УДК 004.93

Спектры функций алгебры логики

Переяславский Виталий Иванович, к.ф.-м.н., доцент, и.о. зав. кафедры математики и естественно-научных дисциплин

Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московской области Финансово-технологическая академия, г. Королев Московской области.

*Изучаются вопросы, связанные с отображением функций алгебры логики на множество векторов, компонентами которых являются частоты единичных значений переменных для единичных значений функции. Такие векторы названы спектрами функций алгебры логики. Описываются геометрические свойства спектров. Данное исследование может быть использовано в задачах распознавания образов, когда требуется разделить два подмножества вершин многомерного единичного куба.*

Ключевые слова: функции алгебры логики, многомерный куб, разделение.

SPECTRA OF ALGEBRA LOGIC FUNCTIONS

Pereyaslavskiy V.I.

State educational institution of higher professional education of Moscow region Financial and technological Academy, Korolev, Moscow region.

*A conversion of algebra logic functions to a set of vectors, which components are frequencies of value one of variables, where function value equals one is studied. Such vectors are called spectra. Describes geometric properties of spectra. This study can be used in problems of pattern recognition, when you want to divide two subsets of vertices of multidimensional singular cube.*

Keywords: functions of the algebra of logic, multidimensional cube division.

 Пусть $P\_{2}^{n}$ - множество всех всюду определенных функций алгебры логики (булевых функций) от $n$ переменных [1, C.9].

 Пусть задана функция $f$ из $P\_{2}^{n}$ , не равная тождественному нулю.

 Спектром функции $f$ назовем вектор $s\left(f\right)=$ $(s\_{1} ,…, s\_{n}) $ , где

$s\_{i }$ *=* $\frac{число единиц f , у которых x\_{i}=1}{число единиц f}$*,*

 а отображение $s\left(f\right):f \rightarrow s(f)$ назовем спектральным.

В этом работе будут рассмотрены свойства спектров и доказаны две теоремы о геометрии расположения спектров.

Перечислим некоторые простые свойства спектров:

1.  для любой .
2. Все вершины куба  являются спектрами некоторых функций.
3. Если — несущественная переменная функции , то . Обратное, вообще говоря, неверно.
4. Если функция *f* — монотонная [1, C.36], то  — несущественная переменная тогда и только тогда, когда .
5. Функция *f*представима в виде  тогда и только тогда, когда .
6. Функция *f* представила в виде тогда и только тогда, когда .
7. Если  ***—*** спектр некоторой функции, то  также спектр некоторой функции.
8. Если представить геометрическую интерпретацию единиц функции *f* точками куба  с равными массами, то спектр функции *f* будет иметь смысл центра тяжести системы единиц функции *f*.

Доказательство. Свойства 1) и 8) следуют непосредственно из определения спектра. Функции вида имеют спектры , что доказывает 2). Свойство 3) следует из того, что если , то и  Функция же  существенно зависит от двух переменных, но имеет спектр, равный 

Так как  влечёт  для монотонных функций, то , и если , то нет наборов  и  таких, что , a , следовательно, *xi* — несущественная переменная, и свойство 4) доказано.

Свойства 5) и 6) следуют из свойства 8). Если имеет спектр , то  имеет спектр , что доказывает свойство 7).

Замечание 1. Спектральное отображение  при  не взаимно однозначное.

Например, функции от *п* переменных  и  имеют спектры .

Замечание 2. Все спектры монотонных функций лежат в кубе. Все вершины этого куба являются спектрами некоторых монотонных функций. Ограничение *s* на множество монотонных функций также не взаимно однозначное отображение.

Доказательство следует из свойств 1), 4) и 5) и того факта, что функции *f*1 и *f*2 от *п* переменных такие, что ,  являются монотонными и имеют спектры .

Теорема 1. О минимальном расстоянии между спектрами функций из .

.

Доказательство. Пусть , , где *Ni* число единиц функции *fi* , *i =*1, 2.

Случай 1. , где  наибольший общий делитель *a* и *b*.

Тогда , только если  или , т.е. если в *i-*мстолбце таблиц и , строками которых являются единицы функций *f*1 и *f*2 соответственно, либо стоят только нули, либо только единицы. Отсюда, если *k* — число равных компонент векторов  и , то  и . Поскольку неравные компонентыиотличаются не менее чем на , то получаем, что



при любом 

Случай 2. ***.***

В этом случае если  то



**

Отсюда 

Случай 3. *.*

Если 

Пусть теперь  где  - чётные числа. При  имеем , и если , то  для любой *f*2 и любого ******. При  *N*2 не должно превосходить , поэтому

**

Объединяя результаты всех трех случаев, получаем, что если , то 

Для функций



и



получаем



Откуда



Теорема 1 доказана.

Можно показать, что при *n* = 2, 3, 4, 5 минимальные расстояния равны соответственно 

Рассмотрим вопрос о максимально возможном расстоянии между спектром и множеством всех остальных спектров.

Лемма 1. Ближайшим к спектру  является спектр  находящийся на расстоянии 

Доказательство. Рассмотрим функцию  с таблицей единиц (рис.1).



**Рисунок 1. Таблица единиц функции .**

Тогда 

Для доказательства леммы 1 достаточно показать, что для любой , если , то 

Докажем это утверждение индукцией по *n*.

Для *п*= 1 выполнение неравенства легко проверяется. Пусть теперь .

Случай 1. В таблице *Eg* есть столбец единиц. Вычеркнув этот столбец, получим таблицу единиц некоторой функции, причем

**

Но по предположению индукции ,откуда

**

Случай 2. В таблице *Eg* в любом столбце есть нуль, а число строк *Еg* не большем чем *n +*1*.*

В этом случае если  то  для любого *i ,* откуда

**

Случай 3. В таблице *Eg* в любом столбце есть нуль, а число строк *m* таблицы *Eg* больше чем *n +*1*.*

Обозначим через *ki* число нулей в *i*-м столбце *Eg*, тогда  так как в таблице *Eg* все строки содержат нули, за исключением быть может, одной строки. Спектр  а так как  то

**

Этим и завершается доказательство леммы 1.

Лемма 2. Для любого спектра из ** найдется спектр на расстоянии не большем чем 

Доказательство. Рассмотрим спектр  некоторой функции *f* .В силу свойства 7 достаточно доказать лемму для спектра  у которого  для любого *i*.

Рассмотрим квадратную таблицу *Аn* такого вида: на диагонали стоят нули, выше и ниже диагонали располагаются в шахматном порядке единицы и пустые клетки, причем для любых двух элементов  и**,., таблицы один из них — единица, а другой — пустая клетка. Такую таблицу можно построить для любого *п*. Для иллюстрации приведена таблица *A*6 (рис.2).



**Рисунок 2. Квадратная таблица *A*6 специального вида.**

Докажем, что при любом заполнении нулями и единицами пустых клеток в таблице *An* не будет одинаковых строк. Действительно, *i*-я и *j*-я строки будут различаться в *i -*м или *j* -м столбце, так как  а один из элементов  или  равен единице по построению.

Добавив к *An* единичную строку, получаем таблицу *Bn*, у которой также при любом заполнении пустых клеток все строки различны. Заполняя пустые клетки таблицы *Вп*, можно число нулей в каждом столбце сделать произвольным числом от единицы до  Поскольку любое  приближается числом вида  с точностью  где *ki* – целое число такое, что  то при заполнении *Bn*, при котором в *i*-м столбце *Bn* будет *ki* нулей, получим таблицу единиц некоторой функции *g*, причем



Если , то лемма доказана.

Пусть  Заполним одну произвольную пустую клетку иначе, чем в предыдущем заполнении таблицы *Bn,* сохранив такими же заполнения всех других пустых клеток. Получим таблицу единиц функции *g*1 такой, что 

Теорема 2. О максимальном расстоянии от спектра до множества всех остальных спектров.

Спектрами, наиболее удаленными от множества всех других спектров, являются вершины куба **, причем ближайший к вершине спектр находится на расстоянии 

Доказательство. Теорема 5 является простым следствием леммы 1, леммы 2 и свойства 7.

Следствие. *ε-*сеть, состоящая из шаров радиуса  с центрами во всевозможных спектрах функций из , покрывает весь куб ******.

Доказательство. При доказательстве леммы 2 не использовался тот факт, что  — спектр некоторой функции, значит, для любой точки  по лемме можно найти спектр некоторой функции на расстоянии, не большем чем 

Библиография.

1. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. - М.: Наука, 1986. – 384 с.