точностью до множества, площадь которого есть $O(\varepsilon)$, для объема $V(S_\varepsilon)$ "сэндвича" S_ε оказывается справедливой оценка

$$V(S_\varepsilon) = \iint\limits_D 2\varepsilon \cdot \sqrt{(-z'_x)^2+(-z'_y)^2+1}\, dx\,dy + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

Следует вывод: если поверхность S представлена как *график* непрерывно дифференцируемой функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, ее *площадь*, понимаемая согласно подходу Лебега как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{V(S_\varepsilon)}{2\varepsilon}$ (и обозначаемая той же буквой, что и сама поверхность), выражается формулой

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dx\,dy\,. \qquad (*)$$

Разумеется, подобная формула действует и при задании поверхности S в виде графика функции $x = x(y, z)$ или $y = y(z, x)$.

2. Прямая реализация подхода Лебега к нахождению площади поверхности при ее *параметрическом* задании — как образ S плоской фигуры D при отображении функциями $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ (рис. 4), — оказывается технически сложной для изложения в лекционном курсе[4]. В качестве выхода можно предложить путь сведения к уже разобранному случаю *графика функции*.

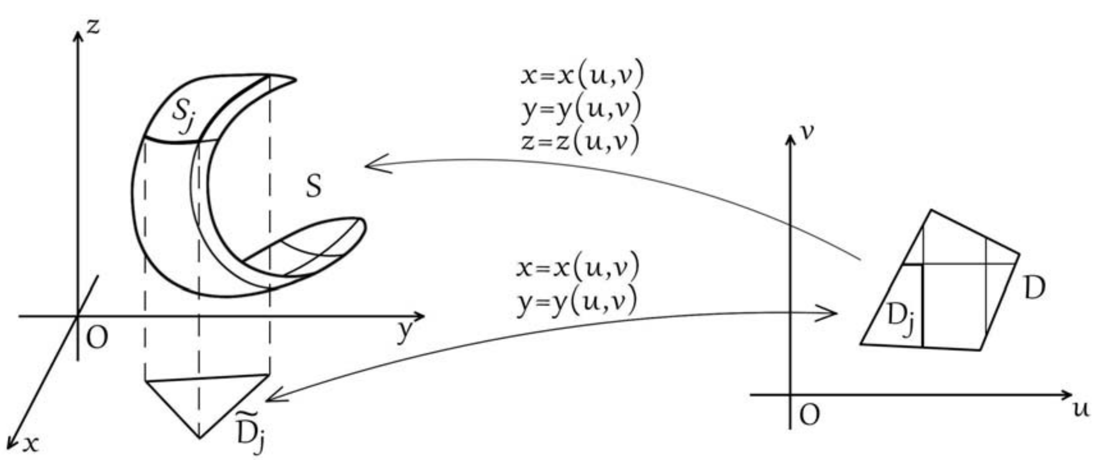


Рис. 4.

[4] Хотя Лебег в [**1**] на с. 149 ограничивается лишь общими указаниями, из них видна необходимость как требования повышенной гладкости поверхности, так и непростого оценивания тройного интеграла.

Принимая в качестве условий гладкости поверхности S существование у параметризующих функций непрерывных частных производных и равенство *двум* ранга матрицы $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ во всех точках $(u,v)\in D$, фигуру D можно считать составленной из конечного числа фигур D_j со свойством: параметризующие функции отображают эти фигуры *взаимно однозначно* на части S_j поверхности S, являющиеся графиками функций:

либо $z=z(x,y)$ над фигурой $\widetilde{D}_j$ плоскости xOy, если $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ для $(u,v)\in D_j$,

либо $y=y(z,x)$ над фигурой $\widetilde{D}_j$ плоскости zOx, если $\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \neq 0$ для $(u,v)\in D_j$,

либо $x=x(y,z)$ над фигурой $\widetilde{D}_j$ плоскости yOz, если $\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \neq 0$ для $(u,v)\in D_j$.

Если имеет место первый случай (как на рис. 4), то применение формулы $(*)$ с подстановкой в нее вытекающих из соотношений $\begin{cases} z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u \\ z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v \end{cases}$ значений $z'_x = \dfrac{\begin{vmatrix} z'_u & y'_u \\ z'_v & y'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}$ $z'_y = \dfrac{\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}$ и последующим переходом от интеграла по $(x,y)\in\widetilde{D}_j$ к интегралу по $(u,v)\in D_j$ дает:

$$S_j = \iint\limits_{\widetilde{D}_j} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\widetilde{D}_j} \sqrt{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & y'_u \\ y'_v & y'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}^2}\ \left|\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^{-1}\right| dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D_j} \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}\,du\,dv = \iint\limits_{D_j} \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\right| du\,dv.$$

Так как (как нетрудно догадаться и легко проверить) к этому же результату приводит разбор случаев, когда части S_j поверхности S являются графиками функции $y=y(x,z)$ или $x=x(y,z)$, общий принцип аддитивности площади позволяет сделать вывод:

$$S = \sum_j \iint\limits_{D_j} \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\right| du\,dv = \iint\limits_{D} \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\right| du\,dv = \iint\limits_{D} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

где $E=(x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2$, $G=(x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2$, $F=x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$.

Литература

[**1**] Лебег Г. Об измерении величин. - Москва: Учпедгиз, 1938.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

Из математического фольклора

От редакции

Математика, конечно, наука серьезная. Но как и всякая профессия, она обрастает профессиональным жаргоном, а затем и фольклором. В данном случае большой вклад вносят студенты математических специальностей, а также, как мы увидим, и школьники профильных классов. Представляем несколько образцов математического фольклора, в большинстве случаев автор известен, а в других можно воспринимать это как народное творчество. В хороших образцах, как правило, отражается содержательная математическая сторона и присутствует юмор. Редакция подготовила подборку по разным математическим дисциплинам.

Алгебра

Известное четверостишие, есть много версий, члены редколлегии помнят эту:

Гомоморфный образ группы,
Будь во имя коммунизма
Изоморфен фактор-группе
По ядру гомоморфизма!

По мотивам урока алгебры в 9Д классе школы 179 г. Москвы, тема — решение уравнений третьей степени методом Кардано и четвертой степени методом Феррари.

Восхитительный Феррари
Не помчится без Кардано,
Без квадратных уравнений
От Кардано проку нет.
И поэтому решайте
Непрерывно, неустанно
Уравнения с квадратом,
Да поможет вам Виет!

Автор Имайкин В.М.

Ответ учащихся:

И Феррари, и Кардано — замечательные вещи!
Но позвольте вам заметить, не всегда на них есть время.
Уравнение четвертой степени решить порезче
Вам позволит непременно тот, о ком моя поэма[1].
Многочлен с икcóм в четвертой разложи́м на два квадратных
В совокупности решив их, мы найдем ответ к задаче.
Ну так что ж, давайте в скобки вставим мы четырехкратно
Буковки-коэффициенты, и систему, не иначе,
Мы потом из них составим и одно через другое
Мы чуток повыражаем. В результате нам предстанет
Уравненье с переменной (это ужас, что такое!)
В шестой степени в начале. Этот метод вас достанет!
Но возможность есть однако упростить сей жуткий способ

[1] Л. Эйлер, речь идет о методе Эйлера разложить приведенный многочлен четвертой степени на два квадратных.

Можно сразу специально буквы подставлять такие,
Чтобы только две их было. Остается под вопросом
Лишь один момент при этом: будут слишком уж плохие
Получаться уравненья. Остается попытаться
Подобрать хороший корень, перебрав в свободном члене
Все делители: подставить, страшно разочароваться
И понять, что вы ошиблись и поддались гиблой лени.
Хорошенько отдохните, мозг очистите от хмари,
В жизни вы не забивайте голову подобным сбродом,
И скорей решать бегите замечательным Феррари,
От души вас поздравляем с новым счастьем, с Новым годом!

Автор 9Д класс 2021/22 учебного года школы № 179 г. Москвы.

Геометрия

Тяжело молчал валун-догматик
в стороне от волн. А между тем —
я смотрел на мир, как математик,
доказав с десяток теорем!
Скалы встали перпендикулярно
к плоскости залива. Круг луны.
Стороны зари равны попарно,
волны меж собою не равны. ...

Автор Рубцов Н.

Математический анализ

Закаляйся, как сталь! – говорил Лопиталь.

Для каждого эпсилон Карл Вейерштрасс
Заботливо нужное дельта припас,
И мог, даже если ночью поднять,
Предел единицы на эн посчитать!

Автор Богачев Л.В.

Теория вероятностей

На дне глубокого сосуда
Лежат спокойно n шаров.
Поочередно их оттуда
Таскают двое дураков.
Сие занятье им приятно.
Они таскают t минут.
И, вынув шар, его обратно
В сосуд немедленно кладут.
Ввиду условия такого,
Сколь вероятность велика,
Что первый был глупей второго,
Когда шаров он вынул k?

Автор Скитович В.П.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная 2-22.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2021 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2021 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >